9º

Matemáticas

Libertad y Orden
Ministerio de
Educación Nacional
República de Colombia

María Fernanda Campo Saavedra
Ministra de Educación Nacional

Mauricio Perfetti del Corral
Viceministro de Educación Preescolar, Básica y Media

Mónica López Castro
Directora de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media.

Heublyn Castro Valderrama
Subdirectora de Referentes y Evaluación de la Calidad Educativa

Heublyn Castro Valderrama
Coordinadora del Proyecto

Clara Helena Agudelo Quintero
Gina Graciela Calderón
Luis Alexander Castro
María del Sol Effio J
Omar Hernández Salgado
Edgar Martínez Morales
Jesús Alirio Naspirán
Emilce Prieto Rojas
Equipo Técnico

María Fernanda Dueñas Álvarez
Diego Fernando Pulecio Herrera
Autores de la adaptación

ISBN libro: 978-958-691-422-2
ISBN obra: 978-958-691-411-6

Dirección de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media
Subdirección de Referentes y Evaluación de la Calidad Educativa
Bogotá, Colombia, 2010
www.mineducacion.gov.co

Fundación Manuel Mejía
Andrés Casas Moreno
Aura Susana Leal Aponte
Catalina Barreto Garzón
Coordinación del proyecto

Solman Yamile Díaz
Coordinación pedagógica

Erika Mosquera Ortega
Paula Andrea Ospina Patiño
Coordinación editorial

Ángela Duarte Pacheco
Coordinadora del libro

Carlos Andrés Robles Montenegro
Juan Gabriel Duarte Pacheco
Autores

Marta Osorno Reyes
Edición

Víctor Leonel Gómez Rodríguez
Diseño de arte

Leidy Joanna Sánchez
Víctor Leonel Gómez Rodríguez
Fransue Escamilla Pedraza
Diseño y diagramación

Richard Rivera Ortiz
Ilustración
Shutterstock
Fotografía

Agradecimientos especiales a: Raquel Suárez Díaz, Wilson Giral, Guido Delgado Morejón, Geovana López y Eliana Catalina Cruz, quienes contribuyeron al desarrollo de esta publicación.

Presentación

El Ministerio de Educación Nacional, presenta a la comunidad educativa la nueva versión del modelo **Postprimaria Rural**, en su propósito de disminuir las brechas educativas del país en cuanto a permanencia y calidad en todos los niveles. Este material se presenta como una alternativa que busca dar respuesta, a las necesidades de formación y desarrollo educativo en poblaciones de las zonas rurales y urbano-marginales.

La propuesta pedagógica del modelo Postprimaria, se desarrolla a través de una ruta didáctica que permite a los estudiantes analizar e interpretar diversas situaciones problema, para aproximarse a su cotidianidad, construir saberes y convertir los contenidos en aprendizaje significativo para sus vidas.

Para el logro de este objetivo, se ha diseñado un conjunto de materiales de aprendizaje que abordan las áreas obligatorias y fundamentales, las cuales desarrollan contenidos actualizados que incorporan los referentes de calidad del MEN, especialmente los Estándares Básicos de Competencias. También el modelo brinda material educativo, que permite a los establecimientos educativos implementar proyectos de alimentación, tiempo libre, salud y nutrición. Adicionalmente, teniendo en cuenta la necesidad de las nuevas generaciones de las zonas rurales, se propone el trabajo con Proyectos Pedagógicos Productivos, el cual ofrece un doble beneficio: por un lado, se convierte en la oportunidad de desarrollar aprendizajes prácticos, con lo que se fomenta no solo el saber sino el saber hacer en el contexto del estudiante; y por otro, se promueve el espíritu empresarial, que permite a los jóvenes comprender distintas posibilidades productivas.

Postprimaria rural cuenta con un Manual de implementación en el que se presenta el enfoque pedagógico y alternativas didácticas que se pueden aplicar en cada área curricular. Éstas son una herramienta de apoyo para el docente porque le facilita, con ayuda de su creatividad e iniciativa personal, promover una educación pertinente para el estudiante de la zona rural y urbano marginal, e incrementar el interés por ampliar su escolaridad, hasta alcanzar la culminación del ciclo básico.

Este modelo es una oportunidad para impulsar la participación activa de los estudiantes como ciudadanos colombianos, toda vez que con ello se contribuye a ampliar sus posibilidades de vida digna, productiva y responsable, lo que repercutirá en la construcción de una sociedad colombiana más justa y con mayores posibilidades de desarrollo humano.

Ministerio de Educación Nacional

Así es esta cartilla

Querido estudiante:

Bienvenido a este nuevo curso de **Matemáticas** de la Postprimaria rural. Esperamos que esta experiencia sea enriquecedora tanto para ti, como para todos los integrantes de la comunidad.

Lee con atención el siguiente texto. Te ayudará a entender cómo están organizadas las cartillas que se utilizarán para el trabajo en las áreas fundamentales, en los proyectos transversales y en los proyectos pedagógicos productivos.

Esta cartilla te acompañará durante todo el curso y orientará tu proceso de enseñanza-aprendizaje. El conocimiento y uso adecuado de ella te permitirá obtener un mejor desempeño, que se verá reflejado en tu formación personal.

En cada una de las guías que componen los módulos, encontrarás unos íconos que indican el tipo de trabajo que vas a realizar:

Lo que sabemos

Las actividades acompañadas por este ícono te permiten indagar los conocimientos que has adquirido en años anteriores y en tu vida diaria. Esta sección te servirá como punto de partida para construir nuevas formas de conocer el mundo.

Aprendamos algo nuevo

En esta sección encontrarás información y actividades con las cuáles podrás construir nuevos y retadores aprendizajes. Es importante que hagas tu mejor esfuerzo en su realización, y compartas con tu docente y compañeros las dudas que se te presenten. Recuerda que los nuevos aprendizajes y el uso que hagas de ellos, te permitirán mejorar tus competencias como estudiante y como ciudadano responsable, y comprometido en la comunidad en la que vives.

Ejercitemos lo aprendido

Este ícono identifica las actividades que te permitirán poner en práctica tus aprendizajes y ganar confianza en el uso de los procedimientos propios de cada área.

Apliquemos lo aprendido

Encontrarás identificadas con este ícono las actividades de aplicación a través de las cuales podrás ver cómo lo que has aprendido, te sirve para solucionar situaciones relacionadas con tu vida cotidiana, con el área que estás trabajando y con otros campos del saber.

Evaluemos

En esta sección se te presentarán tres preguntas fundamentales:

- ¿Qué aprendí? Dónde explicarás la forma como vas desarrollando tus competencias.
- ¿Cómo me ven los demás? Esta pregunta la responderás con la ayuda de tus compañeros.
- ¿Cómo me ve mi maestro? Aquí tu maestro te apoyará para establecer tus niveles de desempeño.

El análisis de estas respuestas te ayudará a identificar acciones para superar dificultades y determinar diferentes maneras para mejorar tus competencias y las de tus compañeros.

Trabajo en grupo

Cuando las actividades estén acompañadas de este ícono, debes reunirte con uno o más de tus compañeros. Recuerda respetar sus opiniones, sus ritmos de trabajo y colaborar para que la realización de estas actividades favorezca el desarrollo de competencias en todos los integrantes del grupo.

Te invitamos a hacer un buen uso de esta cartilla y a cuidarla de manera especial, para que pueda ser usada por otros estudiantes en años posteriores.

Contenido

Módulo 1

Sistema de ecuaciones lineales de 2 x 2

¿Qué vas a aprender?

Este módulo te brinda la oportunidad para que apliques los conocimientos en matemáticas que hasta ahora has aprendido, en diferentes contextos de tu vida cotidiana.

Aprenderás a resolver ecuaciones lineales de diferentes maneras y podrás aplicarlas para la solución de diferentes problemas que te presenta el texto.

Aprenderás también a resolver ejercicios con dos ecuaciones lineales y a utilizar diferentes métodos de solución, para poder aplicar estos métodos en la solución de problemas.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento numérico y sistemas numéricos

- Resuelvo problemas y simplifico cálculo usando propiedades y relaciones de los números reales y las relaciones y operaciones entre ellos.

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 1.

Ecuaciones lineales</td><td>Definición.

Propiedades de la suma y la resta para la igualdad.

Problemas de aplicación de ecuaciones lineales.</td><td rowspan="4">El desarrollo de estos estándares permitirá fortalecer los siguientes procesos:

• La formulación, tratamiento y resolución de problemas: Por cuanto se presentan diversas situaciones que pueden ser resueltas mediante el desarrollo de sistemas de ecuaciones lineales.

• La modelación: Está relacionada con la capacidad del estudiante para poder plantear los problemas que se le presentan por medio de un sistema de ecuaciones lineales que le permitan dar la respuesta a la situación.

• La comunicación: Se invita al estudiante a interpretar enunciados, así como a proponer soluciones a ejercicios y aplicaciones relacionadas con sistemas de ecuaciones de 2 x 2 y de 3 x 3 y su aplicación para la solución de problemas.

• El razonamiento: El presente módulo se apoya constantemente en preguntas, las cuales trazan un derrotero, para deducir algunas relaciones que existen entre los sistemas de ecuaciones. Se muestra la regla de Cramer y los tres sistemas de solución de ecuaciones lineales.

• La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos: A lo largo del desarrollo de los temas, al finalizar el desarrollo de cada tema y en las actividades evaluativas, se presentan ejercicios que ayudarán a ganar destreza en el planteamiento y solución de un sistema de ecuaciones de 2 x 2 o de 3 x 3</td></tr>
<tr><td>Guía 2.

Sistemas de ecuaciones de 2 x 2.</td><td>Definición.

Método de igualación.

Método de sustitución.

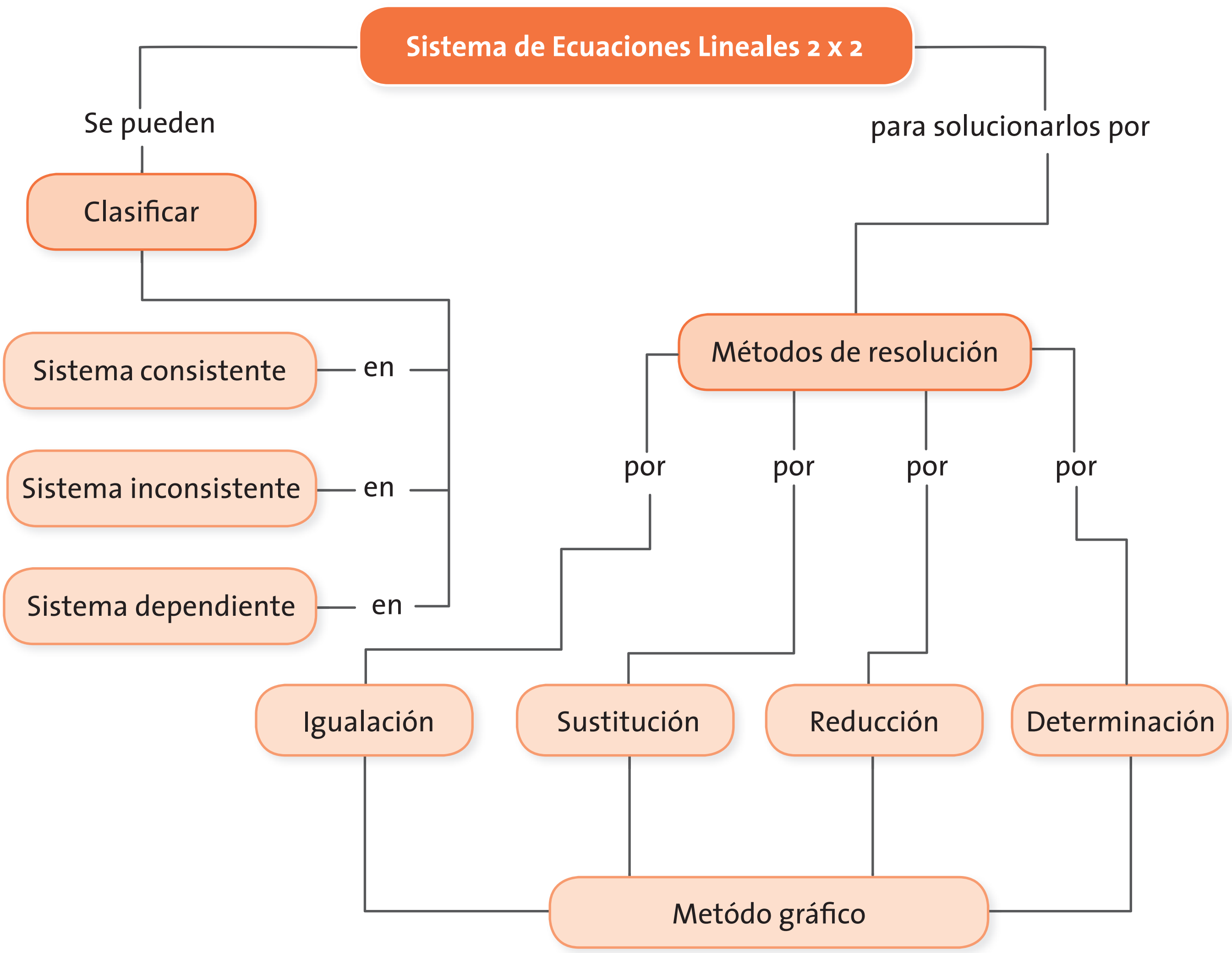
Método de reducción (eliminación)</td></tr>
<tr><td>Guía 3.

Problemas de sistema de ecuaciones de 2 x 2.</td><td>Problemas de aplicación.</td></tr>
<tr><td>Guía 4.

Determinantes de 2 x 2.</td><td>Definición.

Regla de Cramer.</td></tr>
</table>

El siguiente esquema te muestra la manera como se relacionan los conceptos que se trabajan en las guías del módulo.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Con la enseñanza de diferentes métodos algebraicos, nos adentraremos en la práctica que nos lleve a la resolución de sistemas con dos, incógnitas. Se trata de buscar manera más sencilla en el manejo de las ecuaciones y debemos tener en cuenta que una de las dificultades mas que más se presentan radica en no olvidarnos de multiplicar un signo o escoger el método adecuado.

Aunque hay que conocer estos métodos, podemos utilizar la calculadora como herramienta de apoyo para solucionar los sistemas, bien sea para solucionarlos o para poder realizar las comprobaciones de los ejercicios, de las ecuaciones o de los problemas que se plantean.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En cada una de las guías encontrarás la sección *ejército lo aprendido*, con la cual podrás evaluar tu destreza en cuanto al trabajo que se realiza con el sistema de ecuaciones lineales y los diferentes métodos que se tienen para poder resolverlas, de esta manera se reforzará el desarrollo del contenido de cada guía.

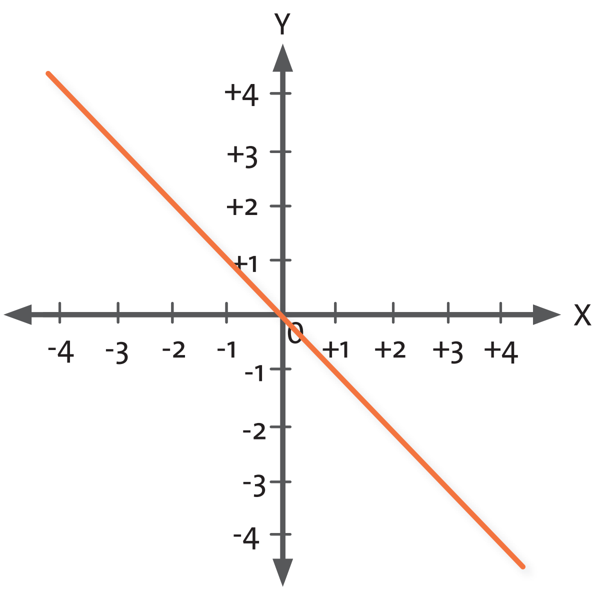
También encontrarás al final del módulo, las secciones *Aplico lo aprendido* donde se proponen aplicaciones en las que combinarás tu habilidad manual y los conocimientos adquiridos y la sección *Evaluación*, en las que se proponen actividades individuales y grupales en las que tú, tus compañeros y el maestro podrán detectar los aspectos que debes reforzar con respecto a los números reales, sus propiedades y operaciones.

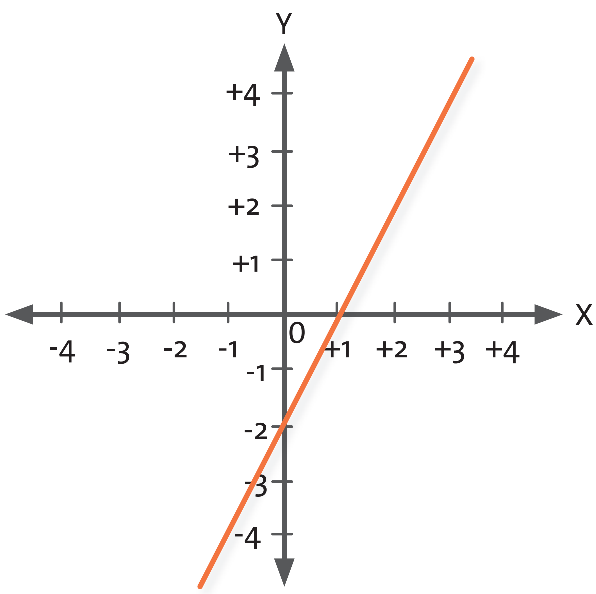
Explora tus conocimientos

Asocia a cada una de estas gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:

» $y = \frac{-3x}{4}$

» $y = 7x - 2$





Guía 1

Ecuaciones lineales

Estándares:

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Pensamiento numérico

- Resuelvo problemas y simplifico cálculo usando propiedades y relaciones de los números reales y las relaciones y operaciones entre ellos.

Lo que sabemos

Definición

La expresión algebraica $ax + by = c$ se denomina una ecuación lineal con dos incógnitas, donde a y b son los **coeficientes** de las **incógnitas** x y y, respectivamente, mientras que c es el término independiente.

Recordemos algunos conceptos

Coeficiente	Es un factor multiplicativo constante de un objeto específico.
Incógnita	Es una variable que interviene en una ecuación que sólo se verifica para unos valores determinados.
Término independiente	El término independiente es el que consta de sólo un valor numérico y no tiene parte literal.

Se dice que la solución de la ecuación es una pareja de números tales que sustituidos en los lugares de las incógnitas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, hacen que se cumplan la igualdad.

Ejemplo:

Hallar soluciones para la ecuación $2x + y = 13$

Solución

Dando un valor a la variable x en la ecuación en fácil obtener el valor correspondiente para y y con ello una solución.

Observemos

Si reemplazamos 1 en el lugar de las x miremos que valor tendría y para cumplir con la igualdad.

$2(1) + y = 13$ Lo que haremos ahora es multiplicar 2 x 1

$2 + y = 13$ Ahora observemos que valor haría falta para cumplir con la igualdad.

$2 + 11 = 13$ El valor que hace falta es 11 para que se cumpla la igualdad.

Podemos ayudarnos de una tabla de valores para hacer más sencilla la solución.

X	1	2	3	4	5
Y	11	9	7	5	3

Para la solución de la anterior ecuación existen varios pares de números que cumplen con la igualdad.

Aprendamos algo nuevo

Otra forma de resolver las ecuaciones lineales es aplicar las propiedades de suma y multiplicación de la igualdad para aislar la variable en un lado del signo de igualdad.

A continuación enunciaremos las dos propiedades para que se tengan en cuenta al momento de resolver las ecuaciones lineales.

Propiedad de la suma para la igualdad:

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para cualquiera a, b y c. Es decir que la propiedad de la suma para la igualdad establece que podemos sumar el mismo número en ambos lados de una ecuación, de esta manera la ecuación no se ve afectada en ninguno de sus lados. Para la resta se realiza el mismo procedimiento.

Propiedad de la multiplicación para la igualdad:

Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ para cualquiera a, b y c. Es decir que la igualdad establece que podemos multiplicar ambos lados de una ecuación por el mismo número sin cambiar la solución. Para la división podemos dividir ambos lados de una ecuación por el mismo número diferente de cero.

Ejemplo 1

Resuelva la ecuación $3x + 8 = 12$

Solución:

$3x + 8 = 12$	Tenemos la ecuación
$3x + 8 - 8 = 12 - 8$	Restamos 8 en ambos lados. Propiedad de la suma
$3x = 4$	Reducimos términos
$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{4}{3}$	Dividimos por tres a ambos lados
$x = \frac{4}{3}$	Obtenemos el valor de la variable.

Verificamos la solución:

$3x + 8 = 12$

$3\left(\frac{4}{3}\right) + 8 = 12$	Reemplazamos el valor de la variable que hallamos
$\frac{12}{3} + 8 = 12$	Operamos y reducimos términos
$4 + 8 = 12$	
$12 = 12$	

Si al final del remplazo nos da una igualdad, quiere decir que el valor de la variable es el que satisface la ecuación.

Ejemplo 2

$-2x + 8 = 3x - 7$	Tenemos la ecuación
$-2x + 2x + 8 = 3x + 2x - 7$	Sumamos 2x en ambos lados. Propiedad de la suma
$8 = 5x - 7$	Reducimos términos
$8 + 7 = 5x - 7 + 7$	Sumamos 7 en ambos lados.
$15 = 5b$	Resolvemos
$\frac{15}{5} = \frac{5b}{5}$	Dividimos por cinco a ambos lados
$3 = x$	Obtenemos el valor de la variable

Ejemplo 3

$5 - \frac{2x}{3} = -9$	
$3\left(5 - \frac{2x}{3}\right) = 3(-9)$	Multiplicamos ambos lados por tres
$3(5) - 3\left(\frac{2x}{3}\right) = -27$	Utilizamos la propiedad distributiva
$15 - \left(\frac{\cancel{6}x}{\cancel{3}}\right) = -27$	Operamos y simplificamos
$15 - 2x = -27$	
$15 - 15 - 2x = -27 - 15$	Restamos 15 a ambos lados
$-2x = -42$	
$\frac{-2x}{-2} = \frac{-42}{-2}$	Dividimos entre -2 a ambos lados
$x = 21$	

Ejemplo 4

$\frac{1}{2}(x + 4) = \frac{1}{3}x$	
$\frac{1}{2}x + \frac{4}{2} = \frac{1}{3}x$	Utilizamos la propiedad distributiva
$\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{3}x$	Reducimos términos
$\frac{1}{2}x + 2 - 2 = \frac{1}{3}x - 2$	Restamos – 2 a ambos lados
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x - 2$	Restamos $-\frac{1}{3}$ a ambos lados
$\frac{1}{6}x = -2$	Reducimos términos
$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}x = \frac{-2}{\frac{1}{6}}$	Dividimos por $\frac{1}{6}$
$x = 12$	

Problemas de aplicación de ecuaciones lineales.

Cuando estudiamos las matemáticas, lo que pretendemos es que estas, nos puedan ayudar a resolver situaciones de la vida cotidiana. De esta manera, las ecuaciones lineales, son una de las temáticas que más se relacionan con la vida diaria y nos permitirán plantear estas situaciones de forma simbólica para que podamos resolverla.

A continuación daremos algunas pautas, que consideramos necesarias para poder dar solución a situaciones donde intervienen las ecuaciones lineales.

1. Entender el Problema

a. Lee el problema y subraya la pregunta –releer.

b. Repite el problema en tus propias palabras –visualizar.

2. Configurar un plan

a. Encierra en un círculo la información importante que te ayude a entender el problema y las "Acciones claves".

b. Haz un cuadro alrededor de los números que necesitas para resolver el problema y tacha la información innecesaria.

c. Planea una estrategia (haz un dibujo, haz una tabla, etc.).

3. Ejecutar el plan

a. Escribe una oración numérica y resuelve el problema. Explica tu razonamiento.

4. Mirar hacia atrás

a. Revisa hasta que tu respuesta sea precisa y razonable.

b. Elimina las opciones de respuestas que no son razonables.

Ejemplo 1

Luis le pregunto a su primo Juan cuántos años tenía y Juan le contestó:

Si al triple de los años que tendré dentro de tres años le restas el triple de los años que tenía hace tres años, tendrás los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tiene Juan?

Después de leer el problema, configuremos un plan. Realicemos el planteamiento de los datos.

Las edades de Juan: Dentro de 3 años: $x + 3$ Actual: x años. Hace tres años: $x - 3$

Ejecutemos el plan: empecemos a plantear la ecuación de acuerdo a lo que aparece en esta.

Si al triple de los años que tendré dentro de tres años: $3(x + 3)$

Le restas: el triple de los años que tenía hace tres años: $3(x - 3)$

Tendrás los años que tengo ahora: x

Organizamos las expresiones y tenemos: $3(x + 3) - 3(x - 3) = x$

Resolvemos: $3x + 9 - 3x + 9 = x$

$$18 = x$$

Es así como sabemos que Juan tiene 18 años, entonces podemos comprobar el resultado:

$$3(18 + 3) - 3(18 - 3) = 18$$
$$3(21) - 3(15) = 18$$
$$63 - 45 = 18$$
$$18 = 18$$

Ejemplo 2

Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 51.

Cuando nos piden hallar tres números consecutivos, debemos tener en cuenta que:

El primer número es el desconocido: x; como son consecutivos, el segundo número es $x + 1$, y el tercero es $x + 2$, ya tenemos los números consecutivos, ahora planteamos la ecuación.

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 51$$
$$3x + 3 = 51$$
$$3x + 3 - 3 = 51 - 3$$
$$3x = 48$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{48}{3}$$
$$x = 16$$

De esta manera sabemos que el primer número es 16, para hallar los siguientes reemplazamos en la variable x, los consecutivos:

$x = 16$ $\quad$ $x + 1 = 16 + 1 = 17$ $\quad$ $x + 2 = 16 + 2 = 18$

Los números son: 16, 17, 18 y la suma de estos es:

$$16 + 17 + 18 = 51$$

Ejercitemos lo aprendido

Actividad 1

1. Construye una tabla de valores para la ecuación $3x - 5y = 30$, donde encuentres los valores para ***x*** y ***y*** que cumplan con la igualdad.

2. Construye una tabla de valores para la ecuación $x + 4y = -7$, donde encuentres los valores para ***x*** y ***y*** que cumplan con la igualdad.

Actividad 2

Resuelve las siguientes ecuaciones, si una respuesta no es un número entero, déjala como una fracción.

a. $5x - 1 = 14$

b. $8p - 4 = 2p + 10$

c. $5x + 3 - 2 = 9$

d. $8w + 7 = -3w - 15$

e. $5x - 9 = 3(x - 2)$

f. $-6(x - 1) = -5(x + 2)$

g. $5(a + 3) - a = -4(a - 6) + 1$

h. $5(x - 2) - 14x = x - 5$

i. $\frac{x}{4} = -16$

j. $\frac{1}{2}(6y - 10) = 7$

k. $x - 2 = \frac{3}{4}(x + 4)$

l. $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{8}x - 1$

m. $\frac{1}{2} = \frac{4}{5}x - \frac{1}{4}$

n. $\frac{5}{6}m - \frac{5}{12} = \frac{7}{8}m + \frac{2}{3}$

o. $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6} = 2x$

Solución de problemas

1. La edad de Mario es el triplo de la de Juan y ambas edades suman 40 años. Hallar ambas edades.

2. La suma de tres números es 72. El segundo es $\frac{1}{5}$ del tercero y el primero excede al tercero en 6. Hallar los números.

3. La edad actual de Marcos es el doble de la de Pablo y hace 10 años la edad de Marcos eres el triple de la de Pablo. Hallar las edades actuales.

4. La suma de tres números consecutivos es 156. Hallar los números.

Guía 2

Sistemas de ecuaciones de 2 x 2.

Estándares

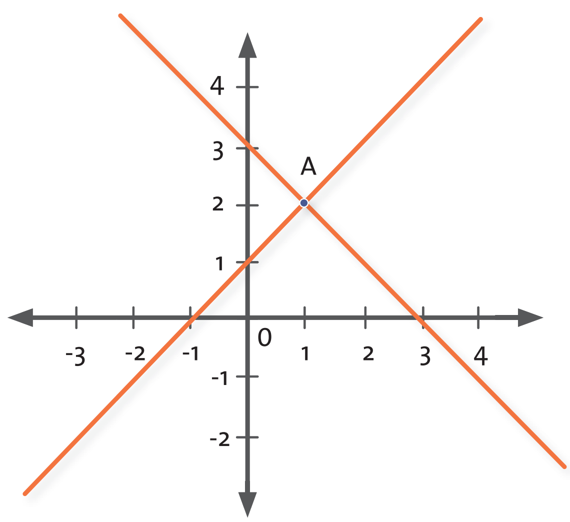
Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

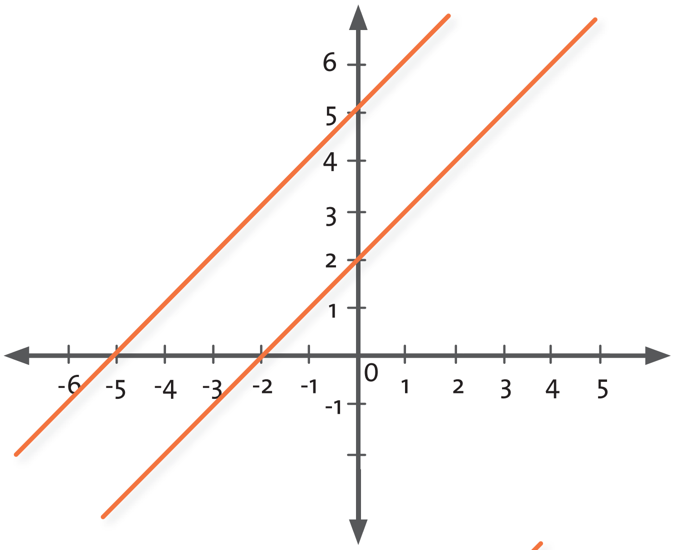
Lo que sabemos

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones lineales con dos variables y lo queremos representar en el plano cartesiano, podemos decir que la solución del sistema será el par o pares ordenados comunes a ambas rectas o el punto de intersección de las rectas.

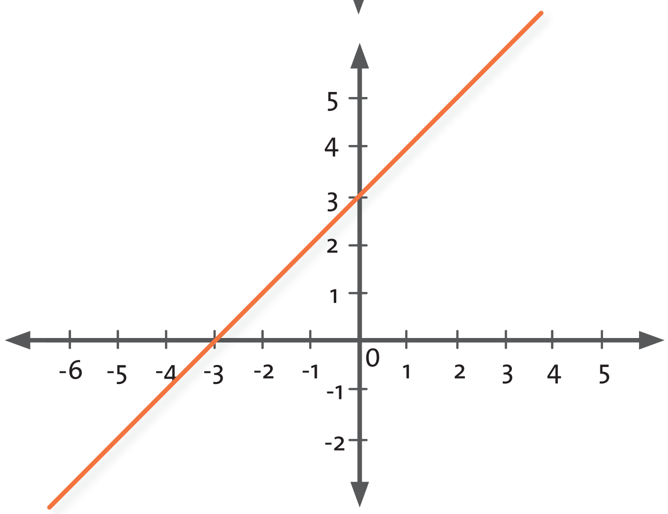
Cuando graficamos el sistema de ecuaciones, podemos encontrar tres diferentes representaciones:



Estas rectas se intersecan exactamente en un punto, es decir que este sistema **tiene exactamente una solución y se llama un sistema consistente.**



Las rectas presentadas, son rectas paralelas, es decir que no se intersecan, por tanto podemos decir que este sistema de ecuaciones **no tiene solución. Llamamos a este caso un sistema inconsistente.**



Cuando tenemos un sistema donde las rectas se ubican una sobre otra o son la misma, podemos decir que todo punto de la recta satisface las ecuaciones y son soluciones del sistema. **Es decir que tiene infinitas soluciones y lo llamamos un sistema dependiente de ecuaciones.**

Los sistemas de ecuaciones 2 x 2 consisten en que tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\text{Ejemplo: } \begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

Para darle solución a este sistema de ecuaciones hay varios métodos como lo son: Igualación, Sustitución, Reducción y Determinantes.

Antes de comenzar con los sistemas de solución de ecuaciones, caractericemos lo que se ha trabajado:

Gráficas	Cantidad de soluciones	Clasificación
Rectas no paralelas.	Una solución.	Sistema consistente.
Rectas Idénticas.	Infinidad de soluciones.	Sistema dependiente y consistente.
Rectas Paralelas.	No hay soluciones.	Sistema inconsistente.

Aprendamos algo nuevo

Método de Igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas.

Para dar solución al sistema de ecuaciones por este método es necesario seguir los siguientes pasos:

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Observemos cómo se soluciona paso a paso.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$

1. Despejamos, por ejemplo, la incógnita *x* de la primera y de la segunda ecuación:

$$3x - 4y = -6$$
$$3x - 4y + 4y = -6 + 4y$$
$$3x = -6 + 4y$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-6 + 4y}{3}$$
$$x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x + 4y = 16$$
$$2x + 4y - 4y = 16 - 4y$$
$$2x = 16 - 4y$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{16 - 4y}{2}$$
$$x = \frac{16 - 4y}{2}$$

2. Igualamos ambas expresiones: $\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 - 4y}{2}$

3. Resolvemos la ecuación:

$$2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y)$$
$$-12 + 8y = 48 - 12y$$
$$-12 + 12 + 8y = 48 - 12y + 12$$
$$8y = -12y + 60$$
$$8y + 12y = -12y + 12y + 60$$
$$20y = 60$$
$$\frac{20y}{20} = \frac{60}{20}$$
$$y = 3$$

4. Sustituimos el valor de *y*, en una de las dos expresiones en las que tenemos despejada la *x*:

$$x = \frac{-6 + 4(3)}{3} \qquad x = \frac{-6 + 12}{3} \qquad x = \frac{6}{3} \qquad x = 2$$

5. Soluciones del sistema de ecuaciones: $x = 2$ y $y = 3$

Método de Sustitución

Se basa en la tercera regla de los sistemas equivalentes. Es el método **indicado cuando** es fácil despejar una incógnita en la ecuación.

Para dar solución al sistema de ecuaciones por este método es necesario seguir los siguientes pasos:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Observemos como se soluciona paso a paso el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 1.)\ 3x - 4y = -6 \\ 2.)\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1. Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones, para esto escogemos la segunda ecuación para despejar la variable *x*.

En la ecuación 2 despejamos *x*:

$$2x + 4y = 16$$
$$2x = 16 - 4y$$
$$x = \frac{16 - 4y}{2}$$
$$x = 8 - 2y$$

Reemplazamos *x* en la ecuación número 1

$$3x - 4y = -6$$
$$3(8 - 2y) - 4y = -6$$
$$24 - 6y - 4y = -6$$
$$24 - 10y = -6$$
$$-10y = -6 - 24$$
$$-10y = -30$$
$$\frac{-10y}{-10} = \frac{-30}{-10}$$
$$y = 3$$

2. Sustituimos en la ecuación 1 la variable *x*, por el valor que se halló en la anterior, entonces:

$$3x - 4y = -6$$
$$3x - 4(3) = -6$$
$$3x - 12 = -6$$
$$3x = -6 + 12$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

3. La solución del sistema es $x = 2$ y $y = 3$

Método de Reducción (Eliminación)

Consiste en obtener una ecuación con una sola incógnita, haciendo operaciones con las dos ecuaciones dadas.

Es necesario amplificar convenientemente una de las dos, de modo que los coeficientes de algunas de las dos variables sean opuestos. Al sumar las ecuaciones transformadas, la variable se elimina y es posible despejar la otra.

Para dar solución al sistema de ecuaciones por este método es necesario seguir los siguientes pasos:

1. Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.
2. Las sumamos, y desaparece una de las incógnitas.
3. Se resuelve la ecuación resultante.
4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Observemos como se soluciona paso a paso el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1. Se igualan los coeficientes de una incógnita, para que los coeficientes en ella sean opuestos.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \xrightarrow{\text{multiplicar por } 2} \\ 2x + 4y = 16 \xrightarrow{\text{multiplicar por } (-3)} \end{cases} \begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$$

2. Se suman las dos ecuaciones y se despeja

$$\begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$$
$$\overline{ -20y = -60}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante y así obtendremos el valor de una incógnita.

$$-y = -\frac{60}{20} \text{ Simplificando } y = 3$$

Recuerda que debes multiplicar por -1 la expresión -y= -60/20

4. Reemplazamos el valor de la incógnita que encontramos en la ecuación más sencilla del sistema inicial y así obtendremos el valor de la otra incógnita.

$$2x + 4(3) = 16$$
$$2x + 12 = 16$$
$$2x = 16 - 12$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

5. La solución del sistema es: $x = 2$ y $y = 3$

Ejercitemos lo aprendido

Actividad 1

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales con un compañero, dibuja el sistema y concluye si es un sistema inconsistente, consistente o dependiente.

a. $\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 2y = 24 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$

Compara los resultados obtenidos con los de tus compañeros, observa los procedimientos utilizados y analiza si se presentaron procedimientos diferentes para la solución del ejercicio.

Actividad 2

Elabora un mapa conceptual en donde puedas establecer cuáles son los diferentes métodos de solución es un sistema de ecuaciones de 2 x 2 trabajados en la guía. Establece cuál es la importancia que tiene cada uno de los métodos de solución.

Actividad 3

Siguiendo los pasos anteriores resuelve los siguientes ejercicios por cualquiera de los métodos vistos anteriormente. (Igualación, sustitución, reducción)

1. $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 2y + 3 \\ y = x \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x + 2y = 0 \\ 3x - 5y = 17 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = 3x - 16 \\ x = y \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3p - 4q = 2 \\ -6p + 8q = -4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 3y = -1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 8x - 10y = -5 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = -2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

Guía 3

Problemas de planteamiento de sistemas lineales 2 X 2

Estándares

Pensamiento numérico

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y las relaciones y operaciones entre ellos.

Lo que sabemos

Hay gran variedad de problemas que podemos solucionar utilizando un sistema de ecuaciones lineales 2x2. El siguiente esquema, te ayudará indicando los pasos a seguir en la solución de un problema.

Cuatro fases para la solución de problemas

Comprensión:
Identificar los datos y las incógnitas.

Planteamiento:
Relacionar los datos con las incógnitas.

Resolución:
Obtener el valor numérico de las incógnitas.

Comprobación:
Verificar que la solución sea satisfactoria para el problema.

Aprendamos algo nuevo

Aplicación de los pasos para resolver un problema.

Resolver el problema mediante un sistema lineal de ecuaciones 2 X 2.

Ejercicio 1

Para ingresar al museo en Europa, Juana paga 12,2 euros por 3 entradas de adulto y 2 de niños. Carlos, por 5 de adulto y 4 de niños, paga 21,4 euros.

¿Cuál es el precio de una entrada de adulto y una de niño?

Primera fase. Comprensión. Hay que leer atentamente el enunciado. En este caso las incógnitas ya están indicadas en la pregunta:

x, precio de la entrada de adulto.

y, precio de la entrada de niño.

Segunda fase. Planteamiento. En esta fase vamos a plantear las ecuaciones con la información que nos presenta el enunciado.

3 entradas de adulto y 2 de niños cuestan $ 12,2

$$3x + 2y = 12{,}2$$

5 entradas de adulto y 4 de niños cuestan $ 21,4

$$5x + 4y = 21{,}4$$

Entonces la ecuación nos queda planteada de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12{,}2 \\ 5x + 4y = 21{,}4 \end{cases}$$

Tercera fase. Resolución. Ahora solucionamos el sistema utilizando uno de los métodos vistos, en este caso usemos el método de reducción.

$-6x - 4y = -24{,}4$ Multiplicamos la primera ecuación por -2

$5x + 4y = 21{,}4$ Escribimos la segunda ecuación y las sumamos

$-x \quad = -3$ $(-x = -3)$

$x = 3$

Ahora sustituimos $x = 3$ en la primera ecuación original obtenemos:

$$3x + 2y = 12{,}2$$
$$3(3) + 2y = 12{,}2$$
$$9 + 2y = 12{,}2$$
$$y = \frac{3{,}2}{2}$$
$$y = 1{,}6$$

Cuarta fase. Comprobación. Ahora vamos a verificar que el problema haya sido resuelto correctamente.

Para ingresar al museo, Juana paga \$ 12,2 euros por 3 entradas de adulto y 2 de niños. Carlos, por 5 de adulto y 4 de niño, paga 21,4 euros.

Por 3 entradas de adulto y dos de niños se paga \$12,2 euros

$$3(3) + 2(1{,}6) = 12{,}2$$

$$9 + 3{,}2 = 12{,}2$$

$$12{,}2 = 12{,}2$$

Respuesta: Las entradas cuestan \$ 3 euros (para adulto) y \$1,6 euros (para niño)

Ejercicio 2

Una compañía agrícola tiene una granja de 100 acres donde se produce zanahoria y yuca. Cada acre de yuca requiere 600 horas de mano de obra y cada acre de zanahoria 400 horas de mano de obra. Si se dispone de 45.000 horas y se van a utilizar todos los recursos humanos y terrenos, encuentra el número de acres de cada grupo que deben plantarse.

Solución: Para comenzar, debemos establecer cuáles serán las variables que vamos a utilizar:

x = número de acres de yuca

y = número de acres de zanahoria

Si analizamos en problema ahora con el número de horas de mano de obra requeridas para cada cosecha, podríamos expresarlo de la siguiente manera:

$600x$ = número de horas requeridas para la yuca

$400y$ = número de horas requeridas para la zanahoria

También sabemos que la cantidad total de acres es 100 y la cantidad de horas disponibles es 45.000. De acuerdo al planteamiento de los datos, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 600x + 400y = 45000 \end{cases}$$

Podemos utilizar el método de eliminación o reducción.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 600x + 400y = 45000 \end{cases}$$

Dividimos la segunda ecuación entre 100

$$\frac{6\cancel{00}x}{1\cancel{00}} + \frac{4\cancel{00}y}{1\cancel{00}} = \frac{450\cancel{00}}{1\cancel{00}} \longrightarrow 6x + 4y = 450$$

De esta manera tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases}$$

Ahora podemos multiplicar la primera ecuación por -6:

$x + y = 100$ se transforma en $-6x + (-6y) = -600$

Y obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -6x - 6y = -600 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases}$$

Por último sumamos la primera ecuación con la segunda.

$$-2y = -150$$

Resolvemos la segunda ecuación

$$-2y = -150$$

$$y = \frac{-150}{-2}$$

$$y = 75$$

Ahora sustituimos $y = 75$ en la primera ecuación del primer sistema $x + y = 100$, y obtenemos:

$$x + y = 100$$
$$x + 75 = 100$$
$$x = 100 - 75$$
$$x = 25$$

Es así como podemos decir que: la compañía debe plantar 25 acres de yuca y 75 de zanahoria.

Ejercitemos lo aprendido

Actividad 1

Construye con un compañero de clase, un problema real con los sistemas de ecuaciones lineales presentados y muestra los pasos para la solución del problema que plantearon.

a. $\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 2y = 24 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$

Compara los resultados obtenidos con los de tus compañeros, observa los procedimientos utilizados; analiza si se presentaron procedimientos diferentes para la solución del ejercicio.

Actividad 2

Elabora un mapa conceptual en donde puedas establecer cuáles son los pasos utilizados y donde se muestre el procedimiento del sistema de ecuaciones de 2 x 2 para el problema que crearon.

Actividad 3

Resuelve las siguientes situaciones problema aplicando las fases propuestas y después solucionando el sistema de ecuaciones 2 X 2 mediante uno de los métodos.

1. La suma de dos números es 150 y el mayor excede en 4 al menor ¿Cuáles son los números?

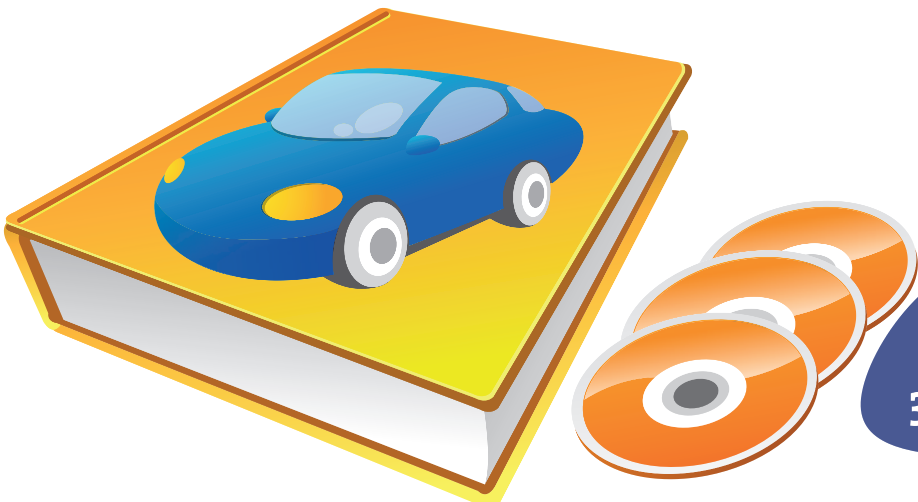
2. Las entradas de un teatro valen $5000 para adultos y $2000 para niños. Sabiendo que asistieron 280 personas y que la recaudación por concepto de entradas fue de $800.000, encuentra el número de niños y adultos que asistieron a la función.

3. En un garaje hay 84 vehículos entre carros y motos se sabe que hay en total 200 ruedas ¿Cuántos vehículos hay de cada tipo?

4. Una madre, para estimular a su hijo, le da $ 1 por cada ejercicio que haga bien, en cambio si el hijo hace mal el ejercicio él debe darle $0,50 por cada ejercicio que haga mal. Después de 20 ejercicios, el hijo lleva ganado $15,50 ¿Cuántos ejercicios ha hecho bien?

5. Un ganadero está preparando una mezcla de avena y harina de maíz para ganado. Cada onza de avena proporciona cuatro gramos de proteína y 18 g de carbohidratos y 1 onza de harina de maíz, 3 g de proteína y 24 g de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de avena y harina de maíz se requieren a fin de satisfacer las metas nutricionales de 200 g de proteína y 1,320 g de carbohidratos por ración?

6. Carlos acaba de comprar una cámara digital, una tarjeta de memoria de 120 megabytes y una tarjeta de memoria de 512 MB. La tarjeta de 512 MB puede almacenar cuatro veces más fotos que la tarjeta de 128 MB. Juntas, las dos tarjetas de memoria pueden almacenar 360 fotos. Determina cuántas fotos puede almacenar cada una de las cámaras.



Guía 4

Determinantes 2 X 2

Estándares

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Lo que sabemos

Hasta el momento hemos trabajo una forma de resolver sistemas de ecuaciones de 2 x 2 y es por medio de los métodos de igualación, sustitución y reducción, que nos han mostrado que la resolución por estos procedimientos, nos llevan a la misma solución del sistema.

Ahora te presentaremos otra forma de realizar la solución de los mismos sistemas de ecuaciones por medio de una regla llamada Regla de Cramer a partir de determinantes.

Aprendamos algo nuevo

Se define la función determinante de una matriz y se denota *det* A o |A|, a la función que corresponde a cada matriz A un número real. El determinante sólo está definido para matrices cuadradas.

Un determinante de una matriz de 2 x 2 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, se denota por $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y se evalúa como $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = |A|$

Observemos paso a paso cómo se soluciona un determinante 2 x 2 en un sistema de ecuaciones

Realicemos el ejercicio con una ecuación $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

La matriz se organiza de la siguiente manera:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (3 \cdot (-3)) - (4 \cdot 2)$$

$$= -9 -8$$

$$|A| = -17$$

Los determinantes los utilizamos para resolver ecuaciones lineales a partir de la **regla de Cramer.** Explicaremos a continuación cómo se trabaja esta regla.

Tenemos las ecuaciones:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Se puede utilizar las propiedades de la suma y la multiplicación para encontrar *x* y *y*, de esta manera tenemos que:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Puedes darte cuenta que los denominadores, es el determinante del sistema de ecuaciones.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Puedes observar también que los numeradores de *x* y *y* son diferentes. A continuación se encuentran dos determinantes, etiquetados con

$$|A|_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \quad |A|_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Utilizamos los determinantes $|A|, |A|_x, |A|_y$ en la regla de Cramer. La regla de Cramer puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

De forma general tenemos: $a_1x + b_1y = c_1$ y $a_2x + b_2y = c_2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{|A|_x}{|A|} \text{ y } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{|A|_y}{|A|} \text{ donde } |A| \neq 0$$

Para tener una idea más clara de cómo resolver el sistema de ecuaciones con la regla de Cramer, resolvamos un ejemplo.

$$3x + 5y = 7$$
$$4x - y = -6$$

Debemos tener en cuenta que las dos ecuaciones están de la forma $ax + by = c$, ahora debemos identificar a los términos del determinante:

$$a_1 = 3,\ b_1 = 5,\ c_1 = 7,\ a_2 = 4,\ b_2 = -1,\ c_2 = -6$$

Con estos términos podemos ahora hallar: $|A|, |A|_x, |A|_y$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 4(5) = -3 - 20 = -23$$

$$|A|_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - (-6)(5) = -7 + 30 = 23$$

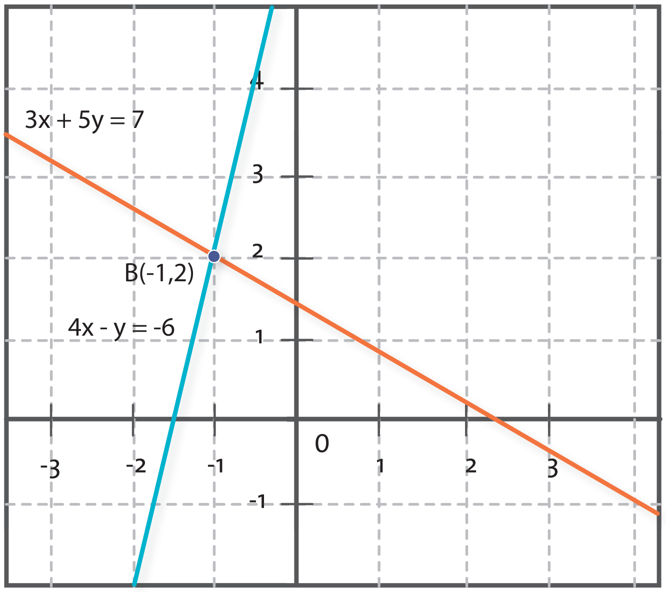
$$|A|_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 3(-6) - 4(7) = -18 - 28 = -46$$

Cuando tenemos los diferentes valores, podemos hallar x y y.

$$x = \frac{|A|_x}{|A|} = \frac{23}{-23} = -1 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{|A|_y}{|A|} = \frac{-46}{-23} = 2$$

De esta manera tenemos que $x = -1$ y $y = 2$. Si los puntos los analizamos desde el plano cartesiano, podemos decir que las dos ecuaciones se cruzan en el punto (-1,2) y este es la solución de la ecuación.

En la imagen se muestra el punto solución de las dos ecuaciones.



Actividad 1

Realiza la solución del sistema mostrando el paso a paso, organiza una estrategia por la cual le podrías explicar a tus compañeros de clase como resolviste el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 2x + - 5 = 10y \end{cases}$$

Actividad 2

Con tu compañero de trabaja, explica cuál de los procedimientos desarrollados hasta ahora consideras el más apropiado para resolver un sistema de ecuaciones de 2 x 2, ten en cuenta los diferentes procedimientos que se han trabajado hasta el momento.

Apliquemos lo aprendido

Actividad

Resuelve cada sistema de ecuaciones utilizando determinantes. Muestra a partir de la gráfica que los valores que se hallaron de acuerdo con x y con y, efectivamente forman la pareja ordenada donde se intersecan las rectas.

a. $\begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ 4x + 5y = 49 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 5x - 9y = -4 \\ 7y - 3x = 4 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - 6y = 3 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$ e. $\begin{cases} 7x - 8y = 2 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$ h. $\begin{cases} 2x + 7y = 3 \\ 3x - 5y = 51 \end{cases}$ i. $\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 2x + - 5 = 10y \end{cases}$

Evaluemos

¿Cómo me ven los demás?

Compara los procedimientos que utilizaste y los que utilizaron tus compañeros para elaborar los ejercicios anteriores. Escribe las deferencias y las ventajas de cada proceso.

¿Cómo me ve mi maestro?

Es el momento de reflexionar sobre los contenidos estudiados en este módulo. Para esto, comparte con tus compañeros y maestros en qué situaciones puede ser útil emplear los sistemas de ecuaciones de 2 x 2.

¿Qué aprendí?

A continuación se presenta una tabla la cual debes contestar de manera autónoma cada uno de los criterios y dar una justificación.

	Sí	No	A veces	Justificación
Identifico sistemas de ecuaciones lineales de 2 x 2				
Utilizo diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2 x 2				
Resuelvo problemas cotidianos que se pueden plantear a partir de sistemas de ecuaciones de 2 x 2				
Utilizo la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones de 2 x 2				
Trabajo activamente en grupo y respeto la opinión de mis compañeros.				
Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Aporto en las actividades de grupo.				
Soy tolerante con las diferencias de opinión cuando trabajo en grupo.				

Módulo 2

Sistema de ecuaciones lineales tres por tres

¿Qué vas a aprender?

Este módulo te brinda la oportunidad para que apliques los conocimientos en matemáticas que hasta ahora has aprendido, en diferentes contextos de tu vida cotidiana.

Aprenderás a resolver ecuaciones lineales de diferentes maneras y podrás aplicarlas para la solución de diferentes problemas que te presenta el texto.

Aprenderás también a resolver ejercicios con tres ecuaciones lineales y a utilizar diferentes métodos de solución, para poder aplicar estos métodos en la solución de problemas.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento numérico y sistemas numéricos

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y las relaciones y operaciones entre ellos.
- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en sus diversos contextos.

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

<table>
<tr><th>Guía</th><th>Concepto</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 5.
Determinantes de 3 x 3</td><td>Regla de cramer para sistema de tres variables.</td><td rowspan="2">El desarrollo de estos estándares permitirá fortalecer los siguientes procesos:

• La formulación, tratamiento y resolución de problemas: Por cuanto se presentan diversas situaciones que pueden ser resueltas mediante el desarrollo de sistemas de ecuaciones lineales.

• La modelación: Está relacionada con la capacidad del estudiante para poder plantear los problemas que se le presentan por medio de un sistema de ecuaciones lineales que le permitan dar la respuesta a la situación.

• La comunicación: Se invita al estudiante a interpretar enunciados, así como a proponer soluciones a ejercicios y aplicaciones relacionadas con sistemas de ecuaciones de 2 x 2 y de 3 x 3 y su aplicación para la solución de problemas.

• El razonamiento: El presente módulo se apoya constantemente en preguntas, las cuales trazan un derrotero, para deducir algunas relaciones que existen entre los sistemas de ecuaciones. Se muestra la regla de Cramer para la de solución de ecuaciones lineales de 3 por 3.

• La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos: A lo largo del desarrollo de los temas, al finalizar el desarrollo de cada tema y en las actividades evaluativas, se presentan ejercicios que ayudarán a ganar destreza en el planteamiento y solución de un sistema de ecuaciones de 2 x 2 o de 3 x 3.</td></tr>
<tr><td>Guía 6.
Racionalización</td><td>Propiedades de los radicales

Conjugado</td></tr>
</table>

¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Con la enseñanza de diferentes métodos algebraicos, nos adentraremos en la práctica que nos lleve a la resolución de sistemas con tres incógnitas. Se trata de buscar la manera más sencilla en el manejo de las ecuaciones y debemos tener en cuenta que una de las dificultades que más se presenta, radica en no olvidarnos de multiplicar un signo o escoger el método adecuado.

Aunque hay que conocer estos métodos, podemos utilizar la calculadora como herramienta de apoyo para solucionar los sistemas o para poder realizar las comprobaciones, bien sea de los ejercicios de las ecuaciones o de los problemas que se plantean.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En cada una de las guías encontrarás la sección *ejército lo aprendido*, con la cual podrás evaluar tu destreza en cuanto al trabajo que se realiza con el sistema de ecuaciones lineales y los diferentes métodos que se tienen para poder resolverlas, de esta manera se reforzara el desarrollo del contenido de cada guía.

También encontrarás al final del módulo, las secciones *Aplico lo aprendido* donde se proponen aplicaciones en las que combinarás tu habilidad manual y los conocimientos adquiridos y la sección *Evaluación*, en las que se proponen actividades individuales y grupales en las que tú, tus compañeros y el maestro podrán detectar los aspectos que debes reforzar con respecto a los números reales, sus propiedades y operaciones.

Exploración de Conocimientos

1. Resuelve la siguiente situación, utilizando todos tus conocimientos:

Dos ángulos son ángulos suplementarios, si la suma de sus medidas es 180º. Determine las medidas de dos ángulos suplementarios si la medida de un ángulo es 35º menos que dos veces la medida del otro.

a. ¿Qué procedimiento puedes plantear para resolver la situación?

b. ¿Se puede plantear una ecuación, para resolver la situación?

c. ¿Existen otras medidas de dos ángulos que cumplan con la condición dada? Justifica la respuesta.

Guía 5

Determinantes 3 x 3

Estándares

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Pensamiento numérico

- Resuelvo problemas y simplifico cálculo usando propiedades y relaciones de los números reales y las relaciones y operaciones entre ellos.

Lo que sabemos

Cuando vamos a evaluar determinantes de una matriz de 3 x 3, utilizamos un procedimiento muy parecido al anterior. Para poder seguir, vamos a incluir un nuevo término, *el determinante menor de* a_1, que podemos encontrar tachando los elementos del mismo renglón y la misma columna donde aparece el término a_1, los términos que quedan sin tachar, se les llama el determinante menor. Para encontrar los determinantes menores utilizamos el mismo proceso. Observemos de manera general como lo hacemos:

Tenemos el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Hallamos el menor de a_1

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2 \\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinante menor de a_1

Hallamos el menor de a_2

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & b_1 & c_1 \\ \cancel{a_2} & \cancel{b_2} & \cancel{c_2} \\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinante menor de a_2

Hallamos el menor de a_3

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{Determinante menor de } a_3$$

Cuando hallamos los determinantes menores, podemos evaluar el determinante de la primera columna, es decir el determinante de la columna donde está , de esta manera tenemos que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_1} - a_2 \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_2} + a_3 \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_3}$$

Aprendamos algo nuevo

Regla de Cramer para sistemas de tres variables.

Mostraremos de forma general como resolver un sistema de ecuaciones de 3 x 3 a partir de la regla, después mostraremos un ejemplo que los ilustrara mejor.

Si tenemos un sistema de ecuaciones de 3 x 3 como el siguiente:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Planteamos cada uno de los determinantes del sistema como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \; |A_x| = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \; |A_y| = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \; |A_z| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Y a partir de los determinantes, podemos establecer al valor de cada variable del sistema de ecuaciones:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|},\ y = \frac{|A_y|}{|A|},\ z = \frac{|A_z|}{|A|} \text{ y } |A| \neq 0$$

Ejemplo 1

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando determinantes.

Resolvamos $\begin{cases} x + 4y - 3z = -6 \\ 2x - 8y + 5z = 12 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$

Identificamos las constantes para poder armar la matriz de 3 x 3.

$$a_1 = 1\ b_1 = 4\ c_1 = -3\ d_1 = -6$$
$$a_2 = 2\ b_2 = -8\ c_2 = 5\ d_2 = 12$$
$$a_3 = 3\ b_3 = 4\ c_3 = -2\ d_3 = -3$$

Después de organizar las constantes, comenzaremos con el desarrollo de los determinantes menores del primer renglón para evaluar a $|A|$, $|A_x|$, $|A_y|$, $|A_z|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1[(-8)(-2)-(4)(5)] - 2[(4)(-2)-(4)(-3)] +3[(4)(5)-(-8)(-3)]$$

$$|A| = 1[16 - 20]-2[-8+ 12] + 3[20-24]$$

$$|A| = 1(-4)-2(4) +3(-4)$$

$$|A| = -4 - 8 -12$$

$$|A| = -24$$

Reemplazamos de acuerdo a $|A_x| = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ y desarrollamos

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -6 & 4 & -3 \\ 12 & -8 & 5 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} -12 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} -3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$$

$|A_x| = -6[(-8)(-2)-(4)(5)] - 12[(4)(-2)-(4)(-3)] -3[(4)(5)-(-8)(-3)]$

$|A_x| = -6[16 - 20]-2[-8+ 12] - 3[20 -24]$

$|A_x| = -6(-4) -12(4) -3(-4)$

$|A_x| = 24 - 48 +12$

$|A_x| = -12$

Reemplazamos de acuerdo a $|A_y| = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ y desarrollamos

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 2 & 12 & 5 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 12 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} +3 \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}$$

$|A_y| = 1[(12)(-2)-(-3)(5)] - 2[(-6)(-2)-(-3)(-3)] +3[(-6)(5)-(12)(-3)]$

$|A_y| = 1[-24 + 15] -2[12 -9] + 3[-30 + 36]$

$|A_y| = 1(-9) - 2(3) +3(6)$

$|A_y| = -9 - 6 +18$

$|A_y| = 3$

Por último, reemplazamos de acuerdo a $|A_z| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ y desarrollamos

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -8 & 12 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -8 & 12 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} +3\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -8 & 12 \end{vmatrix}$$

$|A_z| = 1[(-8)(-3)-(4)(12)] - 2[(4)(-3)-(4)(-6)] +3[(4)(12)-(-8)(-6)]$

$|A_z| = 1[24 - 48] -2[-12 + 24] + 3[48 - 48]$

$|A_z| = 1(-24) - 2(12) -3(0)$

$|A_z| = -24 - 24 +0$

$|A_z| = -48$

De esta manera tenemos que: $|A| = -24$, $|A_x| = -12$, $|A_y| = 3$, $|A_z|= -48$

Por lo tanto: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-12}{-24} = \dfrac{1}{2}$; $\quad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = -\dfrac{3}{24} = -\dfrac{1}{8}$; $\quad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = -\dfrac{-48}{-24} = 2$

La solución del sistema es: $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{8}, 2\right)$

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando determinantes.

Resolvamos $\begin{cases} 3x - 2y - z = -6 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \\ x - 4y + z = -3 \end{cases}$

Identificamos las constantes para poder armar la matriz de 3 x 3.

$$a_1 = 3 \ b_1 = -2 \ c_1 = -1 \ d_1 = -6$$
$$a_2 = 2 \ b_2 = 3 \ c_2 = -2 \ d_2 = 1$$
$$a_3 = 1 \ b_3 = -4 \ c_3 = 1 \ d_3 = -3$$

Después de organizar las constantes, comenzaremos con el desarrollo de los determinantes menores del primer renglón para evaluar a $|A|$, $|A_x|$, $|A_y|$, $|A_z|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$|A| = 3[(3)(1) - (-4)(-2)] - 2[(-2)(1) - (-4)(-1)] +1[(-2)(-2)-(3)(-1)]$

$|A| = 3[3 - 8] -2[-2 - 4] + 1[4 + 3]$

$|A| = 3(-5) -2(-6) +1(7)$

$|A| = -15 + 12 + 7$

$|A| = 4$

Reemplazamos de acuerdo a $|A_x| = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ y desarrollamos

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} +(-3) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$|A_x| = -6[(3)(1)-(-4)(-2)] - 1[(-2)(1) - (-4)(-1)] +(-3)[(-2)(-2)-(3)(-1)]$

$|A_x| = -6[3 - 8] -1[-2 - 4] - 3[4 + 3]$

$|A_x| = -6(-5) -1(-6) -3(-7)$

$|A_x| = 30 + 6 -21$

$|A_x| = 15$

Reemplazamos de acuerdo a $|A_y| = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ y desarrollamos

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$|A_y| = 3[(1)(1) - (-3)(-2)] - 2[(-6)(-1) - (-3)(-1)] + 1[(-6)(-2) - (1)(-1)]$

$|A_y| = 3[1 - 6] - 2[-6 - 3] + 1[12 + 1]$

$|A_y| = 3(-5) - 2(-9) + 1(13)$

$|A_y| = -15 + 18 + 13$

$|A_y| = 16$

Por último, reemplazamos de acuerdo a $|A_z| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ y desarrollamos

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$|A_z| = 3[(3)(-3) - (-4)(1)] - 2[(-2)(-3) - (-4)(-6)] + 1[(-2)(1) - (3)(-6)]$

$|A_z| = 3[-9 + 4] - 2[6 - 24] + 1[-2 + 18]$

$|A_z| = 3(-5) - 2(-18) + 1(16)$

$|A_z| = -15 + 36 + 16$

$|A_z| = 37$

De esta manera tenemos que: $|A| = 4$, $|A_x| = 15$, $|A_y| = 16$, $|A_z| = 37$

Por lo tanto: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{15}{4}$; $\quad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{16}{4} = 4$; $\quad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{37}{4}$

La solución del sistema es: $\left(\dfrac{15}{4}, 4, \dfrac{37}{4}\right)$

Ejercitemos lo aprendido

Actividad

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de determinantes

a. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = -5 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5p - 4q + 3r = 9 \\ 2p + q - 2r = 1 \\ 4p + 3q + 4r = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - 3y = 12 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$

Solución de problemas

Mediante el uso de sistema (2 x 2) y (3 x 3) plantea la solución a los siguientes problemas

1. Una persona invierte un total de $25.000 en tres fondos. El primero paga el 5% anual, el segundo el 4% y el tercero el 8%. Se sabe que invirtió en el segundo el doble que en el tercero. ¿Cuánto invirtió en cada uno si recibió $ 1.295 en intereses al final del año?

2. Una factura de $ 1.520 se ha pagado con billetes de $ 100, $50 y $ 10. El número de billetes de $100 es el doble que el de billetes de $ 50 y los de $ 10 son la sexta parte de los de $100 ¿Cuántos son los billetes de cada clase?

3. Dos números suman 48 y si se divide uno entre el otro da 3 de cociente y 4 de resto. Hálla los números

4. La suma de dos números es 12 y la diferencia es 4 ¿Cuáles son esos números?

5. Las edades de Eduardo y Mariana suman 43, las de Jorge y Mariana suman 46 y las de Jorge y Eduardo suman 47. ¿Qué edad tiene cada uno?

Guía 6

Racionalización

Estándares

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en sus diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Pensamiento variacional

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

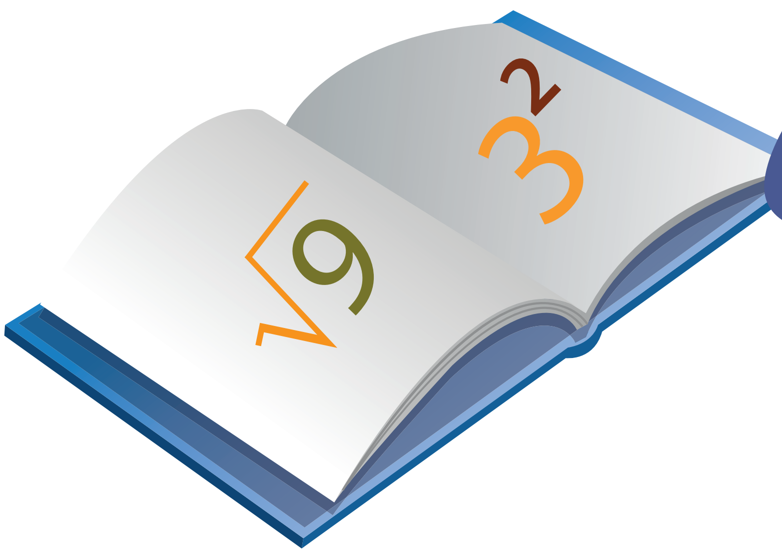
Lo que sabemos

La radicación: es la operación inversa de la potenciación en ella se pretende hallar la raíz de una cantidad, que elevada a una potencia, dé una cantidad llamada radicando.

Observemos el ejemplo

Hallar un número que elevado al cubo dé 64; x^3 que sería lo mismo decir, $\sqrt[3]{64} = x$

Por simple inspección, se entiende que el número que satisface la condición es el 4, puesto que $4^3 = 64$ o también $\sqrt[3]{64} = 4$



Aprendamos algo nuevo

Recordemos las propiedades de los radicales

1. Raíz de un producto

La raíz de un producto de factores es igual al producto de las raíces de los factores.

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; Con n distinto de cero (0).

Ejemplo

$$\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2^4} = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$$

El 3 elevado a la dos dentro de la raíz cuadrada puede simplificarse quedando 3
Se llega a igual resultado de la siguiente manera:

$$\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$$

2. Raíz de un cociente

La raíz de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador.

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ con b y n distintos de cero (0).

Ejemplo $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

Cuando esta propiedad se hace con números no hace falta pasar la raíz a potencia de exponente racional, aunque sí cuando se hace con variables.

$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^9}} = \frac{x^{\frac{3}{3}}}{y^{\frac{9}{3}}} = \frac{x}{y^3}$$

3. Raíz de una raíz

Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva el radicando.

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$ Con n y m distintos de cero (0).

Ejemplo $\sqrt[9]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[9\cdot 3]{5}$

4. Exponente de una raíz

Tenemos que: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo $(\sqrt[3]{4})^6 = \sqrt[3]{4^6} = 4^{\frac{6}{3}} 4^2$

5. Exponente

Tenemos que: $(\sqrt[m]{x})^n = \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$. Ejemplo $(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x$

Ahora que recordamos la radicación, podemos entrar a nuestro tema de racionalización

Racionalización de radicales

Cuando tenemos fracciones con radicales en el denominador conviene obtener fracciones equivalentes pero que no tengan radicales en el denominador. A este proceso es a lo que se llama racionalización de radicales de los denominadores.

Según el tipo de radical o la forma de la expresión que aparece en el denominador, el proceso es diferente.

Se pueden dar varios casos:

Si el denominador contiene un sólo término formado por una sola raíz cuadrada. En este caso basta multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada.

Mostraremos dos ejemplos, el primero lo haremos paso a paso, el segundo te lo dejaremos recuerda la aplicación detallada de las propiedades.

Ejemplo 1

Racionalizar el denominador: $= \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}}$	Descomponemos el denominador en factores primos
$= \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2}}$	Aplicamos la propiedad 1 para la radicación en el denominador
$= \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{2}{2}}}$	Aplicamos la propiedad 4 con $\sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$
$= \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$	Organizamos términos
$= \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$	Multiplicamos para racionalizar
$= \dfrac{2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$	Simplificamos términos
$= \dfrac{6\sqrt{3 \cdot 2}}{9\sqrt{2 \cdot 2}}$	Aplicamos la propiedad 1 con las raíces
$= \dfrac{6\sqrt{6}}{9\sqrt{4}}$	Hallamos $\sqrt{4}$
$= \dfrac{6\sqrt{6}}{9 \cdot 2}$	Operamos en el denominador
$= \dfrac{6\sqrt{6}}{18}$	Simplificamos por 6
$= \dfrac{\sqrt{6}}{3}$	

Ejemplo 2

Racionalizar el denominador de la fracción $= \frac{5}{\sqrt{2}}$, multiplicaremos numerador y denominador por $\sqrt{2}$. (Utilizaremos las propiedades de la radicación para poder racionalizar.)

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2 \bullet 2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2^{\frac{2}{2}}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 3

Racionalizar $\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}}$

$= \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}$ Aplicamos la propiedad 2

$$= \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} \bullet \frac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^2 y^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^{2+3}}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}}$$

En este caso para racionalizar debemos multiplicar por y^3 para que a aplicar las propiedades de potenciación en el denominador y quitar la raíz es así como tenemos que $y^2 \bullet y^3 = y^5$

$$= \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}}$$

$= \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{y^{\frac{5}{5}}}$ Aplicamos la propiedad 4

$$= \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$$

El ejemplo anterior es un caso especial para racionalizar los denominadores, se presenta a continuación una tabla que ilustra mejor estos casos para cuando $a > 0$

Factor en el denominador	Multiplicar numerador y denominador por	Factor resultante
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^{1+2}} = \sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a$
$\sqrt[7]{a^3}$	$\sqrt[7]{a^4}$	$\sqrt[7]{a^3} \cdot \sqrt[7]{a^4} = \sqrt[7]{a^{3+4}} = \sqrt[7]{a^7} = a^{\frac{7}{7}} = a$

Conjugado

Algunos cocientes que no son expresiones racionales contienen denominadores de la forma $a + \sqrt{b}$ o $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; si esto sucede, multiplicamos el numerador y el denominador por el **conjugado** que en su orden sería $a - \sqrt{b}$ o $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, pero en el caso que aparezca $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, entonces multiplicamos por $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ en el numerador y en el denominador. También debemos tener en cuenta que el conjugado de un binomio es un binomio que tiene los mismos dos términos, pero con el signo del segundo término contrario, la tabla nos mostrará algunos ejemplos:

Expresión	Conjugado
$5 + \sqrt{6}$	$5 - \sqrt{6}$
$3\sqrt{5} - \sqrt{x}$	$3\sqrt{5} + \sqrt{x}$
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$
$2xy - 6\sqrt[3]{5}$	$2xy + 6\sqrt[3]{5}$

Ejemplo 1

Racionalizar la expresión: $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ Multiplicamos por el conjugado

$= \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}$ Aplicamos la propiedad distributiva

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}}$ Aplicamos propiedad 4

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

Ejemplo 2

Racionalizar la expresión: $=\dfrac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}$

$=\dfrac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}\bullet\dfrac{x-\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}$ Multiplicamos por el conjugado

$=\dfrac{x-2x\sqrt{y}+y}{x^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}$ Aplicamos la propiedad distributiva

$=\dfrac{x-2x\sqrt{y}+y}{x^2-y}$

Ejercitemos lo aprendido

Actividad

Racionaliza las siguientes expresiones

a. $\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

c. $\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}$

d. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

e. $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

f. $\dfrac{4}{\sqrt{2}+1}$

g. $\dfrac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{8}}$

h. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

i. $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

j. $\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y}$

Apliquemos lo aprendido

Resuelve la siguiente racionalización y compara los resultados obtenidos con los de tus compañeros, observa los procedimientos utilizados y analiza si se presentaron procedimientos diferentes para la solución del ejercicio.

a. $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ b. $\dfrac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}$ c. $\dfrac{4\sqrt{2}-3}{\sqrt{8}}$

Evaluemos

¿Cómo me ven los demás?

Compara los procedimientos que utilizaste y los que utilizaron tus compañeros para elaborar los ejercicios anteriores. Escribe las deferencias y las ventajas de cada proceso.

¿Cómo me ve mi maestro?

Es el momento de reflexionar sobre los contenidos estudiados en este módulo. Para esto, realiza un cuadro donde muestres claramente

a. ¿Cuál es la diferencia entre trabajar sistemas de dos por dos y sistemas de tres por tres?

b. ¿Podemos utilizar el sistema de solución de igualación, reducción y sustitución con el sistema de 3 x 3?

c. ¿Podemos graficar las soluciones del sistema de 3 x 3?

d. ¿Cuál es la diferencia que hay entre racionalizar y utilizar el conjugado?

¿Qué aprendí?

A continuación se presenta una tabla la cual debes contestar de manera autónoma cada uno de los criterios y dar una justificación.

	Sí	No	A veces	Justificación
Identifico sistemas de ecuaciones lineales de 3 x 3				
Utilizo la regla se Cramer para resolver sistemas de ecuaciones de tres por tres.				
Resuelvo problemas cotidianos que se pueden plantear a partir de sistemas de ecuaciones de 2 x 2 y de 3 x 3				
Utilizo la racionalización para resolver ejercicios que requieran de su uso.				
Utilizo el conjugado para resolver ejercicios que requieran de su uso.				
Trabajo activamente en grupo y respeto la opinión de mis compañeros.				
Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Aporto en las actividades de grupo.				
Soy tolerante con las diferencias de opinión cuando trabajo en grupo.				

Módulo 3

Conociendo las funciones

¿Qué vas a aprender?

El desarrollo de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo te permitirá alcanzar estándares básicos de competencias que privilegian el desarrollo del pensamiento variacional, posibilitándote reconocer el papel de la función a través de algunos análisis gráficos y analíticos.

Incorporar las matemáticas en nuestra vida implica que analicemos en detalle cómo surgen una infinidad de fenómenos cotidianos y qué se espera de estos en el futuro. De esta manera, la humanidad ha encontrado en las funciones matemáticas la forma para describir comportamientos en situaciones asociadas a la tecnología, la ciencia, los deportes, la medicina, el estado del tiempo. Las podemos observar en las gráficas económicas cuando muestran los movimientos en el precio de las monedas de los países, la producción de los alimentos en diferentes épocas del año y su incremento o disminución de acuerdo a las temporadas de lluvias, o los electrocardiogramas y su relación con el funcionamiento del corazón.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Analizo, en representaciones gráficas cartesianas, los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

La siguiente tabla muestra los conceptos que se relacionan en cada una de las guías.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 7.
Representamos funciones</td><td>Funciones, (concepto de función, dominio, codominio, rango)

Representaciones: sagital, gráfica, parejas ordenadas, tabla y fórmula.</td><td rowspan="5">Se favorecen los procesos de:

• Modelación, al representar situaciones de variación mediante expresiones algebraicas, de esta manera el estudiante está en capacidad de reconocer hechos reales en los que se hace uso de las funciones.

• Comunicación, cuando se analizan representaciones en el plano cartesiano y el comportamiento de cambio de funciones lineales y cuadráticas. El estudiante está en capacidad de describir situaciones en las que se involucran funciones.

• Resolución de problemas, al enfrentar situaciones que involucran funciones lineales y cuadráticas. El estudiante está en capacidad de enfrentar situaciones problemáticas desde el manejo matemático de las funciones.</td></tr>
<tr><td>Guía 8.
Función lineal</td><td>Función lineal

Pendiente de una recta

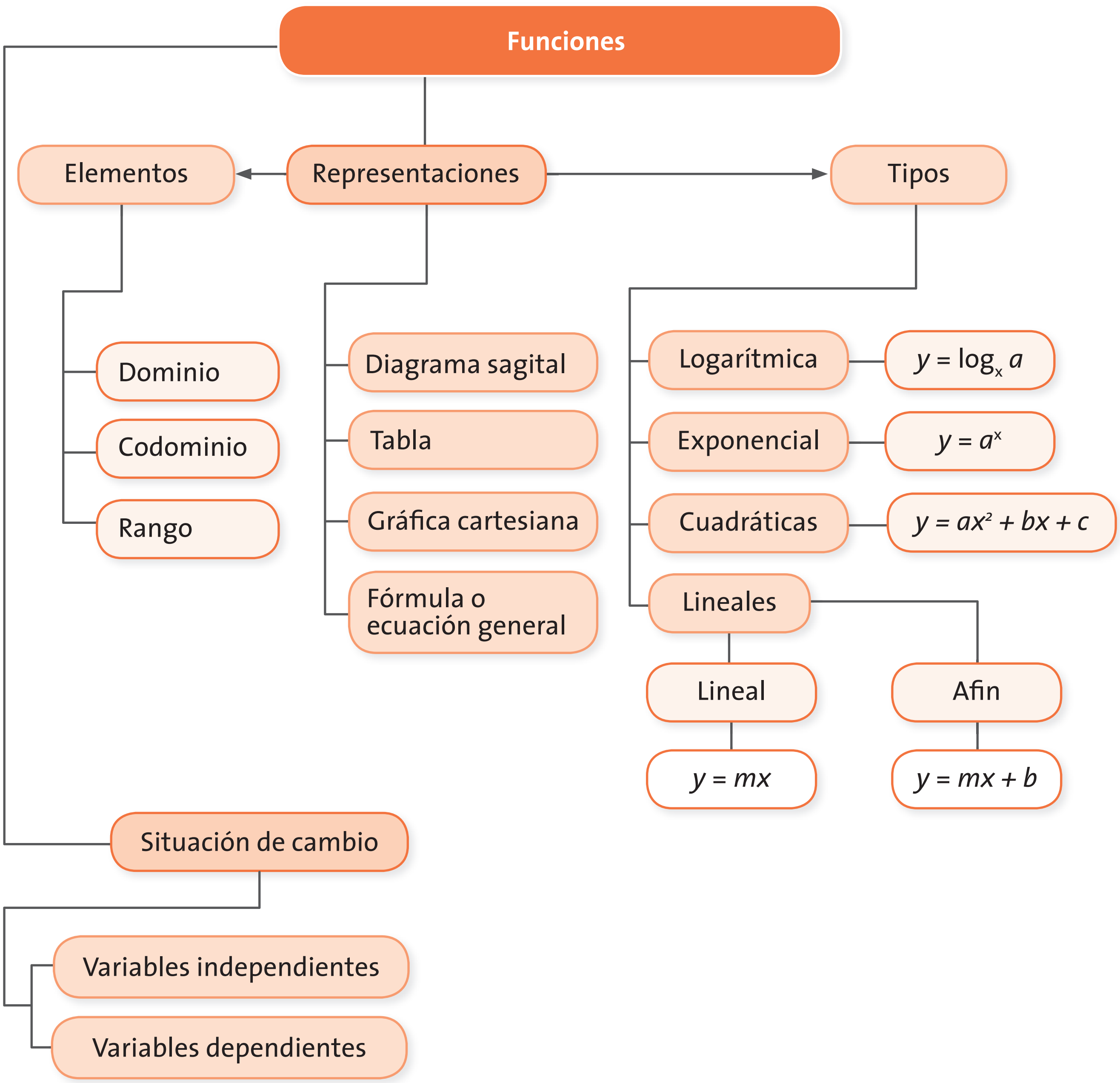
Representaciones: tabla, gráfica y ecuación o fórmula general</td></tr>
<tr><td>Guía 9.
Función cuadrática</td><td>Función cuadrática

Representaciones: tabla, gráfica y ecuación o fórmula general

Vértice y eje simetría</td></tr>
<tr><td>Guía 10.
Función Exponencial</td><td>Tabla y Gráfica de la Función exponencial</td></tr>
<tr><td>Guía 11.
Función Logarítmica</td><td>Logaritmos y sus propiedades

Tabla y gráfica de la función</td></tr>
</table>

El siguiente esquema te muestra la manera como se relacionan los conceptos que se trabajan en las guías del módulo.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Para analizar el crecimiento del bebé cuando todavía está en el vientre de la madre, controlar nuestro peso ideal conociendo nuestra estatura, ver el comportamiento de la industria algodonera en un plazo de tiempo establecido, o simplemente para ver los cambios de temperatura que se registran en algún lugar específico de nuestro país.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

Al finalizar este módulo encontrarás un momento en el que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evaluar los progresos en el establecimiento de relaciones al construir diferentes tipos de funciones.

Cada una de las cinco guías que componen este módulo contempla actividades de diverso nivel de complejidad que te permitirán reflexionar acerca de cómo vas y qué debes reforzar.

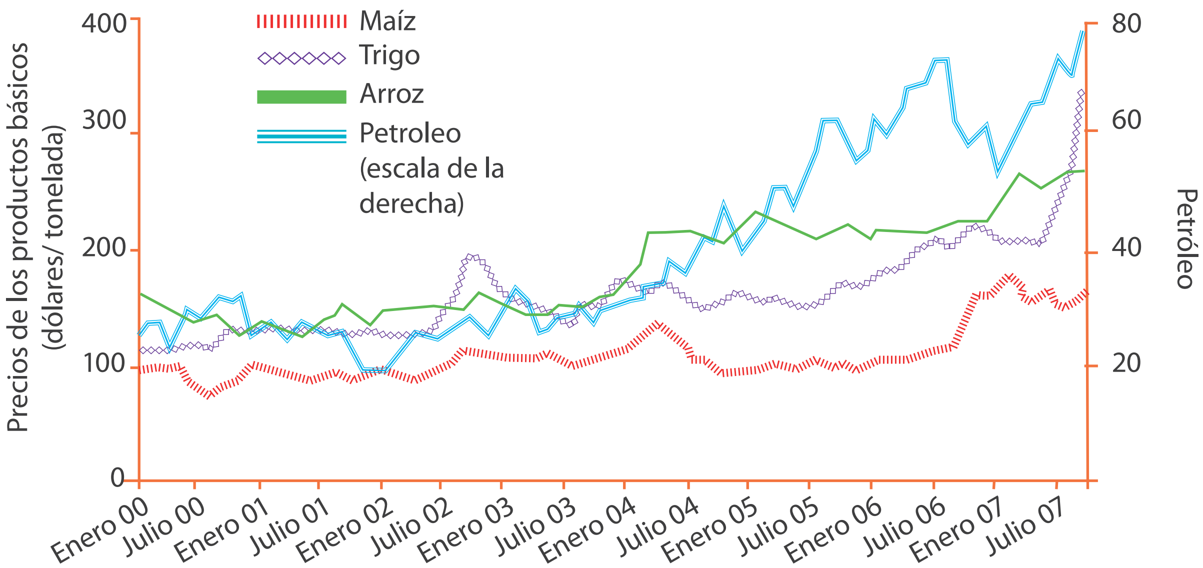
Al final del módulo encontrarás dos secciones: *Aplico lo aprendido* y *Evaluación*, en las que se proponen problemas, actividades de uso práctico y embrollos matemáticos que retarán tu capacidad y la de tus compañeros para dar respuesta a este tipo de enigmas.

Explora tus conocimientos

Según la organización de las Naciones Unidas, el alza en el precio de los alimentos ha alcanzado el mayor porcentaje de los últimos 20 años. La siguiente gráfica nos permite analizar la evolución de precios durante siete años, a partir del año 2000 de algunos productos básicos.

Precios de los productos básicos

Precios de los productos básicos (dólares/ tonelada), enero 2000-septiembre 2007



FUENTE: Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO).

1. ¿Cuál era el precio aproximado de una tonelada de trigo en enero del año 2000?
2. ¿Aumentó o disminuyó este precio un año después? ¿Cuánto aproximadamente?
3. Según la gráfica, ¿cuál era el producto de menor valor al comenzar el año 2000?
4. ¿Continuó siendo el producto de menor valor siete años después?
5. Del precio de estos cuatro productos, ¿cuál fue el que menos varió durante los siete años? Justifica tu respuesta.
6. ¿En qué meses se igualaron los precios del arroz y del trigo? ¿Cuáles fueron los precios aproximados cuando se igualaron dichos productos?
7. ¿Cuál fue el promedio del precio del petróleo durante los siete años?

Guía 7

Representamos funciones

Estándares:

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

En esta guía se abordarán las diferentes representaciones que se tienen para las funciones.

Lo que sabemos

Trabajo en grupo

Organícense en parejas y realicen las siguientes actividades.

Una de las bebidas más populares y reconocidas en todo el mundo es el café colombiano. Su exquisito aroma y buen sabor proporcionan diferentes sensaciones.

En la siguiente tabla se encuentra registrado el precio del café colombiano, en centavos de dólar por libra, durante el año 2009.

- Completen la tabla considerando el aumento del mes de enero como un **incremento estable** para el resto de meses del año 2010.

Incremento mensual de precios

Meses	enero	febrero	marzo	abril	mayo	junio	julio	agosto	sept.	oct.	nov.	dic.
Precio 2009	1,49	1,44	1,51	1,78	2,08	2,00	1,86	1,86	1,71	1,76	1,78	1,89
Precio 2010	2,06	4,12										

Fuente: DANE

1. ¿Cuál es la diferencia del precio del café al comenzar cada año?
2. ¿En qué mes del año 2010 se registra el precio más alto?
3. ¿Qué tanto aumentó o disminuyó el precio desde el comienzo hasta el final del año 2009?
4. ¿Cuál es el promedio del precio del café durante el año 2009?
5. ¿Y durante el año 2010?

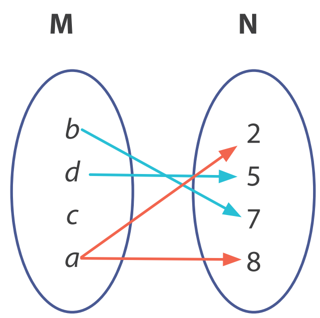
Aprendamos algo nuevo

Función

Antes de comenzar a trabajar las funciones, recordemos lo que es una relación:

Una relación es cualquier conjunto de parejas ordenadas.

Ejemplo



Entonces $\mathbb{R} = \{(b, 7), (d, 5), (a, 2), (a, 8)\}$

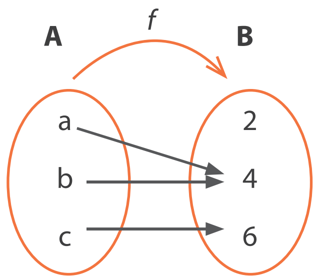
Existen relaciones especiales llamadas función, estas son una relación de correspondencia entre los conjuntos A y B, que asigna a cada elemento del conjunto A uno y solamente uno de los elementos del conjunto B. Los elementos de A se llaman preimagenes y los elementos del conjunto B se llaman imágenes. El conjunto de las preimagenes se le conoce con el nombre de Dominio y el conjunto de las imágenes, se le denomina Codominio, pero el subconjunto de los elementos de B, que tienen preimagenes en A, se les conoce con el nombre de Rango.

Las funciones se representan en matemáticas con las letras *f, g, h,* entre otras. De esa manera, para indicar la función *f* definida de *x* en *y*, escribimos *f(x)*:

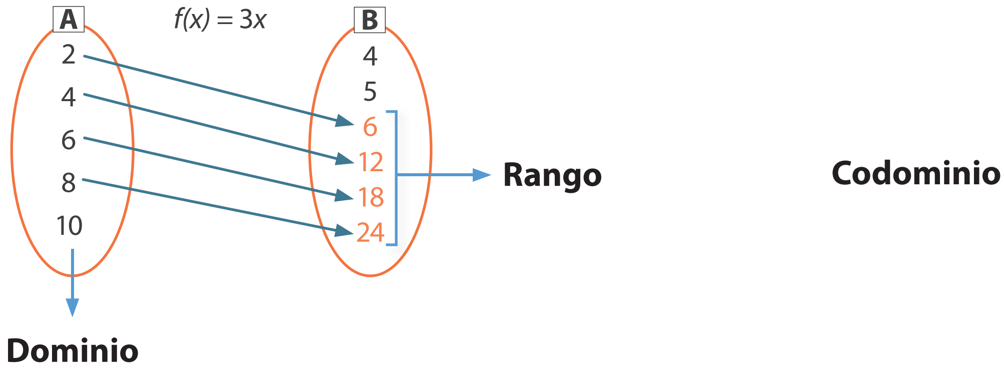
$$f : x \longrightarrow y$$

Así, se establecen dos conjuntos, uno que le corresponde a los valores de *x* que es llamado **dominio** y otro, de los posibles valores de y llamado **codominio**. Cuando sólo se toman los valores de *y*, este subconjunto es llamado **rango de la función**.

La correspondencia entre los elementos de los conjuntos A y B determinan una función, puesto que cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B.



Una función es un conjunto de parejas ordenadas en las que ninguna primera coordenada se repite.



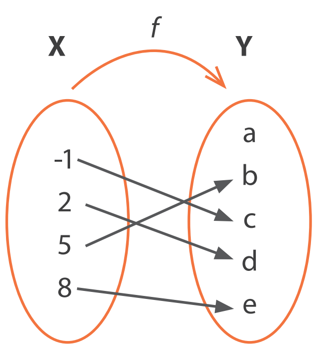
La relación que se establece en esta función es, "ser el triple de", puesto que a cada elemento que tomamos de *x* se le relaciona con su imagen en *y*, de la siguiente manera:

$$f(x) = 3x \rightarrow f(2) = 3(2) = 6$$

Es decir, sólo debemos tomar el valor que pertenece al Dominio y reemplazarlo teniendo en cuenta la expresión algebraica, y de esta forma obtenemos la imagen correspondiente.

Las funciones que trabajaremos en este módulo tendrán como dominio a $\mathbb{R}$, lo cual nos permitirá graficarlas, observemos cómo se obtendría la representación gráfica en el plano cartesiano de la función anterior.

Analicemos otra función que se representa como diagrama sagital.



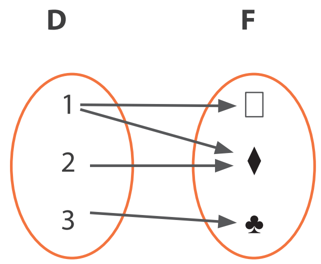
Dominio $f = \{-1, 2, 5, 8\}$

Codominio de $f = \{a, b, c, d, e\}$

Rango $f = \{b, c, d, e\}$

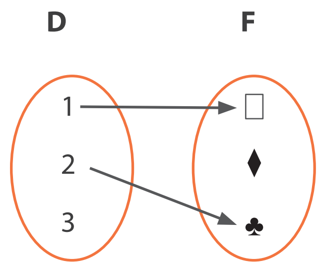
Estos son diagramas sagitales que muestran relaciones entre conjuntos.

- **Caso 1**: Cuando un elemento del dominio tiene dos imágenes a la vez ya no es función.



No es función porque el 2 tiene dos imágenes.

- **Caso 2:** Cuando uno de los elementos del dominio no tiene imagen, ya no es función.



No es función porque el 3 no tiene imagen.

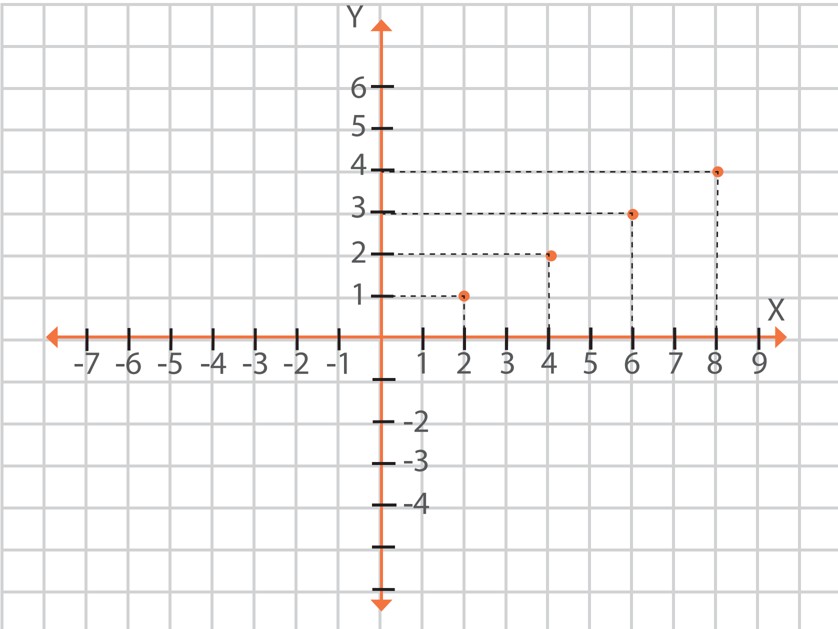
Otra forma de representar las funciones es elaborando una gráfica en el plano cartesiano.

El diagrama cartesiano de la función es la representación que asocia a cada elemento del dominio su respectiva imagen del codominio. Por ejemplo:

Dominio de $f = \{2, 4, 6, 8\}$

Rango de $f = \{1, 2, 3, 4\}$

Representación de una función en el plano cartesiano



Otra manera de representar una función es a través de una **tabla**. La tabla representa algunos valores del dominio con sus correspondientes imágenes del rango.

Por ejemplo. La función *f(x)* se representa en la tabla con los siguientes valores:

Representación de la función f(x)

Valores de x	2	4	6	8
Valores de y	1	2	3	4

Otra forma de representar la función es a través de expresiones algebraicas, esta forma es conocida como **fórmula**.

La correspondiente fórmula para obtener los valores de la tabla es:

$$y = \frac{x}{2}$$

Cuando $x = 2$, tenemos $y = \frac{2}{2} = 1$ que corresponde a la coordenada (2, 1).

Cuando $x = 4$, tenemos $y = \frac{4}{2} = 2$ que corresponde a la coordenada (4, 2).

Cuando $x = 6$, tenemos $y = \frac{6}{2} = 3$ que corresponde a la coordenada (6, 3).

Cuando $x = 8$, tenemos $y = \frac{8}{2} = 4$ que corresponde a la coordenada (8, 4).

- Verifiquen, con la fórmula, que pueden obtener el valor de *y* para los siguientes valores de *x*: 10,12,14, 1, 3 y 5.

Como hemos visto, las funciones pueden representarse mediante un diagrama sagital, un diagrama cartesiano, una tabla o una fórmula. En todas estas representaciones sobresale una regla que se establece entre dos conjuntos: uno, llamado **dominio** y otro llamado **rango**. En el caso del dominio dichos valores, como corresponden a una variable, reciben el nombre de **variable independiente** y en el caso del rango dichos valores, como corresponden a los que se obtienen a partir de los valores de la variable independiente, se llaman **variable dependiente .**

Graficar una función

Sea $f(x) = 3x$

Paso 1: Construyo la tabla con los valores correspondientes:

X	Y
-2	-6
2	6
4	12
6	18
8	24

$f(x) = 3x \rightarrow f(-2) = 3(-2) = -6$

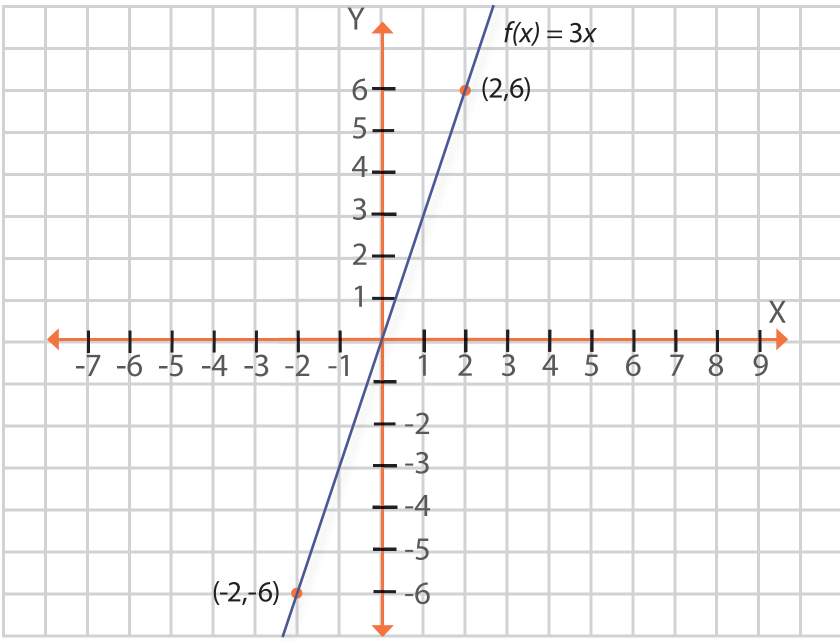
$f(x) = 3x \rightarrow f(2) = 3(2) = 6$

$f(x) = 3x \rightarrow f(4) = 3(4) = 12$

$f(x) = 3x \rightarrow f(6) = 3(6) = 18$

$f(x) = 3x \rightarrow f(8) = 3(8) = 24$

Paso 2: Ubico las parejas ordenadas en el plano cartesiano y trazo la línea que una los puntos



Paso 3: Ubico el dominio desde la gráfica, se obtiene que es igual a $\mathbb{R}$ y el codominio es $\mathbb{R}$, puesto a cada número real le puedo encontrar su respectiva imagen.

Actividad

1. Escribe la función que representa cada enunciado. Determina la variable independiente y la dependiente:

   a. El área de un triángulo es igual al producto de la base por la altura, dividido por dos.

   b. El perímetro de un cuadrado es cuatro veces el valor de su lado.

   c. El costo de un pasaje de servicio público, por persona, es de $1.700.

   d. El valor de y es tres cuartas partes de la variable *x*.

2. Completa la tabla teniendo en cuenta la siguiente expresión algebraica:

x	$f(x) = 2x^3 + 3x$
10	
0	
-2	
-9	
$\frac{3}{4}$	

x	$f(x) = 4x - 2$
-10	
0	
5	
-7	
$\frac{1}{2}$	

3. De acuerdo con la tabla a continuación, elige la opción que sea verdadera:

Articulo	Valor
Espagueti	18000
Carne asada	15000
Pechuga a la plancha	15000
Mojarra	21000
Cazuela de Mariscos	25000

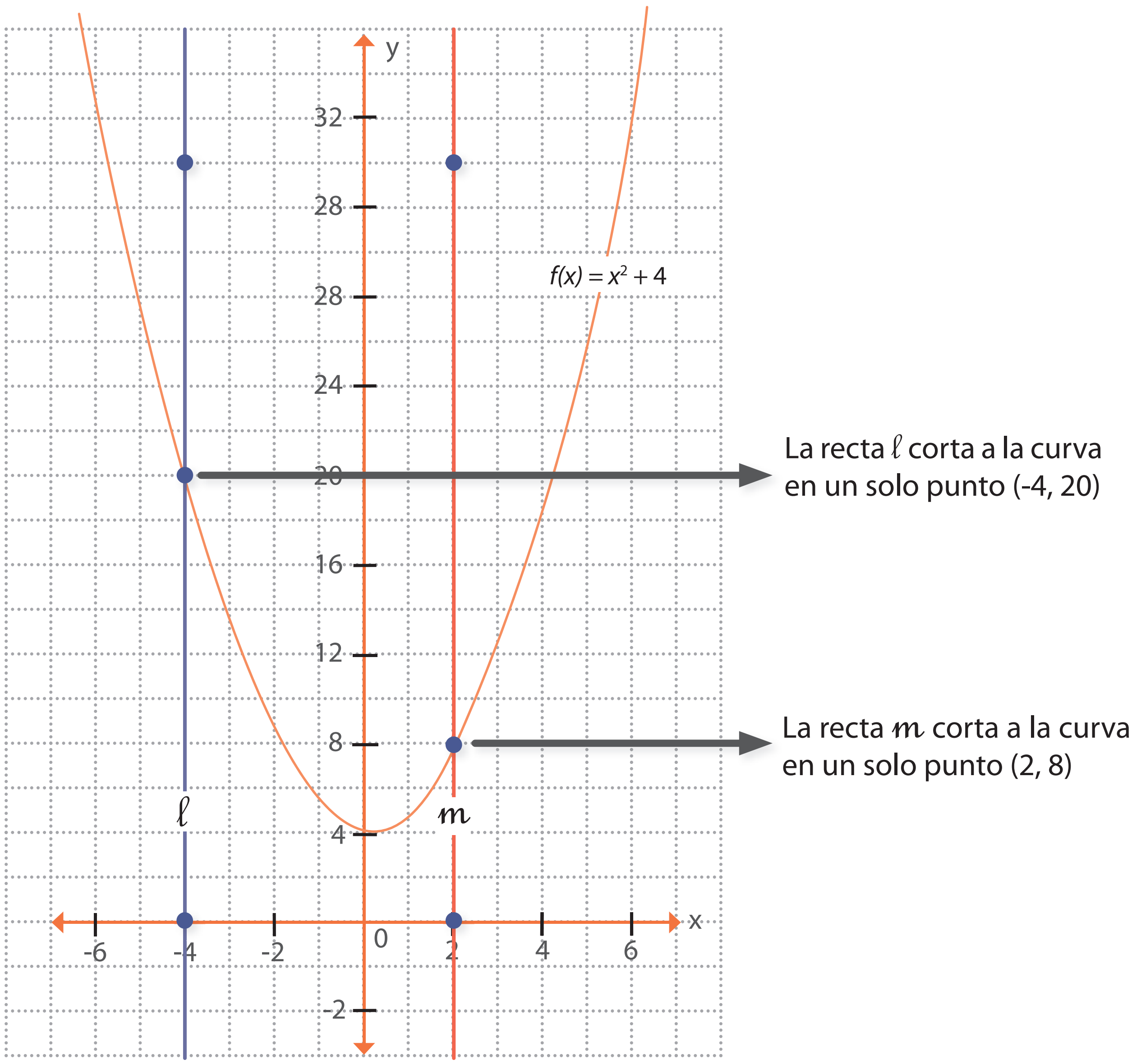
a. La tabla no representa una función, porque hay dos artículos con el mismo valor.

b. La tabla sí representa una función, porque a todo artículo le corresponde un precio.

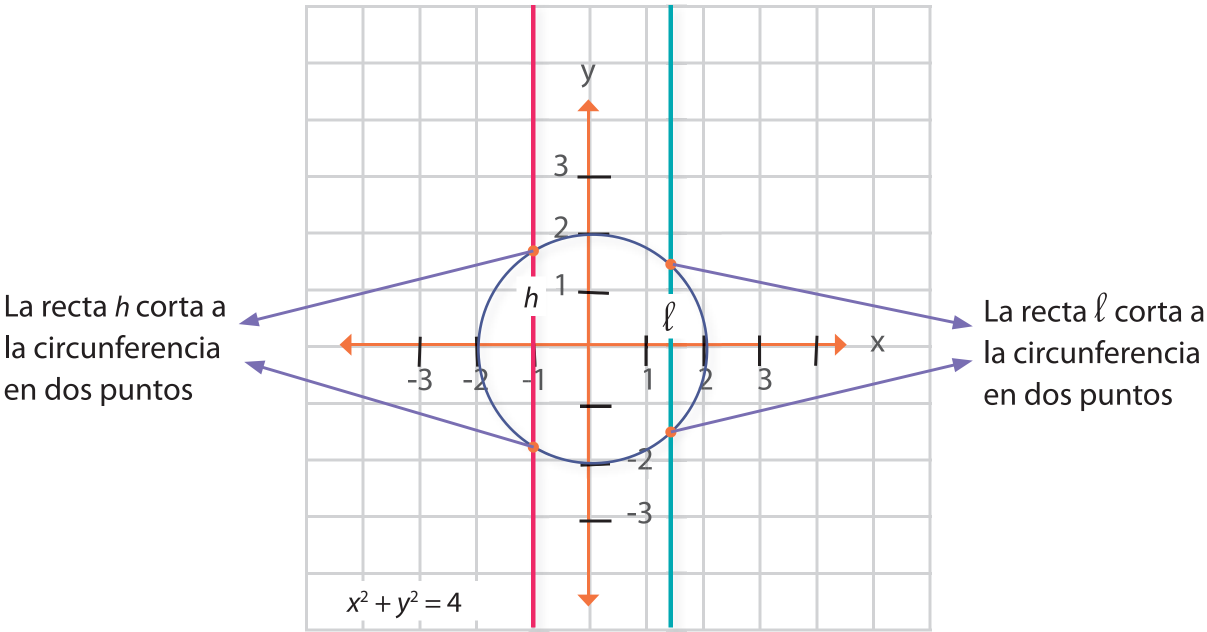
c. La tabla no representa una función, porque falta una regla de correspondencia.

d. La tabla sí representa una función, porque las preimagenes son los artículos.

Prueba de recta vertical: La gráfica representa una función, si al trazar una recta paralela al eje Y, esta sólo corta en un punto a la gráfica.

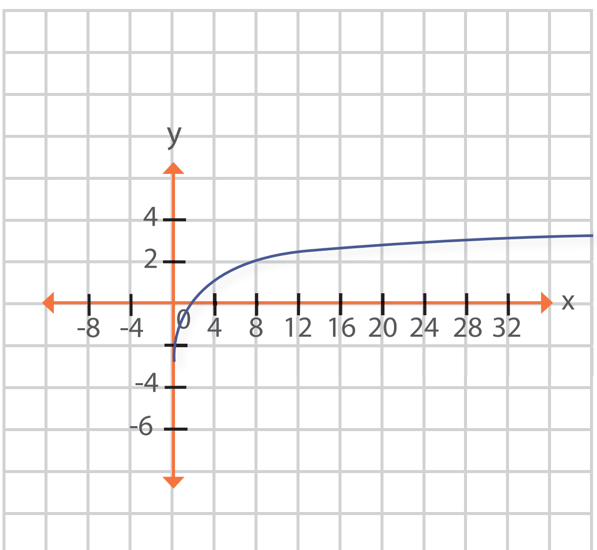


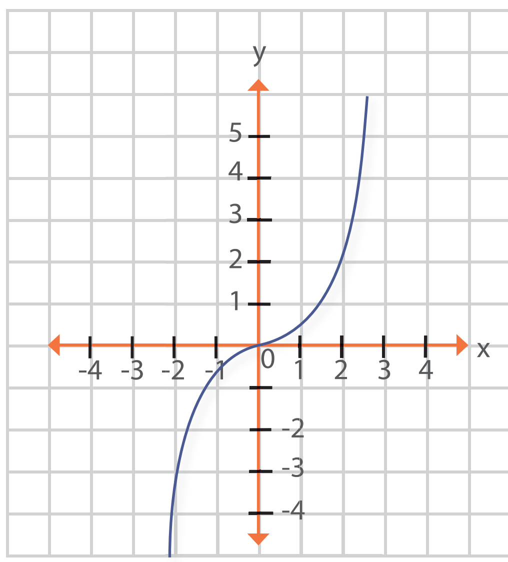
Observemos un caso en el que la gráfica, no representa una función, ya que existe más de un punto de corte.

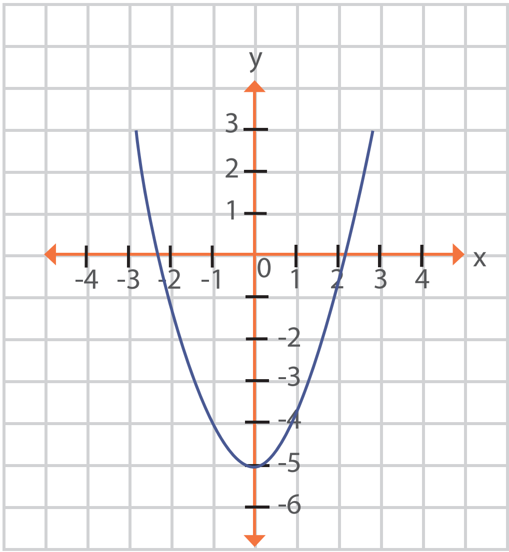


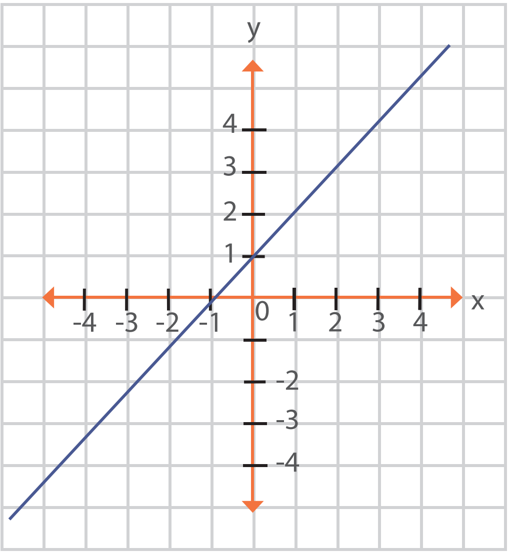
Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno

1. Determina cuáles de las siguientes gráficas representan funciones. Explica tu respuesta.

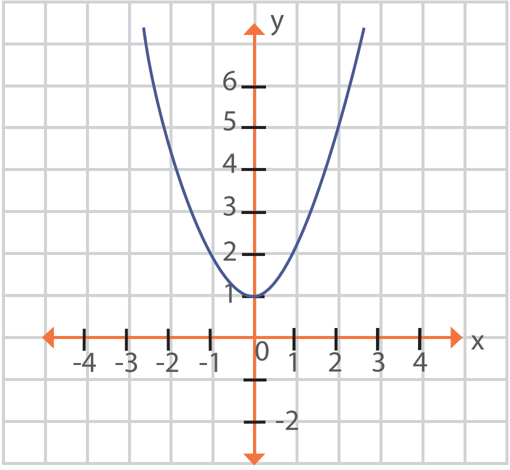








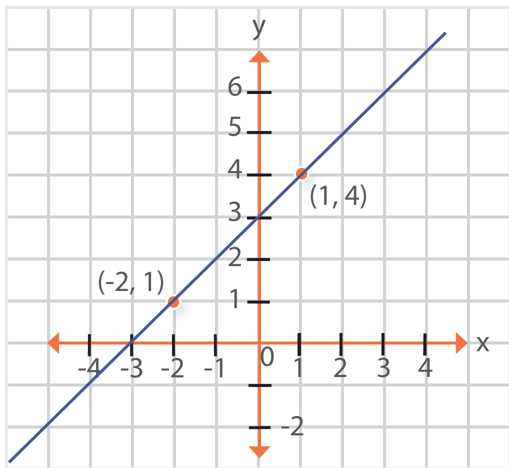
Utiliza la gráfica de la función *f* para hallar:



a. $f(-3)$ *b.* $f(4)$ *c.* $f\left(\frac{1}{2}\right)$ *d.* $f(-2)$ *e.* $f(0)$

Función creciente, decreciente y constante

Una función f es creciente sobre un intervalo l si, para cualquier valor de x y x^2 en l, donde $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, lo que implica que si nos movemos a la derecha, sobre la función, también nos estamos desplazando hacia arriba.



Revisemos si cumple con ser una función creciente:

$$P_1\ (-2,1)\ \text{ y } P_2\ (1,4)$$

Entonces si $f(x) = x + 3$ se tiene que:

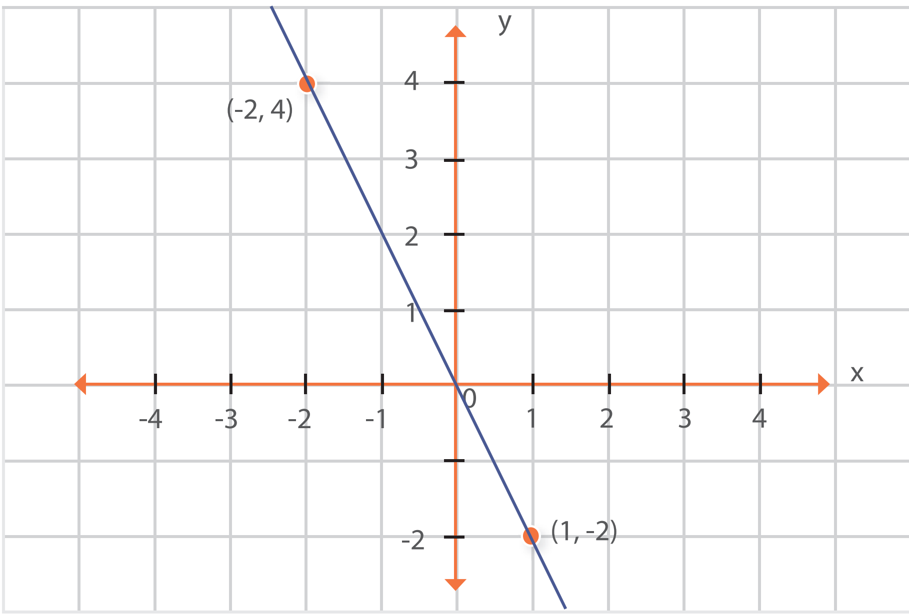
$$f(-2) = -2 + 3 = 1$$

$$f(1) = 1 + 3 = 4$$

Por lo anterior, como $-2 < 1$, entonces $f(-2) < f(1)$, y con el apoyo de la gráfica se infiere que f es creciente

Función decreciente

Una función f es **decreciente** sobre un intervalo l si, para cualquier x_1 y x_2 en l, donde $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$. Lo que nos permite afirmar que cuando nos movemos a la derecha también nos movemos hacia abajo.



Revisemos si cumple con ser una función creciente:

$$P_1(-2, 4) \text{ y } P_2(1, -2)$$

Entonces si $f(x) = -2x$ se tiene que:

$$f(-2) = -2(-2) = 4$$

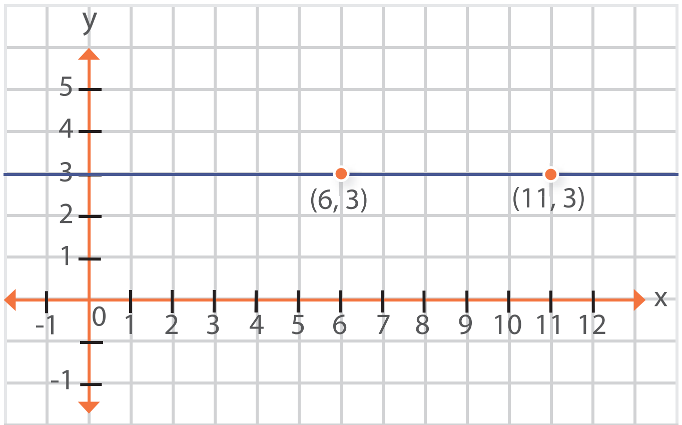
$$f(1) = -2(1) = -2$$

Por lo anterior,

como $-2 < 1$, entonces $f(-2) > f(1)$, y gracias a la gráfica, se infiere que f es decreciente

Función constante

Una función *f* es constante sobre un intervalo *I* si, para todo *x* en *I*, los valores *f*(*x*) son iguales.



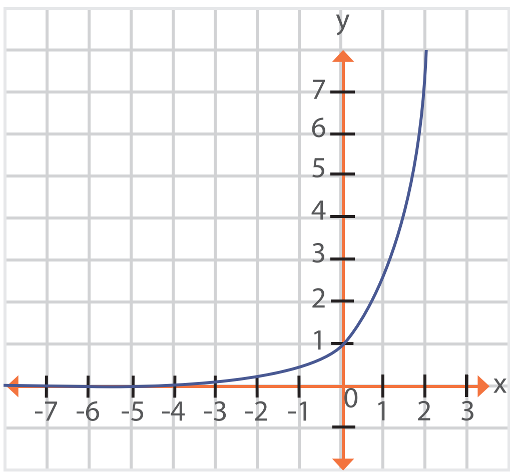
Es decir, cualquier valor que se le asigne a *x*, dará como resultado el mismo valor, en este caso el número 3. Lo que nos permite establecer que cuando nos desplazamos sobre la gráfica, estamos recorriendo una línea paralela al eje x.

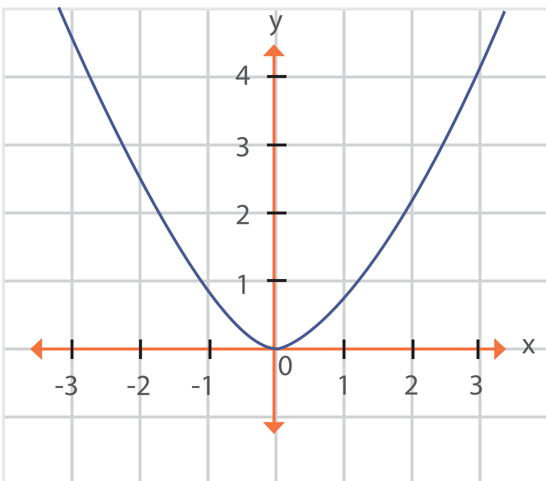
Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno

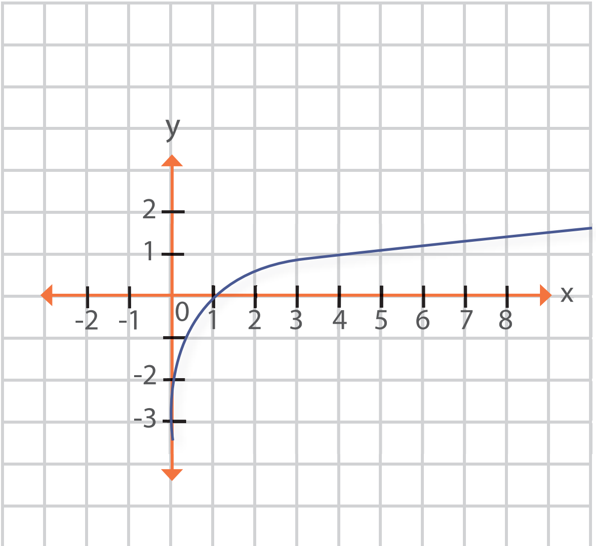
1. A partir de las siguientes gráficas, establece:

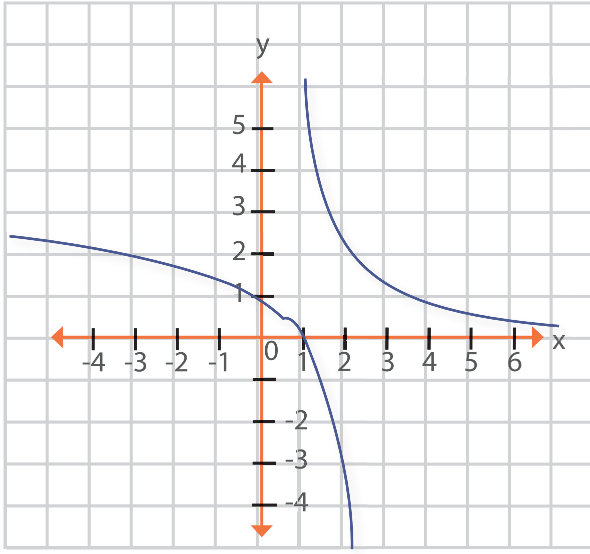
   a. Dominio y Rango

   b. Si es función creciente, decreciente o constante.



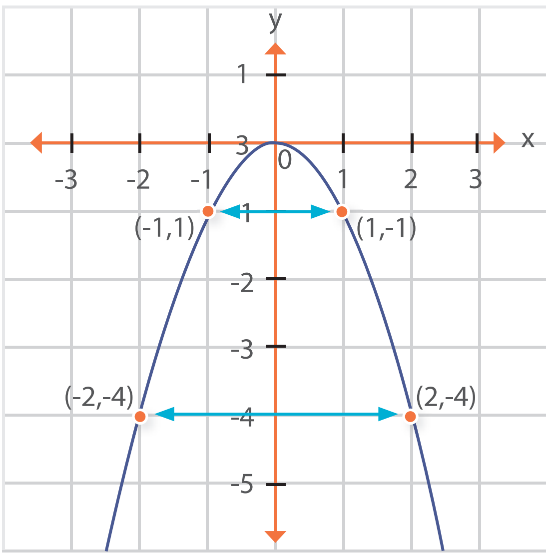






Función par

Una función *f* es par si para cualquier valor que tome *x*, se encuentra en el dominio -*x*, y además se cumple que $f(-x) = f(x)$.



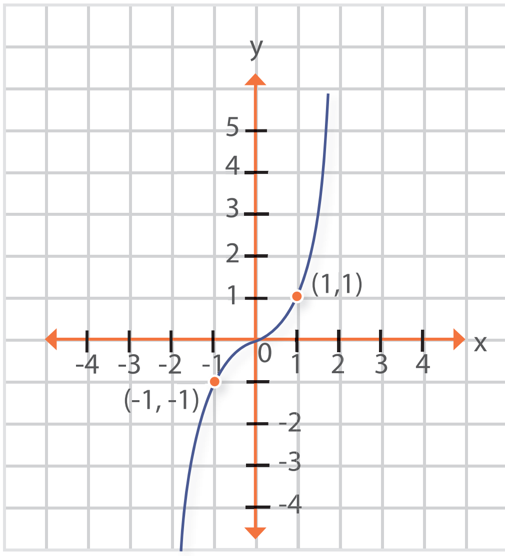
x	$y = f(x)$
1	-1
-1	-1
2	-4
-2	-4

Al observar la gráfica, podemos identificar que con la expresión: $f(x) = -x^2$, siempre se obtiene que el valor que se le asigna a *x* y a su opuesto da como imagen el mismo valor, lo que genera que el eje y es el eje de simetría de esta figura.

Una función es par, si su gráfica es simétrica respecto a el eje y.

Función impar

Una función f es impar, si para cualquier número x en su dominio, el número x está también en el dominio y. $f(-x) = -f(x)$.



Reemplazamos en $f(x) = x^3$, los siguientes valores:

$$x = -1 \textit{ entonces } f(x) = f(-1) = (-1)^3 = -1$$

Ahora tomamos

$$-x = -(-1) \textit{ entonces } f(-x) = f(-(-1)) = -(-1)^3 = -(-1) = 1$$

Al observar la gráfica, podemos identificar que con la expresión: $f(x) = x^3$, siempre se obtiene que el valor que se le asigna a x y a su opuesto da como imagen la misma cantidad pero con signo contrario, lo que genera que la simetría esté dada con respecto al punto (0,0).

Apliquemos lo aprendido

Determina para las siguientes funciones, si son pares o impares o ninguna de las dos:

a. $f(x) = 2x^3$

b. $f(x) = \sqrt[2]{x}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d. $f(x) = 2x^2 + 1$

e. $f(x) = x + 2$

Guía 8

Función lineal

Estándares:

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Analizo, en representaciones gráficas cartesianas, los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Lo que sabemos

Una función lineal es de la forma $y = mx + b$ donde m es conocida como la pendiente, esta se representa por un número real, ya que es una constante, y $b = 0$, puesto que, es el punto de corte con el eje y. La gráfica de la función lineal es una línea recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

Paso 1: Construimos la tabla de valores

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
-1	-2
-2	-4

$f(x) = 2x,$

$f(0) = 2(0) = 0$

$f(1) = 2(1) = 2$

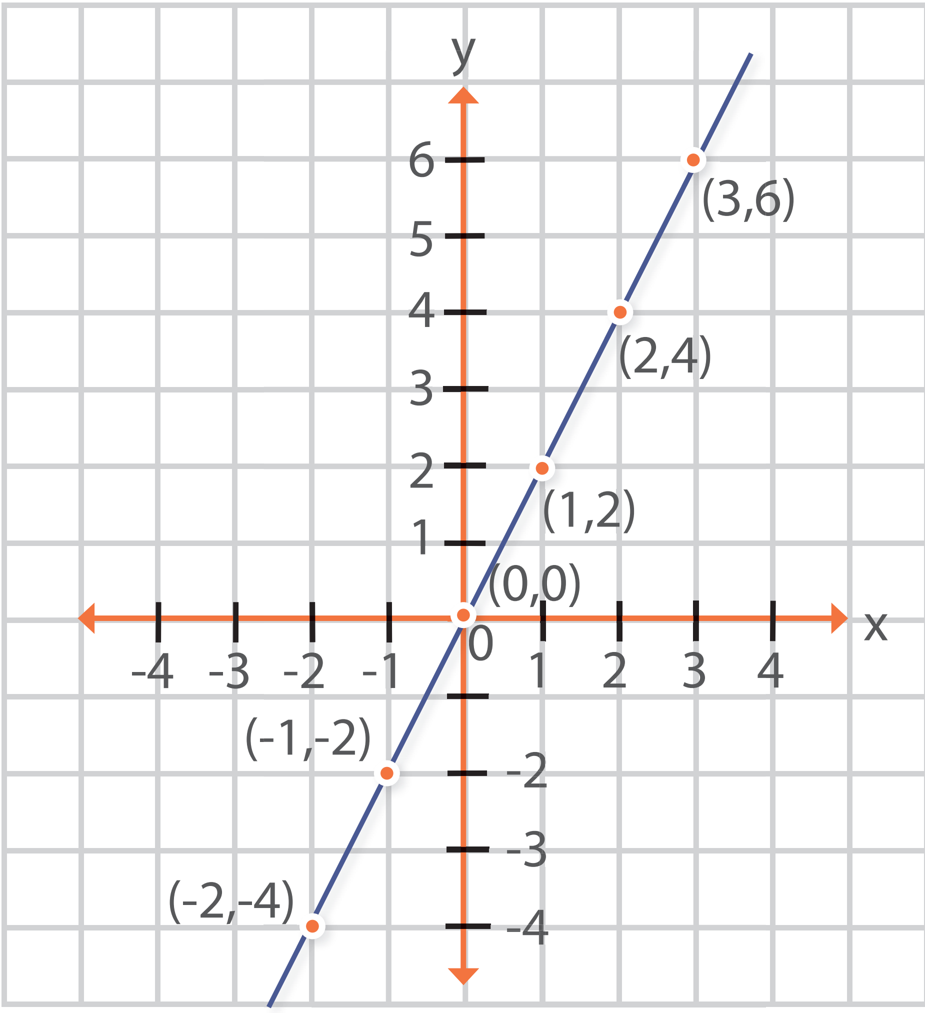
$f(2) = 2(2) = 4$

$f(3) = 2(3) = 6$

$f(-1) = 2(-1) = -2$

$f(-2) = 2(-2) = -4$

Paso 2: Grafiquemos la siguiente función $f(x) = 2x$



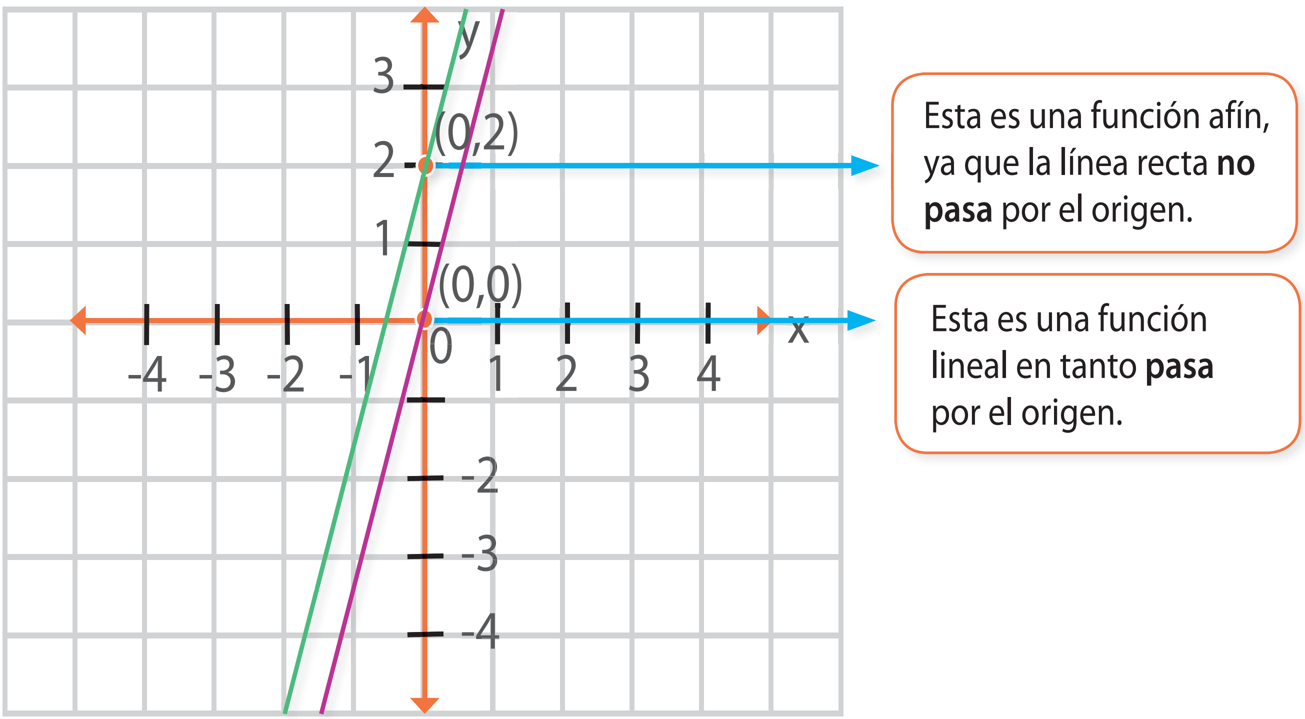
Para determinar la intercepción *y*, asigna el valor a *x* = o y despejas a *y*

Para determinar la intercepción *x*, asigna el valor a *y* = o y despejas a *x*

Aprendamos algo nuevo

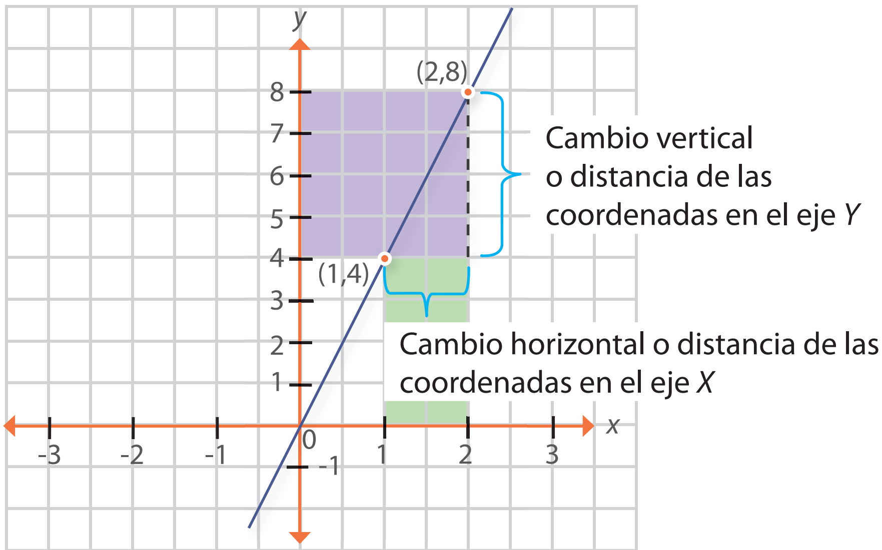
Función afin

Una función de la forma $y = mx + b$ se denomina función afín, ya que esta posee las mismas características de la función lineal, pero con la diferencia que $b \neq 0$ es decir que la línea recta corta al plano cartesiano en un punto distinto al origen.



¿Cómo hallamos la pendiente de una recta?

La pendiente de una recta es la comparación entre el cambio vertical (o elevación) al cambio horizontal (o desplazamiento) entre dos puntos cualesquiera de la recta. Es decir, hallaremos la distancia entre las coordenadas de x y las coordenadas de y.



Al observar la gráfica tenemos que la distancia entre las coordenadas del eje *Y*, son: 8-4 = 4, es decir, existe una distancia de 4 unidades, como lo muestra la zona violeta de la gráfica. Y la distancia de la gráfica en el eje *X*, sería: 2 -1 = 1; se observa en la zona verde la gráfica la unidad de distancia que existe entre estas dos coordenadas. Pero para hallar la pendiente de esta gráfica sólo falta establecer la razón de cambio, que se obtiene de la comparación de los resultados anteriores.

Es decir la pendiente es $\frac{4}{1} = 4$.

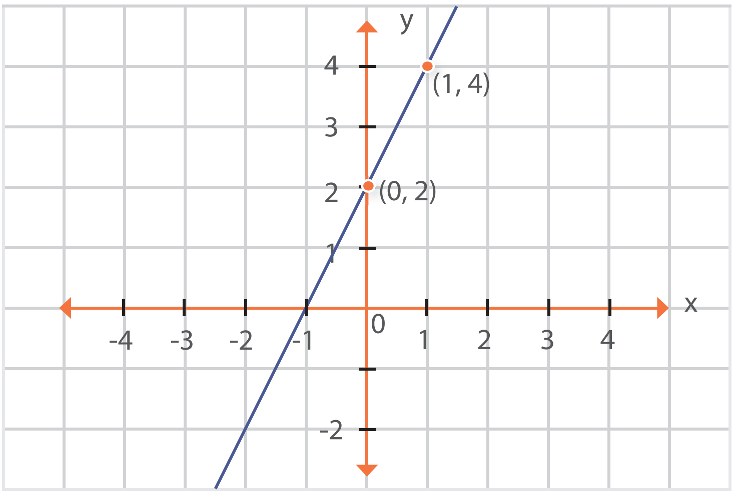
Para esto, utilizaremos la siguiente fórmula que establece estos cambios de forma sencilla:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ Teniendo en cuenta que } x_2 \neq x_1.$$

Existen tres tipos de pendientes, **pendiente positiva**, cuando la función se eleva de izquierda a derecha; **pendiente negativa**, cuando la función desciende de izquierda a derecha y la **pendiente cero**, es aquella que no presenta cambios, es decir no hay elevación ni descenso.

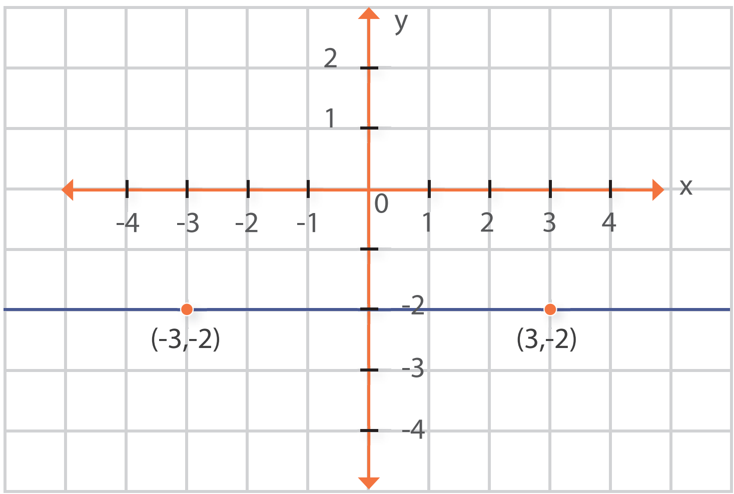
Hallemos en estos tres casos la pendiente, utilizando la fórmula anterior y graficando:

1. $f(x) = 2x + 2$



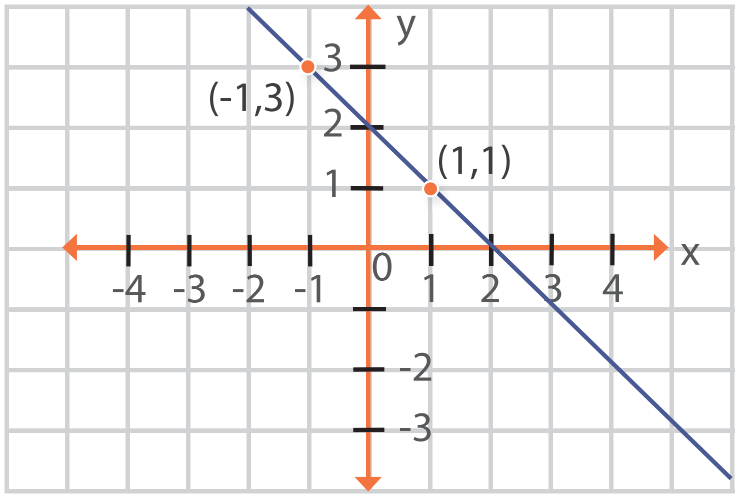
Desde la gráfica se observa que se eleva desde la izquierda hacia la derecha, entonces es una pendiente positiva y al aplicar la fórmula obtenemos $m = \frac{4 - 2}{1 - 0} = \frac{2}{1}$ por tanto corroboramos lo que nos expresa la gráfica.

2. $f(x) = -2$



A partir de la gráfica se establece que no hay cambios ni de elevación o de depresión, es decir se mantiene constante, es decir su pendiente es cero, pero para corroborar tal afirmación podemos aplicar la fórmula $m = \frac{-2 - (-2)}{-3 - 3} = \frac{0}{-6} = 0$.

3. $f(x) = -x + 2$



Desde la gráfica se observa como la línea recta presenta un descenso de izquierda a derecha, lo que genera que la pendiente negativa, ahora obtendremos el valor de esta pendiente:

$$m = \frac{3 - 1}{-1 - 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

Forma pendiente intercepción

La forma pendiente intercepción de una ecuación lineal

$$y = mx + b$$

Donde ***m*** es la pendiente de la recta y (**0**,***b***) es la intercepcion ***y*** de la recta

Determinar la pendiente y la intercepción de la ecuación lineal $-5x + 2y = 8$

Paso 1: Despeja a *y* en la ecuación

$$-4x + 2y = 10$$
$$2y = 10 + 4x$$
$$y = \frac{10 + 4x}{2}$$
$$y = \frac{10}{2} + \frac{4x}{2}$$
$$y = 5 + 2x$$

Paso 2: Identifica los términos de la expresión, es decir *m*, *y* (0, *b*)

$$m = 2 \text{ y la pareja } (0, b) \text{ es } (0, 5)$$

Punto pendiente de una ecuación lineal

Esta forma se utiliza cuando sólo tenemos como dato un punto y la pendiente y debemos establecer la ecuación lineal:

$$y = y_0 = m(x - x_0)$$

Donde *m* es la pendiente de la recta y (x_0, y_0) es un punto de la recta

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,5) y tiene pendiente -2.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ tomamos la ecuación dada}$$

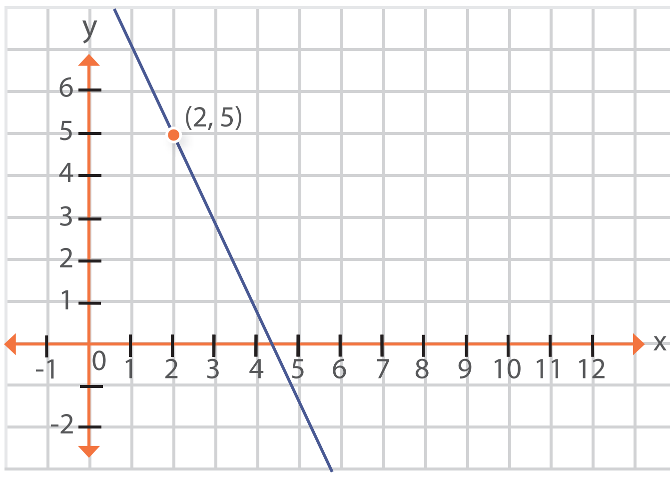
$$y - 5 = -2(x - 2) \text{ reemplazamos con los valores asignados}$$

$$y - 5 = -2x + 4 \text{ desarrollamos el paréntesis}$$

$$y - 5 = -2x + 4 \text{ despejamos y}$$

$$y = -2x + 9$$

Entonces tenemos que, la gráfica de $y = -2x + 9$, tiene una pendiente -2 y pasa por el punto (2,5), observemos:



Ejercitemos lo aprendido

Actividad 1

A partir de la función $f(x) = 3x + 1$, grafica y halla las pendientes de las tres formas trabajadas. Compara los resultados obtenidos con los de tus compañeros, observa los procedimientos utilizados y analiza si se presentaron procedimientos diferentes para la solución del ejercicio.

Actividad 2

Elabora un mapa conceptual en donde puedas establecer cuáles son los pasos que consideras importantes para la solución de un problema que se relacione con la pendiente.

Actividad 3

1. Halla la ecuación de la recta en los siguientes casos:

   a. $m = 3$ pasa por el punto (4,1)

   b. $m = 5$ pasa por el punto (1,2)

   c. $m = -2$ pasa por el punto (3,7)

   d. $m = -4$ pasa por el punto (-1 -2)

2. Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados:

   a. (3,5) y (0,11)

   b. (-3,7) y (7,-3)

   c. (4,2) y (4, -6)

   d. (2,8) y (-5,8)

3. Establece si la pendiente es positiva, negativa o cero, según cada caso, grafica:

   a. $f(x) = 2x - 1$

   b. $f(x) = 3x + 1$

   d. $f(x) = -2x - 1$

   e. $f(x) = 3x - 1$

   f. $f(x) = -2x + 1$

Guía 9

Función cuadrática

Estándares:

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Analizo, en representaciones gráficas cartesianas, los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Lo que sabemos

Función cuadrática

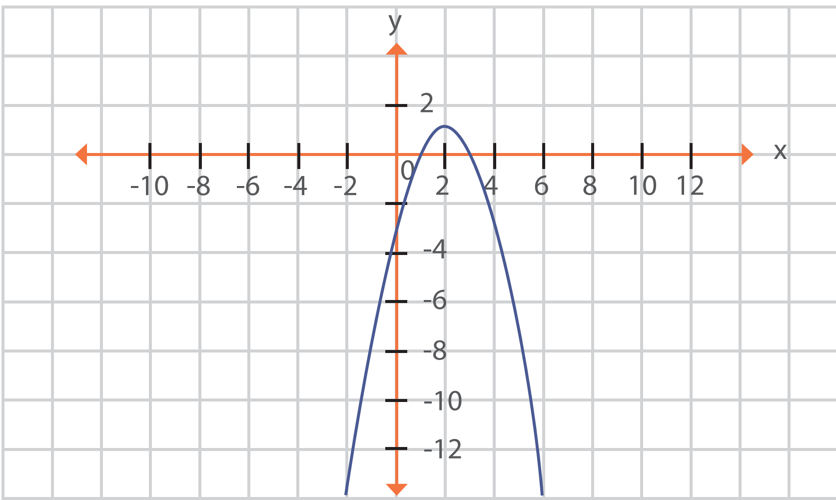
Una función cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde *a, b* y *c* son números reales cualesquiera y *a* distinto de cero.

Si representamos "todos" los puntos $(x,f(x))$ de una función cuadrática, obtenemos siempre una curva llamada parábola.

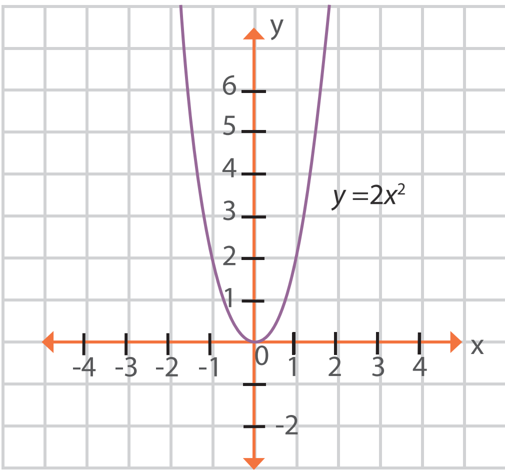
Observemos el ejemplo si tenemos $f(x) = - x^2 + 4x - 3$

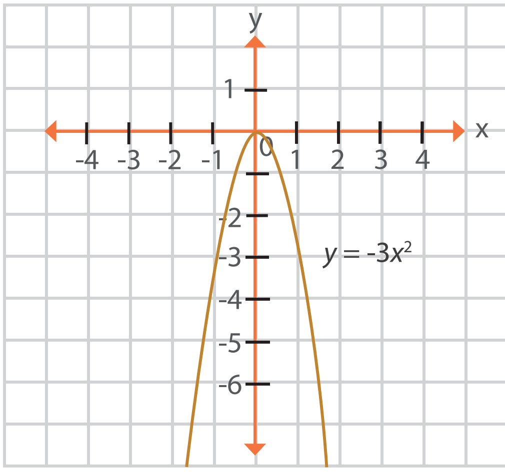


Toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, representa una parábola tal que:

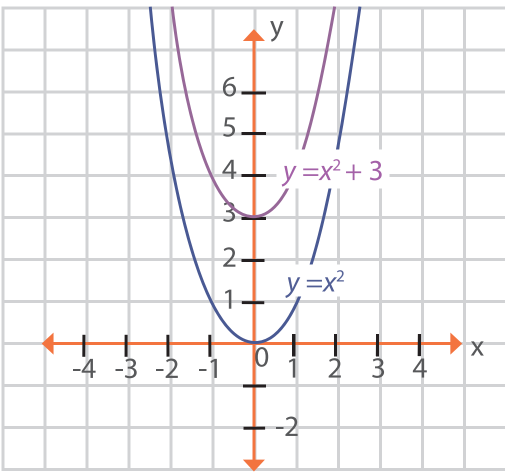
Su forma depende exclusivamente del coeficiente a de x^2 (hacia arriba o hacia abajo)

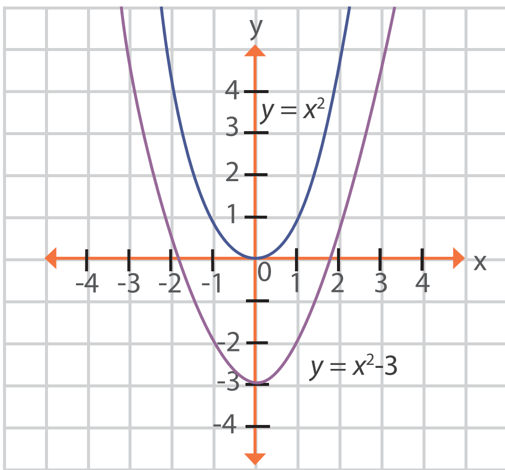
Si $a > 0$, las ramas van hacia arriba y si $a < 0$, hacia abajo. Cuanto más grande sea el valor absoluto de *a*, más cerrada es la parábola.





El coeficiente c traslada la parábola arriba o abajo. Observa:





Mientras que el coeficiente *b*, traslada a la derecha o a la izquierda el punto más alto o más bajo de la gráfica (llamado vértice).

Aprendamos algo nuevo

Observemos cómo se grafica la siguiente función, paso a paso.

$$f(x)= -x^2 + 2x$$

Lo primero que hacemos es identificar nuestros valores de *a, b* y *c* que en este caso serían

$a = -1$ ¿cómo se identifica *a*?, es el coeficiente que está acompañando nuestra x^2.

$b = 2$ ¿cómo se identifica *b*?, es el coeficiente que está acompañando nuestra *x*.

$c = 0$ ¿cómo se identifica *c*?, es el coeficiente independiente o término independiente, como en este caso no hay, el número sería 0.

Hallemos el vértice, V= (h, k)

Vamos a hallar el valor de *h* y para esto se debe reemplazar los valores en la siguiente fórmula $\frac{-b}{2a}$

$$h= \frac{-b}{2a}$$

$$h= \frac{-(2)}{2(-1)}$$

$$h= \frac{-2}{-2}$$

$$h=1$$

Vamos a hallar el valor de *k* y para esto se debe reemplazar los valores y para ellos lo podemos hacer de varias formas, una es reemplazar el valor de h en la función original y otra es usando la fórmula:

$$\frac{4ac - b^2}{4a}$$

Reemplazando en la función original

$f(x) = -x^2 + 2x$

$f(x) = -(1^2) + 2\,(1)$

$f(x) = -(1) + 2$

$f(1) = 1$

Por lo tanto $k = 1$

Y con la fórmula sería

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$k = \frac{4(-1)(0)-(2^2)}{4(-1)}$$

$$k = \frac{0 - (2^2)}{4(-1)}$$

$$k = \frac{-4}{-4}$$

$k = 1$

Como ya tenemos los dos valores, entonces ya tenemos el vértice V= (h, k) **V= (1, 1)**

Por último encontremos los puntos de corte y para esto tomamos la función, la igualamos a cero y resolvemos la ecuación cuadrática, observemos

Corte con el eje X

$f(x) = -x^2 + 2x$

$f(x) = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4 - 1 \cdot 0}}{2 \cdot (-1)}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 0}}{-2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4}}{-2}$$

$$\frac{-2 \pm 2}{-2}$$

$$X_1 = \frac{-2+2}{-2}$$

$$X_1 = \frac{0}{-2}$$

$X_1 = 0$ Nuestra pareja ordenada seria (0, 0)

$$X_2 = \frac{-2-2}{-2}$$

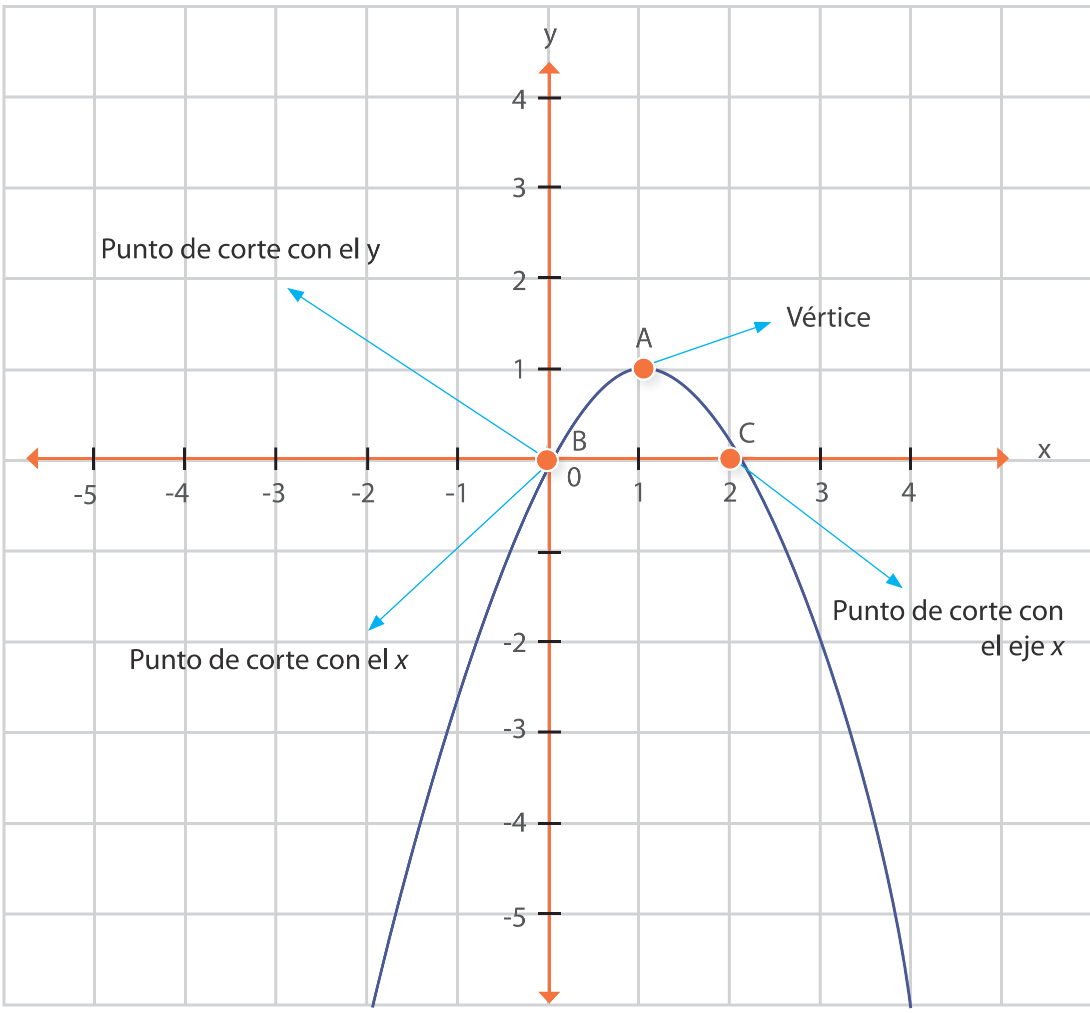
$$X_2 = \frac{-4}{-2}$$

$X_2 = 2$ Nuestra pareja ordenada seria (2, 0)

Corte con el eje Y

En el eje de ordenadas la primera coordenada es cero y la segunda es c, por lo tanto nuestra pareja ordena sería (0,0)

Por último graficamos



Grafiquemos la ecuación $y = x^2 + 5x + 6$

a. Determinamos si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo

b. Encontramos la intersección del eje y

c. Hallamos el vértice

d. Hallamos las intersecciones del eje x, si las hay

e. Trazamos la gráfica

Solución

a. Como *x es igual a* 1, entonces la parábola abre hacia arriba

b. Para determinar la intersección con el eje y, igualamos x a 0 y despejamos y.

$y = (0)^2 + 5(0) + 6 = 6$

La intersección del eje y se da en el punto (0, 6).

c. Determinamos las coordenadas x, y; para hallar el vértice:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2(1)} = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(6)-(5)^2}{4(1)} = \frac{24 - 25}{4} = -\frac{1}{4}$$

El vértice es $\frac{5}{2}\ -\frac{1}{4}$

d. Para determinar las intersecciones con el eje x, hacemos $y = 0$

$$0 = x^2 + 5x + 6$$

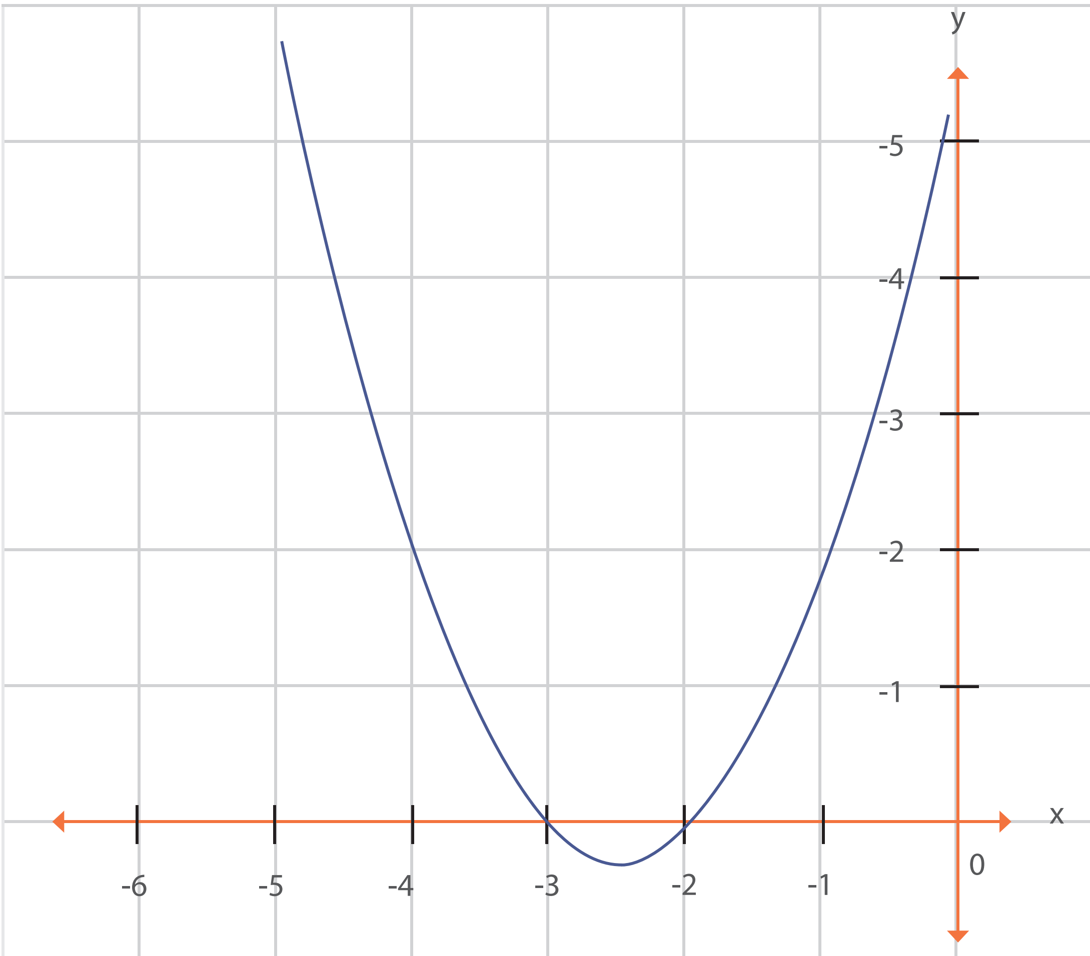
$$(x+3)(x+2) = 0$$

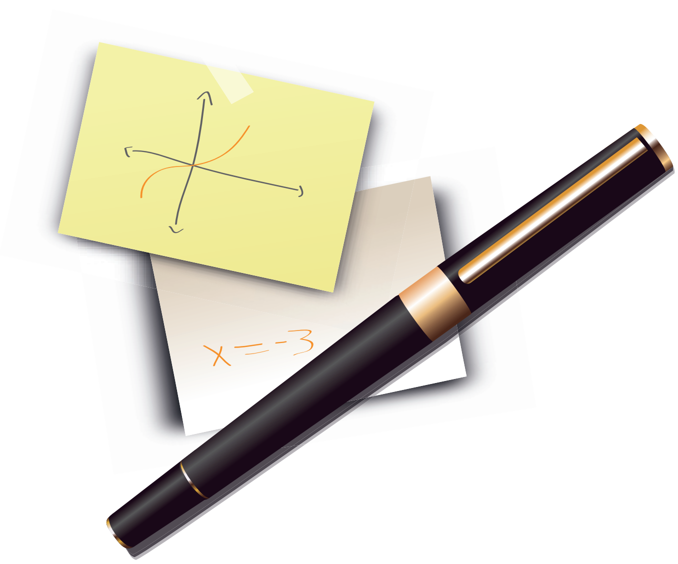
$$x + 3 = 0 \text{ ó } x + 2 = 0$$

$$x = -3 \text{ ó } x = -2$$

$$(-3,0) \text{ y } (-2,0)$$

e. La gráfica es:





Ejercitemos lo aprendido

Representa gráficamente las funciones cuadráticas y hallar los puntos de corte y el vértice de cada una

1. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
3. $f(x) = x^2 + x + 1$

Partiendo de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, representa:

4. $y = x^2 + 2$
5. $f(x) = x^2 - 2$
6. $f(x) = (x + 2)^2$
7. $f(x) = (x - 2)^2 + 2$
8. $f(x) = (x + 2)^2 - 2$
9. El ánimo de lucro (en miles de dólares) de una empresa está dado por:

$$f(x) = 5000 + 1000x - 5x^2$$

Donde x es la cantidad (en miles de dólares) que la empresa gasta en publicidad.

a. Encuentra la cantidad, x, que la empresa tiene que gastar para maximizar su beneficio.

b. Encuentra el máximo beneficio, punto máximo.

10. Se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba. La altura que alcanza la pelota, medida desde el suelo en metros, en función del tiempo, medido en segundos, se calcula a través de la siguiente fórmula: $h(t) = -5t^2 + 20t$.

¿Cuál es la altura máxima que alcanzaría la pelota? Ten en cuenta que la coordenada y del vértice es la altura máxima

Guía 10

Función exponencial

Estándares:

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Analizo, en representaciones gráficas cartesianas, los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Lo que sabemos

Teniendo en cuenta la siguiente situación, comenta con tus compañeros ¿cuál de las dos opciones escogerías para tu institución?

El Ministerio de Educación Nacional, decide poner en marcha unos planes de mejoramiento para la calidad educativa y para esto presenta dos planes:

Plan A: El sistema escolar va a recibir 20 millones de dólares en el acto.

Plan B: Al sistema escolar se le asignará un centavo para el primer día del mes, dos centavos para el segundo día, cuatro centavos para el tercer día, ocho centavos para el cuarto día, y así sucesivamente. Este patrón de duplicación continuará durante todo el mes de enero. Al final de los 31 días, le será entregará la cantidad acumulada al sistema escolar.

Si tuvieras que escoger un plan para tu institución. ¿Cuál escogerías? Comenta con tus compañeros el mejor plan para la escuela.

Aprendamos algo nuevo

Función exponencial

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces la función exponencial se define como:

$$f(x) = a^x$$

Para la cual el dominio es el conjunto de los números reales y su rango es el conjunto de los números reales positivos.

Para tener en cuenta

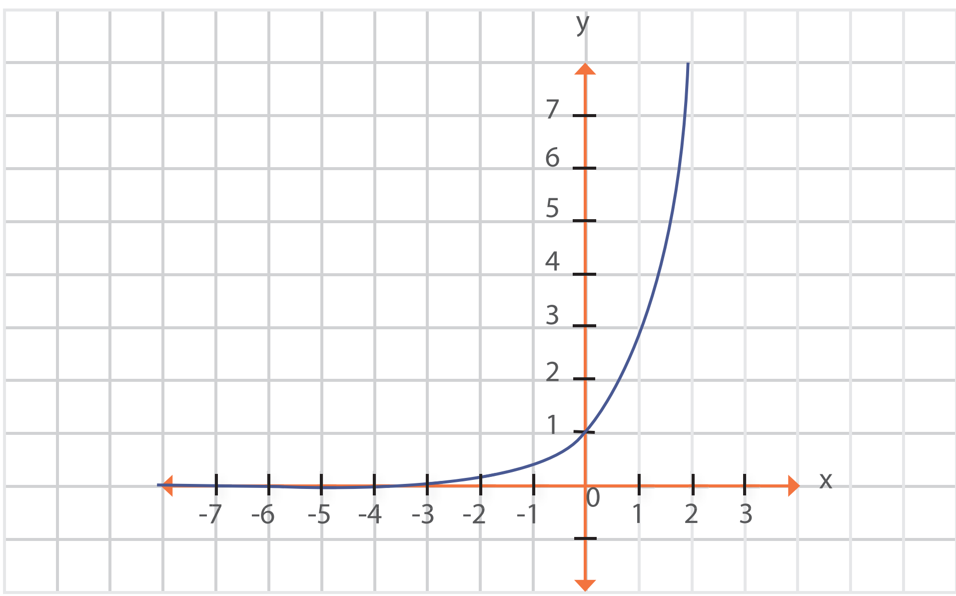
Se excluye $a = 1$, porque si $f(x) = 1^x = 1$, la cual es una función constante y no nos serviría para este tipo de función.

Se excluye $a = 0$, por si elevamos 0^x, no está definida y para los demás números reales no estaría definida.

Se excluye $a < 0$, ya que a^x resultaría negativa o compleja.

Ejemplo de función exponencial

$f(x) = 3^x$



Cómo se hace:

Trazar la gráfica de una función exponencial

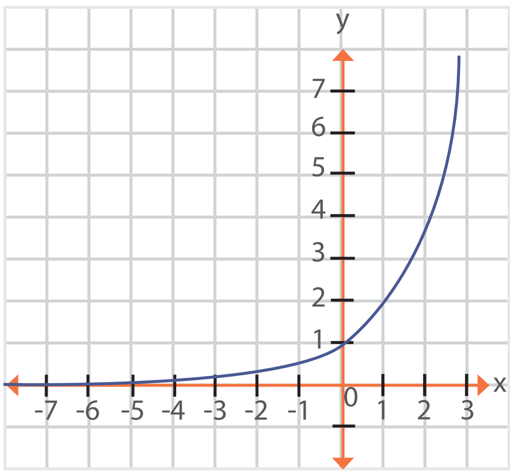
$f(x) = 2^x$

Para trazar una gráfica de una función exponencial se tabula asignando valores.

Primero: se elabora una tabla de valores

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Segundo: Se representan los puntos y se unen para dibujar la gráfica



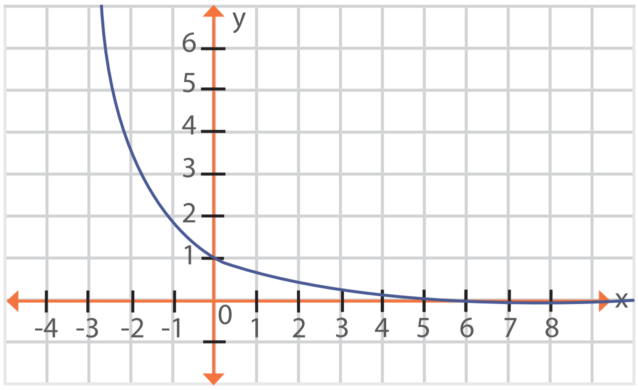
Veamos otro ejemplo

Trazar la gráfica de $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Primero elaboramos una tabla de valores

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Segundo: Se representan los puntos y se unen para dibujar la gráfica



Ejercitemos lo aprendido

Traza la gráfica de las siguientes funciones

1. $f(x) = 4^{x}$
2. $f(x) = 2^{x} + 3$
3. $f(x) = 3^{x-1}$
4. $f(x) = \frac{1}{3}^{x}$
5. $f(x) = \frac{1}{2}(3^{x})$
6. $f(x) = 2^{x+1} - 1$
7. $f(x) = 2^{x}$
8. $f(x) = \frac{1}{4}^{x}$

Solución de problemas

10. Una población de bacterias, bajo condiciones ideales, se duplica cada 4 horas. Una colonia de bacterias inicialmente tiene 1000 ejemplares. ¿Cuántas bacterias habrá en la colonia una vez trascurridas 5 horas?

11. En 1995, una ciudad tenía una población aproximada de 15000 habitantes, se ha medido que la población aumenta en un 4% anualmente. ¿Cuántos habitantes tendrá la ciudad en el año 2014?

12. Los reactores nucleares utilizan como combustible, para obtener energía, un isotopo radiactivo, el plutonio.

El plutonio que se utiliza en un reactor nuclear, decae o se gasta un 0.003% anual, si en el reactor había 200 gramos de plutonio, ¿Cuántos gramos quedarán después de 40 años?

Guía 11

Función logarítmica

Estándares:

Pensamiento variacional

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Analizo, en representaciones gráficas cartesianas, los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Lo que sabemos

Los logaritmos[1] se inventaron alrededor de 1590 por John Napier (1550-1617) y JobstBürgi (1552-1632) de manera independiente. Napier, cuyo trabajo tuvo mayor influencia, era un lord escocés, de carácter muy reservado y sus vecinos pensaban que tenía un pacto con el diablo. Su enfoque de los logaritmos era muy diferente al nuestro; se basaba en la relación entre secuencias aritméticas y geométricas y no en la actual, como función inversa (recíproca) de las funciones exponenciales. Las tablas de Napier, publicadas en 1614, contenían los llamados logaritmos naturales y eran algo difíciles de usar. Un profesor londinense, Henry Briggs, se interesó en las tablas y visitó a Napier. En sus conversaciones, ambos desarrollaron la idea de los logaritmos comunes y Briggs convirtió las tablas de Napier en las tablas de logaritmos comunes que fueron publicadas en 1617. Su importancia para el cálculo fue inmediatamente reconocida y alrededor de 1650 se imprimían en lugares tan lejanos como China. Dichas tablas siguieron siendo una poderosa herramienta de cálculo hasta el advenimiento de las calculadoras manuales de bajo precio alrededor de 1972, lo que ha disminuido su importancia como instrumento de cálculo, pero no su importancia teórica. Un efecto colateral de la invención de los logaritmos fue la popularización de la notación del sistema decimal para los números reales.

1 *En: http://web.educastur.princast.es/ies/elpiles/archivos/paginas/depar/matematicas/Napier%20y%20Burgi_.htm*

Aprendamos algo nuevo

Función logarítmica

Recordemos algunos conceptos

Logaritmo: Es el exponente o potencia a la que un número fijo, llamado base, se eleva para obtener un número dado.

Ejemplo, en la expresión $10^2 = 100$, el logaritmo de 100 en base 10 es 2. Esto se escribe como $\log_{10} 100 = 2$, porque si multiplicamos dos veces 10 obtenemos por si mismo 100.

Observemos los siguientes ejemplos:

Calculemos:

a. $\log_3 9$ b. $\log_2 16$

Solución

a. $\log_3 9$, es el número x, al que se debe elevar la base que en este caso es 3, para obtener 9.

$3^x = 9$; como $3^2 = 9$, entonces $x = 2$

La solución nos quedaría de la siguiente forma $\log_3 9 = 2$

b. $\log_2 16$, es el número x al que se debe elevar la base dos para obtener 16, es decir:

$2^x = 16$; como $2^4 = 16$, entonces $x = 4$

Sistemas de logaritmos

1. El sistema de logaritmo de base 10, ha sido principalmente utilizado para facilitar determinados cálculos aritméticos, cuando se utiliza este sistema se omite la base, o sea se escribe **log**.

2. El sistema de logaritmo de base *e*, se utiliza en varias ramas de la matemática como la estadística y el cálculo, cuando se utiliza este sistema se representa con **ln** y se llama logaritmo natural.

Propiedades de los logaritmos

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_3 (x \cdot y) = \log_3 x + \log_3 y$$

$$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

2. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_2 \left(\frac{x}{y}\right) = \log_2 x - \log_2 y$$

$$\log_2 \left(\frac{16}{32}\right) = \log_2 6 - \log_2 32 = 4\text{-}5 = -1$$

3. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_3 (x^n) = n \log_3 x$$

$$\log_2 (8^4) = 4\log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$$

4. El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz.

$$\log_3 (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_3 x$$

$$\log_2 (\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

5. Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

A partir del concepto de logaritmo trabajaremos la función logarítmica.

Se llama función logarítmica a la relación

$$f(x)= \log_a x$$

Cuyo dominio es el conjunto de los reales positivos y su rango son todos los números reales.

Gráfica de las funciones logarítmicas

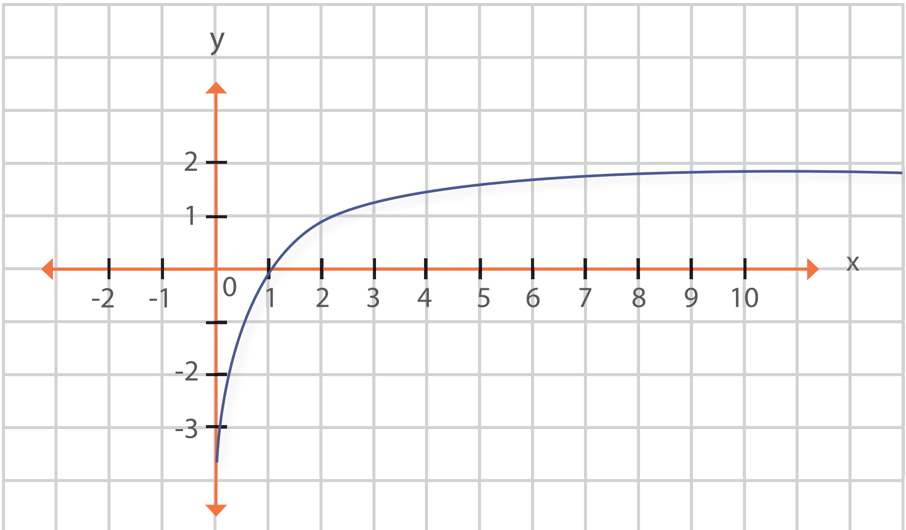
Se presentan dos casos para la gráfica de funciones logarítmicas, en función el signo de la base.

- Si $a > 1$, la función logarítmica es creciente.
- Si $a < 1$, la función logarítmica es decreciente.

Observemos los siguientes ejemplos

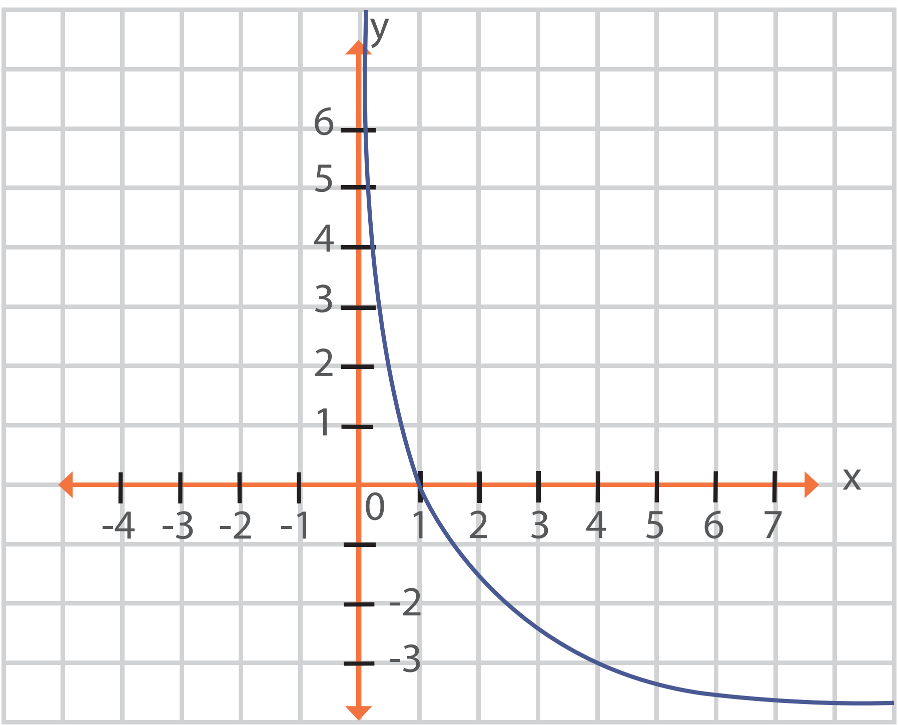
1. $Y = \log_a x$

a> 1



2. $Y = \log_a x$

0 < a < 1



Ejercitemos lo aprendido

Actividad 1

Trazan una gráfica de una función logarítmica

Escribe la función en la forma $Y = \log_a x$

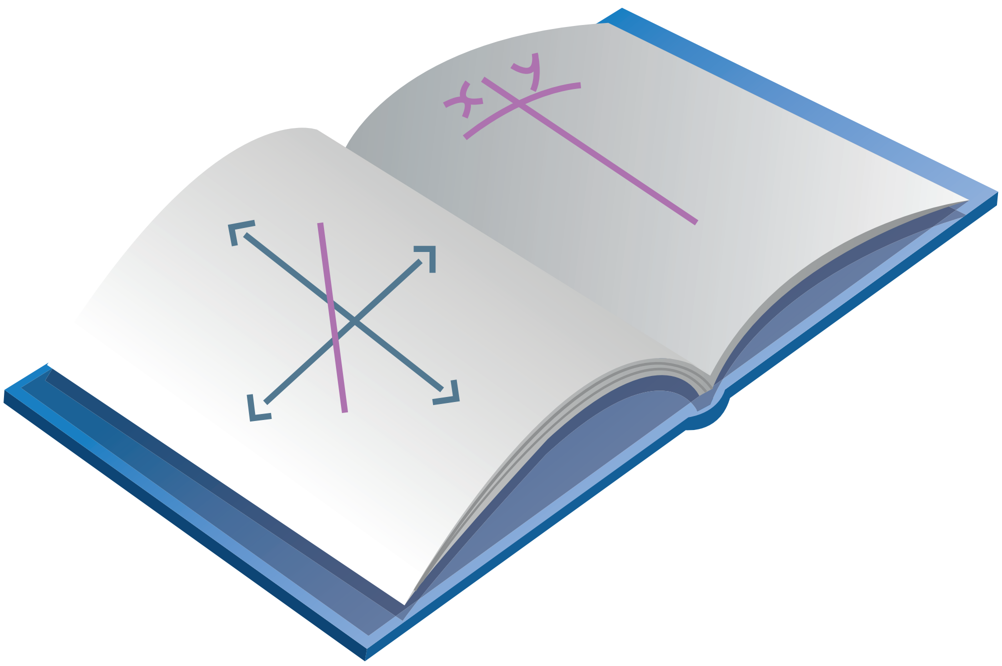
Convierte la función logarítmica resultante en la forma exponencial $X = a^y$

Para tabular se asignan valores y se calculan las respectivas potencias.

A partir de los puntos traza la gráfica.

Actividad 2

Elabora un mapa conceptual en donde puedas establecer cuáles son las características de la función logarítmica.

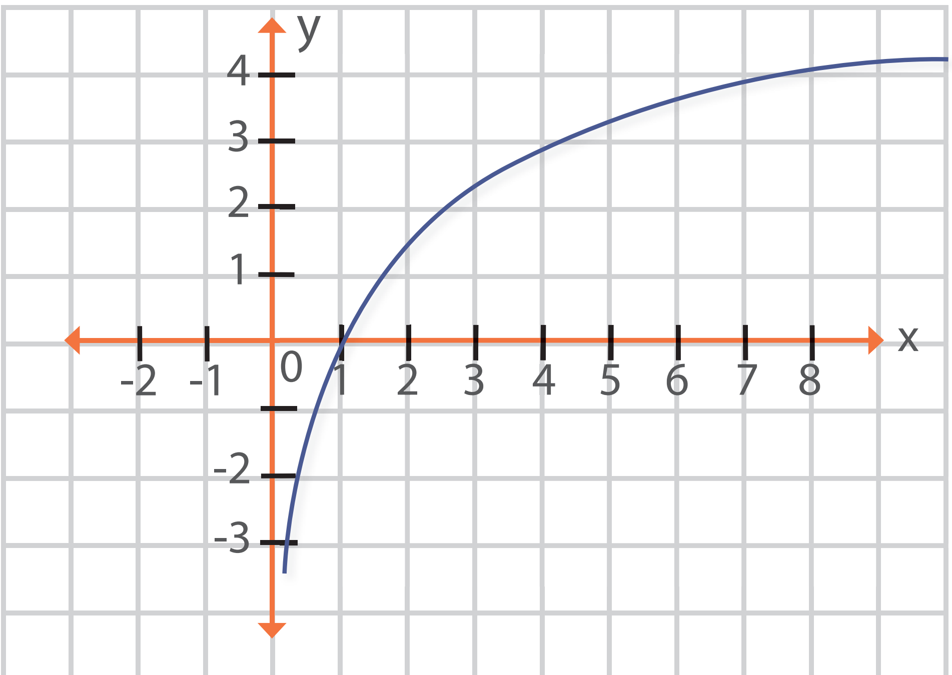


Apliquemos lo aprendido

Traza la gráfica de las siguientes funciones

1. $f(x) = \log x$ 2. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ 3. $f(x) = \log(x^2 + 1)$

A partir de la gráfica de y= ln *x*, traza las gráficas de las funciones que se indican



4. $Y = \ln(x - 3) + 2$

5. $Y = \ln\frac{1}{x} - 3$

Evaluemos

¿Cómo me ven los demás?

Formen grupos de tres personas y realicen las siguientes actividades:

a. Cada grupo dibuja seis gráficas diferentes de funciones lineales, afines y cuadráticas.

b. Intercambien las gráficas construidas y encuentren la expresión simbólica que las representan.

c. Preparen una exposición para presentar y justificar frente a todos los compañeros las gráficas con sus respectivas funciones.

¿Cómo me ve mi maestro?

Expresen su opinión acerca de las ventajas que tuvo realizar este trabajo en grupo y la manera cómo se sintieron.

Ahora compartan sus opiniones en los grupos formados, para responder lo siguiente:

- ¿Cuál de los compañeros del grupo resolvió más rápido y correctamente lo anterior?
- ¿Cuál de los compañeros del grupo resolvió con más dificultad lo propuesto anteriormente?
- ¿Cómo me fue con respecto a mis compañeros de grupo?
- Analicemos las anteriores respuestas y determinemos quiénes deben realizar ejercicios adicionales (incluyéndome) y quiénes pueden ser apoyo del maestro para explicarle a los demás del curso.

¿Qué aprendí?

Completa la siguiente tabla, marcando con una X cada uno de los aspectos desarrollados durante el módulo, teniendo en cuenta todo lo que aprendiste. Finalmente justifica la selección realizada.

	Sí	A veces	No	Justifico
Comprendo las características de una función y los elementos asociados a esta (dominio, rango y codominio).				
Reconozco las diferentes representaciones de las funciones.				
Reconozco las características de las funciones lineales.				
Reconozco las características de las funciones afines a las funciones lineales.				
Identifico las características de las funciones exponenciales				
Identifico las características de las funciones logarítmicas				
Realizo mis tareas responsablemente tanto en los trabajos individuales como en los grupales.				
Me relaciono adecuadamente con mis compañeros y mi maestro.				
Participó activamente en clase y expreso mis opiniones de manera respetuosa.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Respeto las opiniones de mis compañeros de curso.				
Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				
Me intereso por aprender de manera significativa.				

Determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento con tu maestro.

Módulo 4

Algo más sobre semejanza

¿Qué vas a aprender?

Es usual en la vida real encontrarse con situaciones que requieren mediciones de longitudes o dimensiones grandes, para los cuales no tenemos los instrumentos de medición adecuados o realmente no podemos físicamente realizarlas. Para realizar estas mediciones se puede recurrir a la medición de dimensiones o longitudes que son semejantes pero mucho más pequeñas, para con esto encontrar los valores reales en las dimensiones reales.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento espacial

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).

- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza de triángulos en la resolución y formulación de problemas.

- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

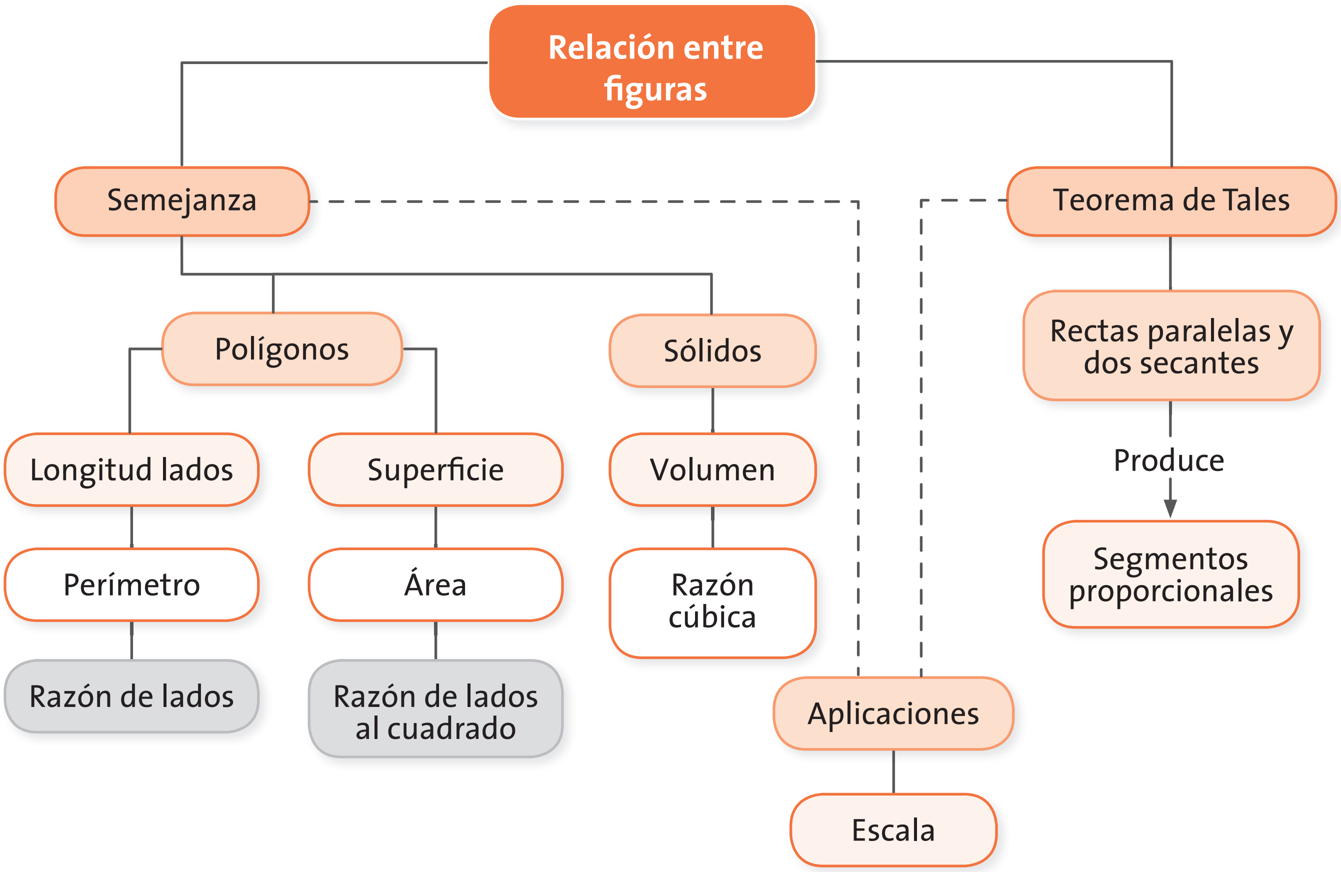
Este módulo te ayudará a afianzar los estándares básicos de competencias, mencionados en la parte superior, mediante los conceptos relacionados con la semejanza de polígonos y el teorema de Tales. En la siguiente tabla se especifican las guías que contiene el módulo.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 12.
Otras relaciones numéricas entre figuras semejantes</td><td>Semejanza entre sólidos rectos

Razón entre los valores de perímetros y áreas de figuras semejantes

Razones entre los valores de los volúmenes</td><td rowspan="3">Durante el trabajo del módulo los estudiantes tienen la posibilidad de reforzar los siguientes procesos:
La resolución de problemas, al solucionar diferentes situaciones de la vida cotidiana o del campo, como la reorganización y distribución de los estanques para peces, relacionadas con la semejanza de polígonos y el teorema de Tales.
La modelación, al representar por medio de figuras y gráficas la información planteada en un procedimiento o problema, relacionado con una situación cercana al estudiante.
La ejercitación de procedimientos para comprobar la semejanza de polígonos y el teorema de Tales.
La modelación, al representar por medio de figuras y gráficas la información planteada en un procedimiento o problema.</td></tr>
<tr><td>Guía 13.
Situaciones de segmentos proporcionales</td><td>Semejanza: Teorema de Tales</td></tr>
<tr><td>Guía 14.
La herramienta escala</td><td>Escalas
Planos y maquetas</td></tr>
</table>

El siguiente esquema te muestra la manera como se relacionan los conceptos en las diferentes guías del módulo.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

La semejanza de figuras geométricas y el teorema de Tales son usados con frecuencia en muchas de las situaciones de la cotidianidad a través de una escala. Por ejemplo, para calcular medidas que parecieran ser difíciles de medir, como la altura de una casa; para construir un plano de una vivienda o las maquetas de aviones o vehículos que conocemos.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

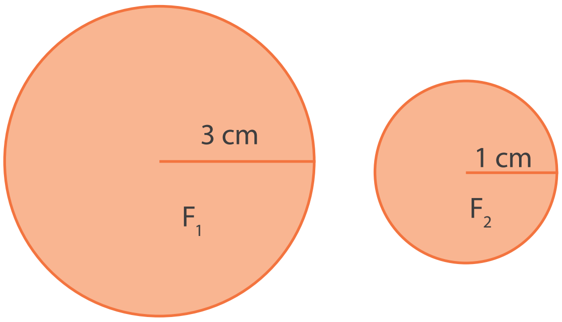
En el desarrollo del módulo se proponen diferentes momentos en los que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evidenciar y analizar los progresos en cuanto al aprendizaje de los conceptos relacionados con la interpretación del teorema de Tales y la semejanza de polígonos.

Además encontrarás dos secciones: *Aplico lo aprendido* y *Evaluación*, en las que se proponen diferentes actividades, problemas y situaciones que te invitarán a poner en práctica tus conocimientos y a realizar trabajos individuales o grupales que retarán tus habilidades para expresar tus ideas y pensamientos.

Explora tus conocimientos

- Todos los cuadrados son semejantes, ¿por qué?
- Todas las circunferencias son semejantes, ¿por qué?

Observa las siguientes circunferencias:



- ¿Cuál es el factor escalar que hay de la circunferencia de radio 3 cm comparado con la circunferencia de radio 1 cm?

Guía 12

Otras relaciones numéricas entre figuras semejantes

Estándares:

Pensamiento espacial

- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza de triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

En esta guía se recordarán las condiciones para que dos figuras sean semejantes y se indagará sobre las relaciones que cumplen otras medidas como perímetros, áreas y volúmenes.

Lo que sabemos

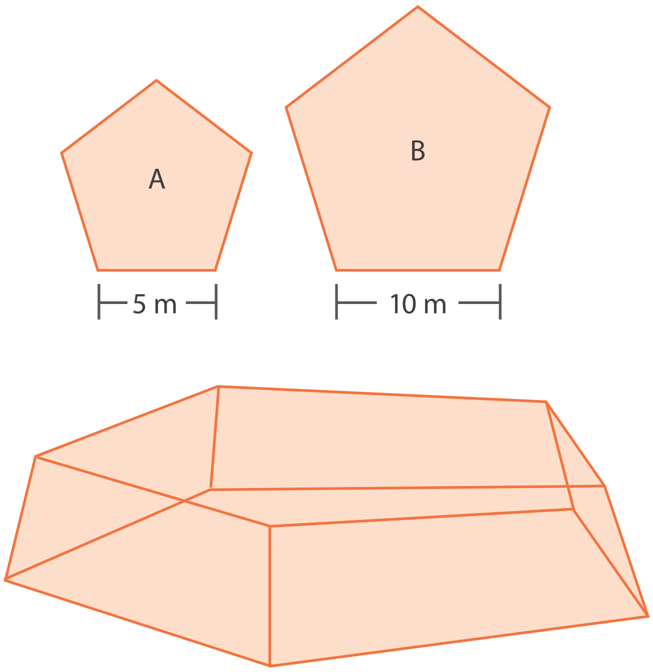
Samuel es un campesino que vive en la costa colombiana, él ha ayudado a construir estanques para la producción y comercialización de peces de su región, la mayoría de sus estanques tienen superficies con formas de polígonos.

- Escribe la diferencia entre polígonos regulares y polígonos irregulares.
- Dibuja un ejemplo de polígonos regulares y de polígonos irregulares.
- Escribe las condiciones que deben cumplir dos polígonos para que sean semejantes.
- ¿Cómo ayudar a Samuel a encontrar semejanzas entre las superficies de sus estanques si estos tienen forma de prisma de base hexagonal?
- ¿Sabes lo qué es la piscicultura? Investiga en qué regiones de Colombia se dedican a esta actividad económica.

En Colombia muchas familias campesinas se dedican a la piscicultura. La familia de Samuel y otros vecinos de la vereda se unieron como una organización dedicada a esta importante actividad.

Por medio de la organización han construido varios estanques, a continuación se muestran dos de ellos con sus dimensiones:

Estanques con forma de prismas pentagonales



- Ayuda a Samuel a calcular el perímetro de la base de los estanques A y B. Ten presente que es un pentágono regular.
- Comprueba que las bases del estanque son polígonos semejantes.
- ¿El factor escalar o razón de proporcionalidad de las bases del estanque es $\frac{1}{2}$?
- Los polígonos que forman parte de las caras laterales son rectángulos congruentes en cada estanque. Al comparar los rectángulos del estanque A con respecto a los del estanque B, ¿son semejantes?

Aprendamos algo nuevo

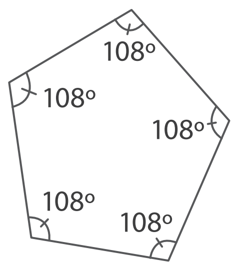
Dos polígonos son semejantes si y solamente si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados homólogos son proporcionales.

Para saber que los polígonos de las caras de los estanques construidos por Samuel son semejantes debemos comprobar que los ángulos tanto de las bases como de las caras laterales del estanque A con respecto al estanque B son congruentes.

Como los pentágonos de la base de los estanques son regulares, todos sus ángulos miden lo mismo. Es decir, son equiángulos.

Todos los pentágonos regulares tienen ángulos de la misma medida, no importa la longitud de sus lados. Sus ángulos miden 108º.

Base pentagonal de los estanques



Comparando las caras laterales de los estanques encontramos que son rectángulos y que sus ángulos son de 90º, es decir, son equiángulos. Por lo tanto, cumplen la condición de tener ángulos congruentes.

Ahora mediremos los lados correspondientes tanto de la base como de una de las caras laterales para encontrar la razón o factor escalar entre cada longitud del estanque A con respecto cada longitud correspondiente de los polígonos del estanque B.

Con respecto a las medidas de los lados de los polígonos de las bases, como son polígonos regulares cumplen que sean polígonos equiláteros, es decir que todos sus lados tienen la misma longitud. Por lo tanto se establece la misma razón para todos los lados así:

$$\frac{5\ m}{10\ m}, \text{ es lo mismo que } \frac{1}{2}$$

Las caras laterales son rectángulos que tienen las dimensiones dadas en la figura.

Caras laterales de los estanques

Establecemos las razones de los lados correspondientes de las caras laterales de cada uno de los estanques:

$$\frac{0{,}5\ m}{1\ m} \text{ es lo mismo que } \frac{1}{2}.$$

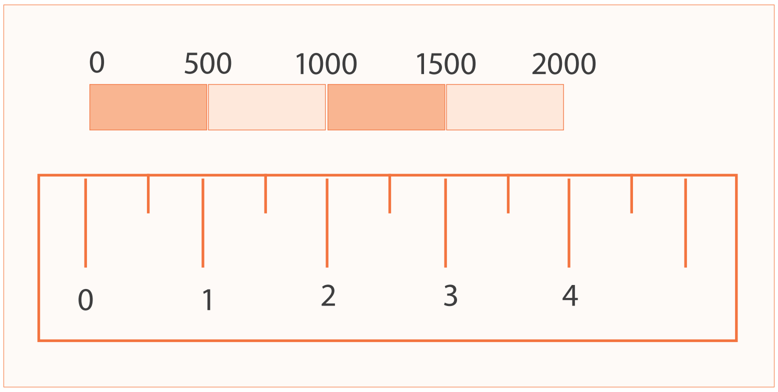
Como todos los lados correspondientes entre polígonos tienen la misma razón: $\frac{1}{2}$, los lados correspondientes son proporcionales.

Como se cumplen las dos condiciones: ángulos congruentes y lados proporcionales, entonces los estanques son semejantes.

La razón de semejanza $\frac{1}{2}$, la podemos usar para interpretar una escala numérica 1:2, su significado es: 1 unidad del estaque A corresponde a 2 unidades del estanque B.

La escala o factor escalar también puede ser representada de forma gráfica como lo muestra la figura.

Escala



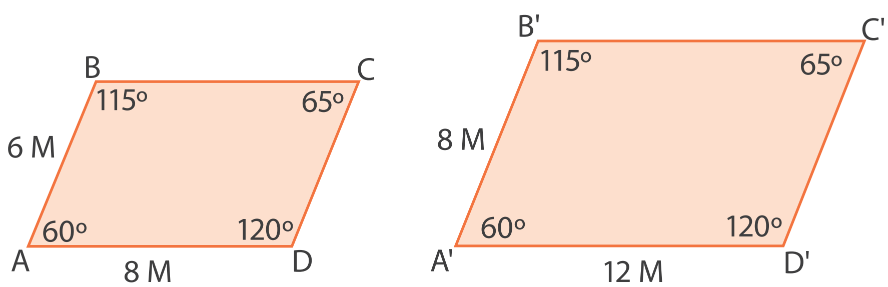
En este caso, 1 unidad sobre el plano representa 500 unidades en la realidad. En la imagen anterior la figura inferior es la escala del plano y la figura superior es la que representa la escala real.

La escala o factor escalar es la razón de semejanza entre el objeto original y su representación, que puede ser un plano, un mapa o un maqueta entre otros.

Se representa de la forma 1:n. Su significado es: 1 unidad del plano corresponde a n unidades de la realidad.

Samuel realiza los siguientes esquemas de las bases de un estanque. Comprobemos que dichas bases son polígonos semejantes.

Bases de estanques rectangulares



Para saber si las bases de los estanques son semejantes como acabamos de ver, sus ángulos deben ser congruentes:

Para nuestro ejemplo:

∠A º ∠A′, tanto ∠A como ∠A′ igual a 60°.

∠B º ∠B′, tanto ∠B como ∠B′ igual a 115°.

∠C º ∠C′, tanto ∠C como ∠C′ igual a 65°.

∠D º ∠D′, tanto ∠D como ∠D′ igual a 120°.

Así pues, los ángulos correspondientes son congruentes.

Sin embargo, falta averiguar si los lados correspondientes son proporcionales:

$$r1 = \frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

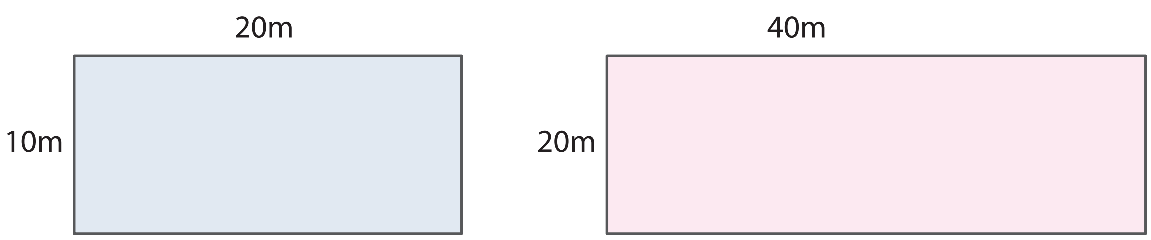
$$r1 = \frac{AD}{A'D'} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Como las razones de semejanza r_1 y r_2 son diferentes, los lados correspondientes no son proporcionales; por lo tanto los polígonos de las bases de los estanques no son semejantes. Y así mismo, los estanques ya no son semejantes.

Razón de los perímetros de polígonos semejantes

Samuel ha cercado uno de sus estanques con una malla de alambre, que tiene la forma y dimensiones de la figura.

Malla rectangular de los estanques



Dichos rectángulos son semejantes porque los ángulos miden 90º y la razón entre sus lados es 2 a 1.

El perímetro del rectángulo grande es 2 x 20 + 2 x 40 = 40 + 80 = 120 m

El perímetro del rectángulo pequeño es 2 x 10 + 2 x 20 = 20 + 40 = 60 m

También las medidas de los perímetros cumplen la misma razón de proporcionalidad, en este caso:

$$\frac{120}{60} \text{ es lo mismo que } \frac{2}{1}.$$

Razón de las áreas de polígonos semejantes

El área del rectángulo grande es: Área $a1 = 20 \times 40 = 800\text{m}^2$

Y el área del rectángulo pequeño es: $10 \times 20 = 200\ \text{m}^2$

Estableciendo la razón entre las medidas de la superficie del rectángulo grande con respecto al rectángulo pequeño, se tiene: $\frac{800}{200}$ que es lo mismo que $\frac{4}{1}$.

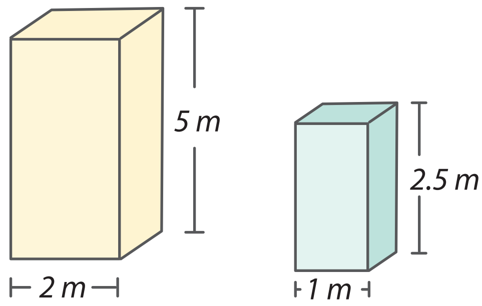
Lo que quiere decir que el valor de la razón de las áreas es igual al cuadrado del valor de la razón de las longitudes de los lados de los polígonos semejantes.

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza de dichas figuras**.**

$$\frac{a_1}{a_2} = r^2$$

Razón de los volúmenes de sólidos semejantes

Prismas de base cuadrada



Los prismas dados en la figura son semejantes porque todos los ángulos tanto de las bases como de las caras laterales miden 90º y la razón o factor escalar entre la medida de todos sus lados correspondientes es de 2 : 1.

Recordemos que el volumen de un prisma es:

V= área de la base x altura

El volumen del prisma grande es: 2 x 2 x 5 = 20 m^3

El volumen del prisma pequeño es: 1 x 1 x 2,5 = 2,5 m^3

Entonces la razón del valor de los volúmenes es:

$$\frac{20}{2{,}5} \text{ como } \frac{8}{1}.$$

Lo que quiere decir que el valor de la razón de los volúmenes es igual al cubo o elevado a la tres del valor de la razón de semejanza de todos los polígonos que forman el sólido.

La razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza de dichas figuras.

$$\frac{V_1}{V_2} = r^3$$

Ejercitemos lo aprendido

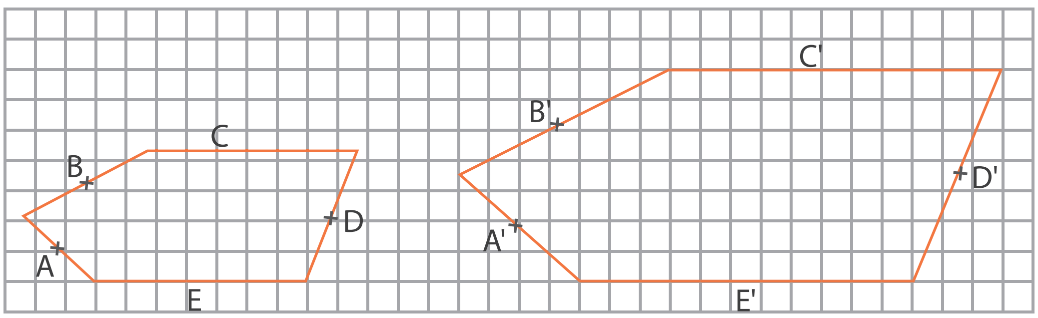
Trabajo en grupo

Trabaja con dos compañeros. Respondan las siguientes preguntas:

1. Samuel cerca otro estanque que es semejante al primero con un factor escalar de 1 a 3. ¿Cuántos metros de alambre necesitará para cercar este nuevo estanque?

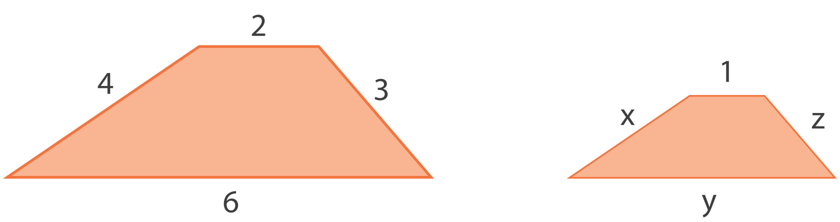
2. La siguiente figura muestra las bases de estanques que tienen forma de prisma pentagonal. Analicen si dichas bases son polígonos semejantes, con la ayuda de regla y transportador encuentren el valor de la medida de los ángulos y de los lados. (Nota: La distancia de cada cuadrito representa un metro).

Bases de estanques de forma de prisma pentagonal



3. Hallen la longitud de los lados desconocidos del trapecio de tal forma que cumpla que es semejante al otro.

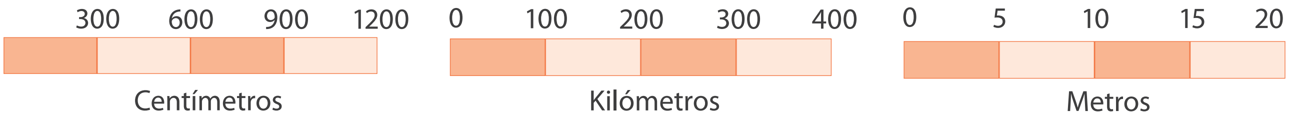
Semejanza de trapecios



4. Si la razón de semejanza de dos polígonos semejantes es de $\frac{4}{5}$. ¿Cuánto vale la razón de semejanza de sus perímetros y áreas?

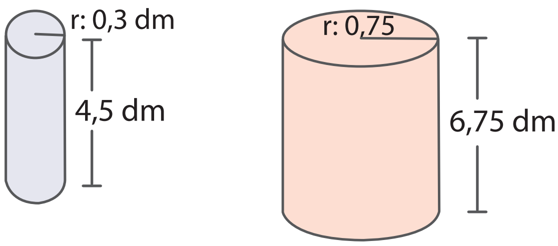
5. Escriban la razón de representación de cada una de las escalas con respecto a la medida real.

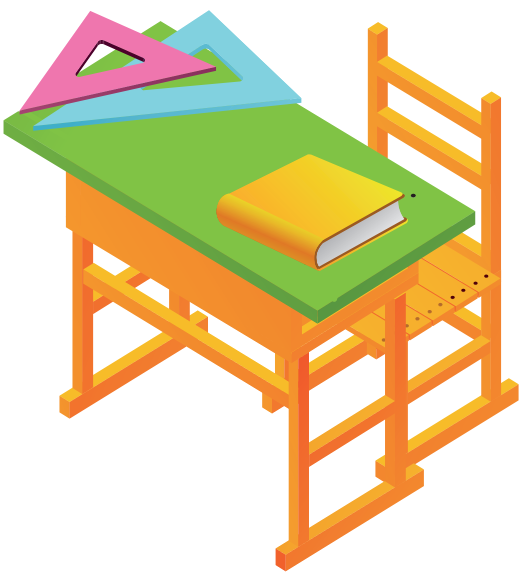
Escalas



6. Encuentren el volumen y la razón de los volúmenes de los siguientes sólidos.

Volumen de sólidos





Guía 13

Situaciones de segmentos proporcionales

Estándar:

Pensamiento espacial

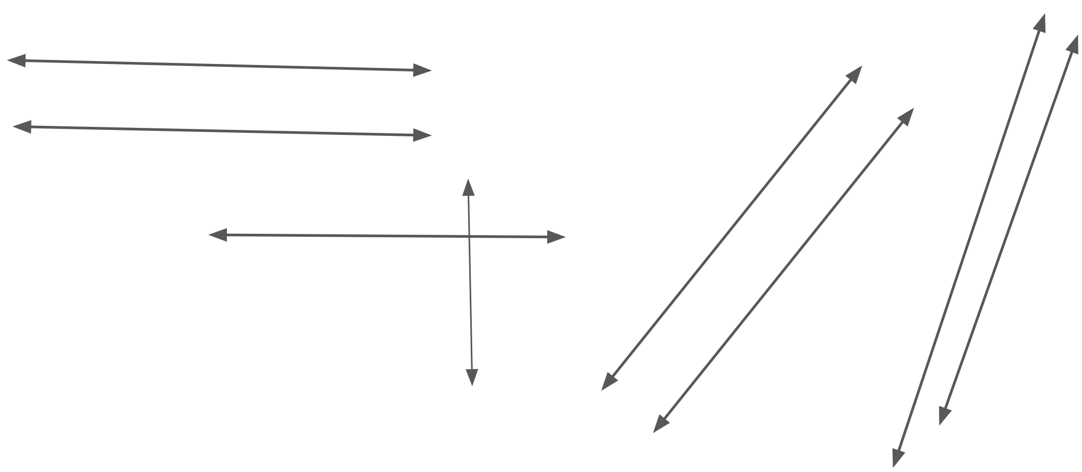
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).

En esta guía se trabaja la proporcionalidad entre la longitud de lados que se establecen entre las relaciones entre rectas, es así como el teorema que estableció Tales de Mileto permitió encontrar distancias sin utilizar instrumentos, sino relaciones de semejanza entre lados.

Lo que sabemos

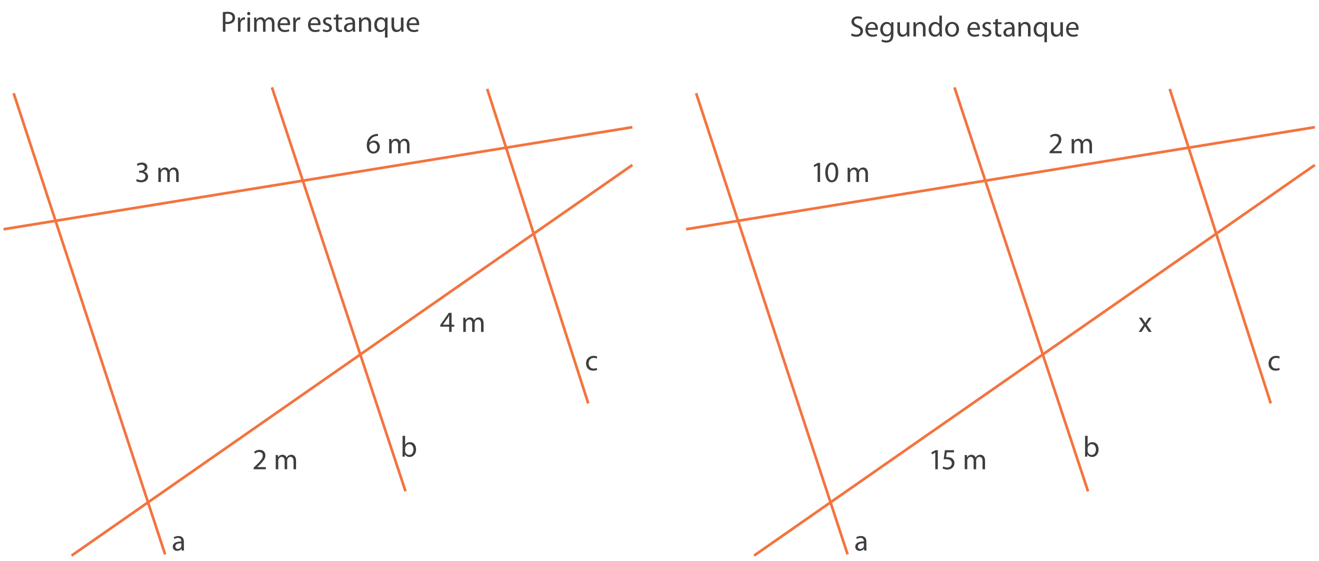
- ¿Sabes cuál es la relación de rectas paralelas o de rectas perpendiculares?

De las siguientes parejas de rectas, determina cuáles son paralelas y cuáles perpendiculares



Samuel tiene dos estanques y en cada uno realiza divisiones para separar peces grandes de los pequeños. A continuación se muestra la vista superior de cada estanque y la lámina que colocó en cada uno de ellos para dividirlos.

Vista superior de estanques



- Del primer estanque conocemos algunas dimensiones, las paredes $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelas. ¿Podemos afirmar que $\vec{c}$ es paralela a las paredes $\vec{a}$ y $\vec{b}$? ¿Cómo lo demostrarías?
- Del segundo estanque se sabe que la nueva división $\vec{b}$ es paralela a la de sus lados; ¿puedes ayudar a Samuel encontrar la longitud de *x*? ¿Cómo lo harías?

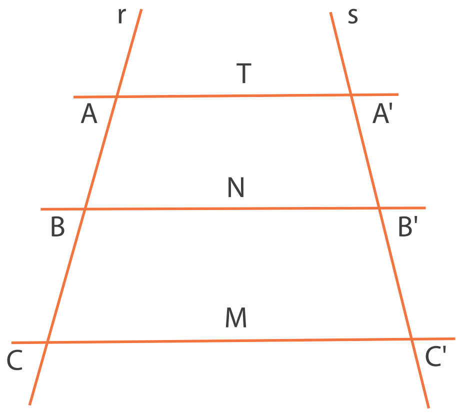
Aprendamos algo nuevo

La situación antes descrita se resuelve a través de un teorema. El teorema es conocido como **Teorema de Tales,** el cual enuncia:

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos que se forman en una de esas rectas secantes son proporcionales a los segmentos que se forman en la otra secante.

Por ejemplo, dadas las rectas paralelas $\vec{m}, \vec{n}$ y $\vec{t}$ y las rectas secantes $\vec{r}, \vec{s}$, los segmentos que se determinan en la secante $\vec{r}$ son , $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y en la secante $\vec{s}$ se determinan los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$.

Segmentos determinados por el cruce de rectas paralelas y secantes



Con el valor de las longitudes de los segmentos se pueden determinar razones que entre sí son iguales. Por lo tanto, son segmentos proporcionales.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Para ayudar a Samuel a resolver el problema con respecto a los tanques haremos lo siguiente:

Para el primer estanque:

Como sabemos que las paredes *a* y *b* son paralelas y *c* no se sabe, estableceremos las siguientes razones y miraremos si hay proporción entre los segmentos que se determinaron:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

Para determinar que sean proporcionales miramos si cumple la igualdad del producto de medios con el producto de extremos:

$$3 \times 4 = 6 \times 2$$

$$\text{Luego, } 12 = 12$$

Con esto hemos comprobado que la pared *c* es paralela a las paredes *a* y *b*; por el teorema de Tales.

Para el segundo estanque:

Usaremos la misma relación de entre sus lados, sabiendo que su pared divisoria es paralela a las otras. Si eso sucede, cumple el teorema de Tales. Por lo tanto, podemos establecer una proporción entre las longitudes de los segmentos así:

$$\frac{15}{10} = \frac{x}{2}$$

Ahora procederemos a hallar el valor de x.

$$x = \frac{15 \times 2}{10} = 3 \text{ metros}$$

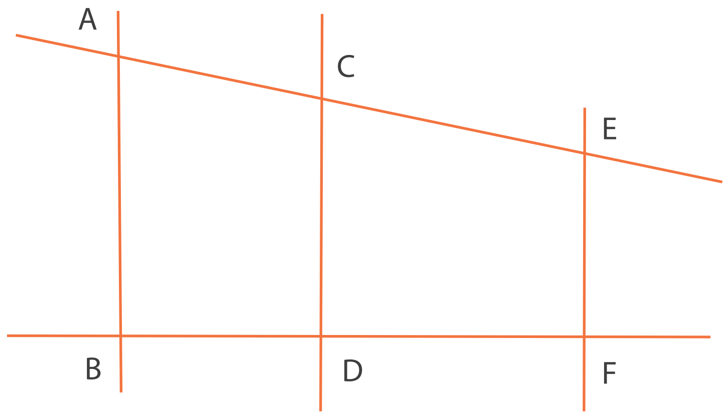
El segmento desconocido mide 3 metros.

Hay una variedad de situaciones que se solucionan con **el teorema de Tales.**

Ejercitemos lo aprendido

La siguiente gráfica ilustra el estanque más grande de peces de la Asociación a la que pertenece Samuel.

Vista superior de estanque de peces



Teniendo en cuenta que las paredes medidas desde los puntos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son paralelas, resuelve las siguientes situaciones:

1. Con $\overline{AC}$ = 30 m, $\overline{CE}$ = 90 m y $\overline{BD}$ = 40 m, encuentra la longitud de la pared conformada por $\overline{DF}$.

2. Con $\overline{BD}$ = 40 m, $\overline{DF}$ = 100 m y $\overline{CE}$ = 5 m, calcula la longitud de la pared conformada por $\overline{AE}$.

3. Con $\overline{BF}$ = 80 m, $\overline{DF}$ = 30 m y $\overline{AE}$ = 240 m, halla la longitud de la pared conformada por $\overline{AC}$.

Guía 14

La herramienta escala

Estándar

Pensamiento espacial

Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

En esta guía se abordará la escala, herramienta que sirve para representar en mapas, maquetas o planos, objetos que se van a construir en la realidad. Para lograr lo anterior debemos usar el proceso de modelación.

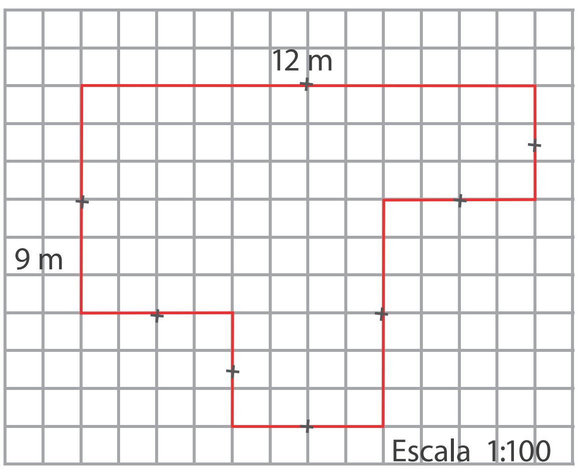
Lo que sabemos

1. Samuel observó el plano de su casa y la ubicación de ésta en el mapa del municipio.

    - ¿Has observado el mapa de tu casa o de tu cuadra?
    - ¿Por qué crees que los arquitectos elaboran mapas y maquetas antes de realizar una construcción?

2. Samuel tiene el plano para construir un nuevo estanque para peces.

Plano de un estanque de peces



Mira el plano del estanque.

- Halla el perímetro.
- Encuentra el área
- Determina el valor real que representa la longitud del cuadrado de la cuadrícula.
- Responde:
    - » ¿Son correctas las dimensiones del plano en relación a la cuadricula que se usó como guía?
    - » ¿Qué significa escala 1:100?

Aprendamos algo nuevo

En el dibujo del nuevo estanque de Samuel, la longitud del cuadrado de la cuadrícula equivale a un centímetro y representa un metro. Como mide 12 cm de largo por 9 cm de alto, representan 12 m y 9 m de la realidad, respectivamente.

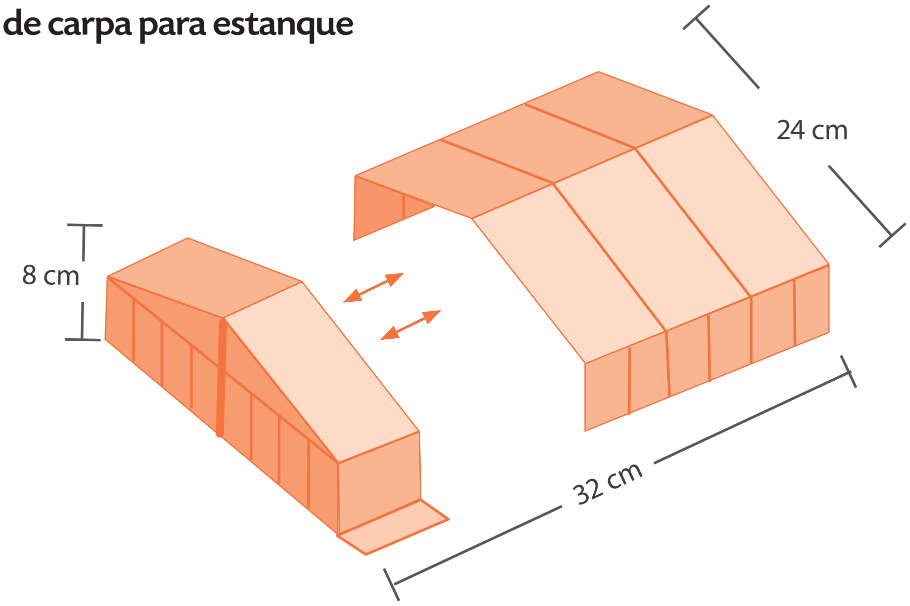
Cada centímetro del dibujo representa 100 cm de la vida real; podemos asegurar que la escala que representa esta relación está dada por 1:100 lo cual significa $\frac{1}{100}$ "uno a cien" de la unidad tomada, que en este caso es el metro.

En conclusión, la escala 1:100 indica que cada metro de la realidad es representado como 1 cm. En este caso, el factor escalar sería 100.

La escala es una relación matemática que se expresa como la razón que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo que representa la realidad sobre un plano.

Samuel contrató un arquitecto para que le construya una maqueta de una carpa para cubrir uno de sus estanques en épocas de fuerte invierno, el arquitecto construyó una maqueta de la carpa con las siguientes dimensiones: largo 32 cm, ancho 24 cm y alto 8 cm, con una escala 1: 50, como lo muestra la figura.

Maqueta de carpa para estanque



Ayuda a Samuel a encontrar las dimensiones reales de la carpa.

Como la escala empleada para la construcción de la maqueta fue 1: 50, cada centímetro de la maqueta representan 50 centímetros de la realidad, por lo tanto las dimensiones reales serán:

Largo → 32 x 50 = 1.600 cm = 16 m

Ancho → 24 x 50 = 1.200 cm = 12 m

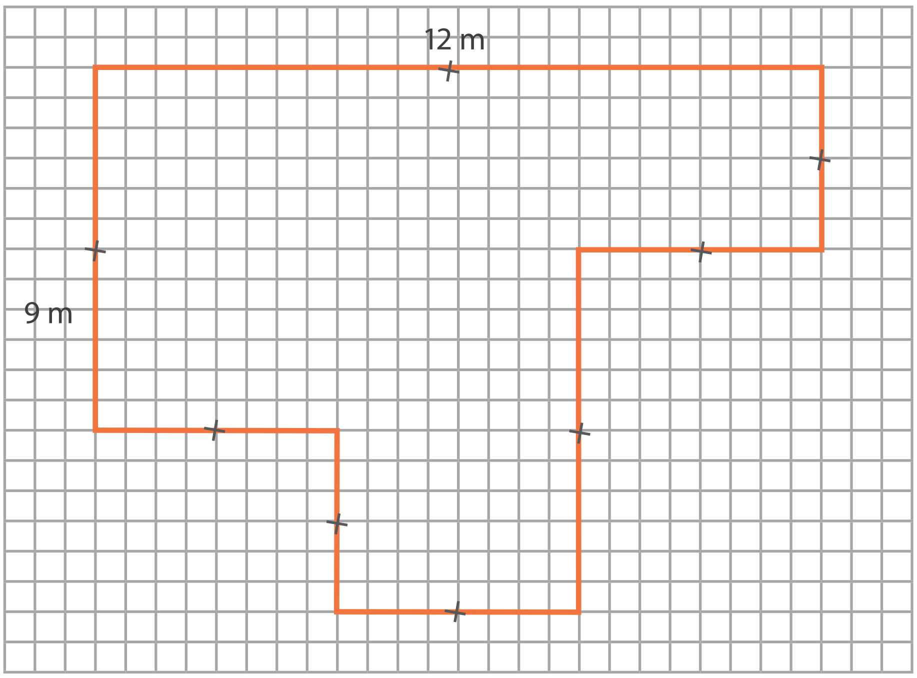
Alto → 8 x 50 = 400 cm = 4 m

Una maqueta es la reproducción física "a escala", en tres dimensiones en tamaño reducido, de algo real a construir.

Ejercitemos lo aprendido

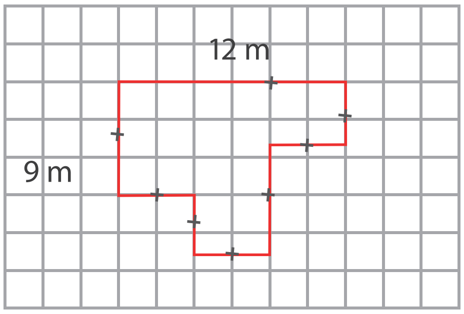
1. La siguiente gráfica ilustra el plano del mismo estanque dibujado a otra escala. Halla la escala a la que está construido si sabes que cada cuadrícula corresponde a un centímetro.

Plano del estanque a escala distinta



2. La siguiente gráfica ilustra el plano original del estanque dibujado a otra escala. Halla la escala a la que está construido si sabes que cada lado del cuadrado corresponde a una representación de un centímetro.

Nuevo plano del estanque a escala distinta



3. La siguiente es la representación de una maqueta, en la que sus dimensiones están dadas en "unidades". De acuerdo a esto contesta:

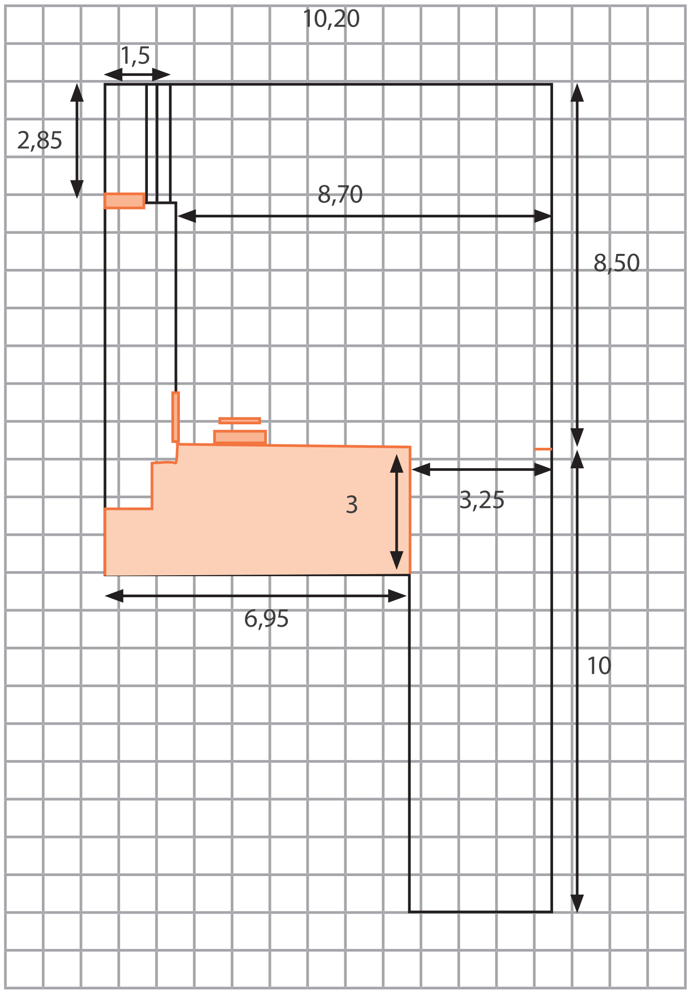
   - Si una unidad representa en el plano dos centímetros y utilizamos una escala de 1:50, ¿Cuáles son las dimensiones reales de la casa?
   - Si cada unidad representa dos metros en el plano, y se utiliza una escala de reducción de 100 : 1 ¿Cuáles serán las dimensiones de la maqueta?
   - Mirando la representación del plano, dibuja en una hoja de trabajo y con una escala libre esta maqueta, después recórtala y ármarla.

Trabajo en grupo

Trabaja con dos compañeros y respondan las siguientes preguntas o realicen las actividades en el cuaderno.

4. La siguiente figura es el plano de una casa cuyas unidades están en centímetros, si la escala es 1: 50

Plano de una casa



- ¿Cuáles son las medidas a escala real de este plano?
- ¿Cuánto mide el perímetro de la casa?
- ¿Cuánto tiene de área?

5. Dibujen un plano del salón con una escala 1: 40.
6. La verdadera distancia entre Bogotá y Medellín, en línea recta, es de 220 km. En un mapa la medimos con la regla y resulta ser de 11 cm. ¿Cuál es la escala del mapa?

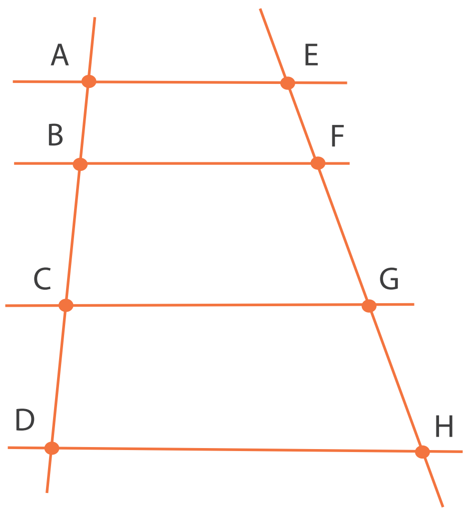
Apliquemos lo aprendido

1. En un mapa de carreteras a escala 1: 500.000 medimos la distancia que hay en línea recta entre dos ciudades, siendo esta de 6 cm. ¿Qué distancia en kilómetros habrá en la realidad?

2. Un rectángulo tiene una diagonal de 75 cm. Calcula sus dimensiones sabiendo que es semejante a otro rectángulo de lados 36 cm y 48 cm.

3. El área de dos circunferencias es 25 m^2 y 75 m^2, respectivamente. Calcula el radio y la razón de semejanza de los radios y de las superficies.

4. De acuerdo con la figura, contesta lo siguiente:



a. Si $\overline{AB} = 5$, $\overline{CD} = 15$ y $\overline{GH} = 24$. Hallar $\overline{EF}$

b. Si $\overline{FG} = 6$, $\overline{CD} = 21$ y $\overline{GH} = 18$. Hallar $\overline{BC}$

c. Si $\overline{EF} = 20$, $\overline{DC} = 50$ y $\overline{AB} = 40$. Hallar $\overline{GH}$

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

Es el momento de reflexionar sobre los contenidos estudiados en este módulo. Para esto, comparte con tus compañeros y maestros en qué situaciones puede ser útil emplear el teorema de Tales y las escalas.

Selecciona una de las opciones de acuerdo a cada pregunta:

1. Los lados de un rectángulo son 6 y 8 cm. ¿Es semejante a de lados 15 y 24 cm?

   a. Sí, la razón de semejanza es 2

   b. Sí, la razón de semejanza es $\frac{2}{3}$

   c. Sí, la razón de semejanza es $\frac{1}{4}$

   d. No son semejantes

2. Los lados de un rectángulo son 6 y 8 cm. ¿Es semejante al de lados 12 cm y 16 cm?

   a. Sí, la razón de semejanza es 2

   b. Sí, la razón de semejanza es $\frac{2}{3}$

   c. Sí, la razón de semejanza es $\frac{1}{4}$

   d. No son semejantes

3. Decide cuáles de las siguientes parejas de triángulos, en los que se da la medida de sus lados en centímetros, son semejantes y cuáles no. En caso afirmativo, calcula el valor de la razón de semejanza.

- Triángulo 1: 4, 5, 6 y triángulo 2: 5, 6, 7.

  a. Si son semejantes, la razón es $\frac{1}{3}$

  b. Si son semejantes, la razón es $\frac{1}{4}$

  c. Si son semejantes, la razón es 3

  d. No son semejantes

- Triángulo 3: 8, 12, 15 y triángulo 4: 24, 36, 45.

  a. Si son semejantes, la razón es $\frac{1}{3}$

  b. Si son semejantes, la razón es $\frac{1}{6}$

  c. Si son semejantes, la razón es $\frac{1}{9}$

  d. No son semejantes

- Triángulo 5: 9, 18, 21 y triángulo 6: 3, 6, 7.

  a. Si son semejantes, la razón vale 2

  b. Si son semejantes, la razón vale 3

  c. Si son semejantes, la razón vale 4

  d. No son semejantes

4. La medida de los lados de un triángulo semejante a otro cuyos lados miden 5, 9 y 12 centímetros, con razón de semejanza igual a 3, es:

   a. 16, 28, 36

   b. 15, 27, 36

   c. 20, 45, 36

   d. 15, 27, 24

¿Cómo me ven los demás?

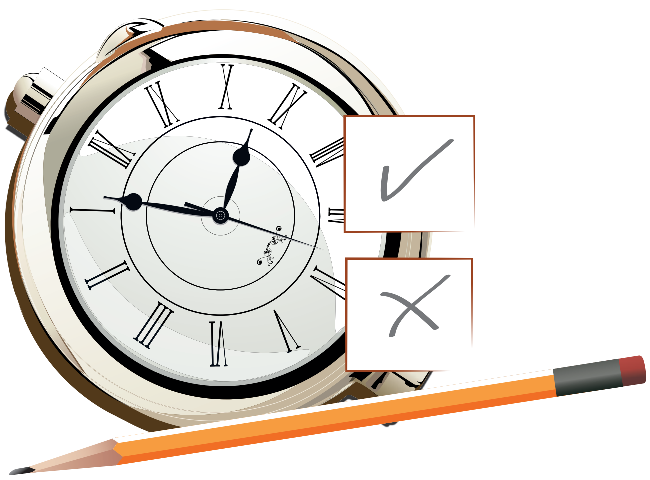
Trabaja con dos compañeros

1. Los lados de un triángulo miden 16 cm, 4 cm y 8 cm. Hallen los lados de un triángulo semejante, sabiendo que la razón de semejanza es 4.

2. Un terreno rectangular mide 200 metros de ancho por 400 metros de largo. En el papel se representa por un rectángulo de 10 cm de ancho por 20 cm de largo. ¿Son semejantes ambos rectángulos? ¿A qué escala está representado el terreno?

3. El área de un cuadrado es 81 metros cuadrados. Calculen la longitud de otro cuadrado sabiendo que es más grande y la razón de semejanza de las áreas es 4.

4. Si el área de dos pentágonos regulares es 10 y 250 m^2, respectivamente, ¿Son semejantes? En caso afirmativo, calculen la razón de semejanza entre las áreas y las longitudes de los lados.



¿Qué aprendí?

A continuación se presenta una tabla en la que debes contestar de manera autónoma cada uno de los criterios y dar una justificación.

	Sí	No	A veces	Justificación
Aplico los criterios de semejanza para calcular los elementos de un triángulo.				
Aplico los criterios de semejanza para calcular los elementos de un polígono.				
Establezco relaciones numéricas entre polígonos semejantes				
Aplico el teorema de Tales.				
Reconozco la relación entre perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes.				
Calculo las distancias o dimensiones sobre un plano representado a escala.				
Trabajo activamente en grupo y respeto la opinión de mis compañeros.				
Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Aporto en las actividades de grupo.				
Soy tolerante con las diferencias de opinión cuando trabajo en grupo.				

Determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento con tu maestro.

Módulo 5

Algo más sobre la probabilidad

¿Qué vas a aprender?

No todos los fenómenos o elementos presentes en nuestra vida cotidiana son predecibles ni pueden ser calculados con exactitud; así mismo, no todos los problemas matemáticos que se plantean son resueltos con exactitud ni se resuelven de una sola manera. En este módulo se realizarán mediciones de lo probable de algunos resultados de experimentos aleatorios o que están regulados por el azar.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento aleatorio

- Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).
- Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
- Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.

Este módulo te ayudará a afianzar los estándares básicos de competencias, mencionados en la parte superior mediante los conceptos básicos relacionados con la probabilidad. En la siguiente tabla se especifican las guías que contiene el módulo y lo que se desarrolla en cada una de ellas.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 15.
Recordando la probabilidad de eventos</td><td>Espacio muestral

Cálculo de probabilidades</td><td rowspan="2">• Se favorece el proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas: Aplicando los conceptos de la probabilidad, como lo son el evento simple y el evento compuesto a situaciones de la vida cotidiana, utilizando diferentes métodos de diagramación para resolver los problemas propuestos.

• El proceso de comunicación al reconocer las diferencias entre un experimento aleatorio simple y uno compuesto y al traducir la probabilidad matemática de eventos a las diferentes situaciones de la vida cotidiana.

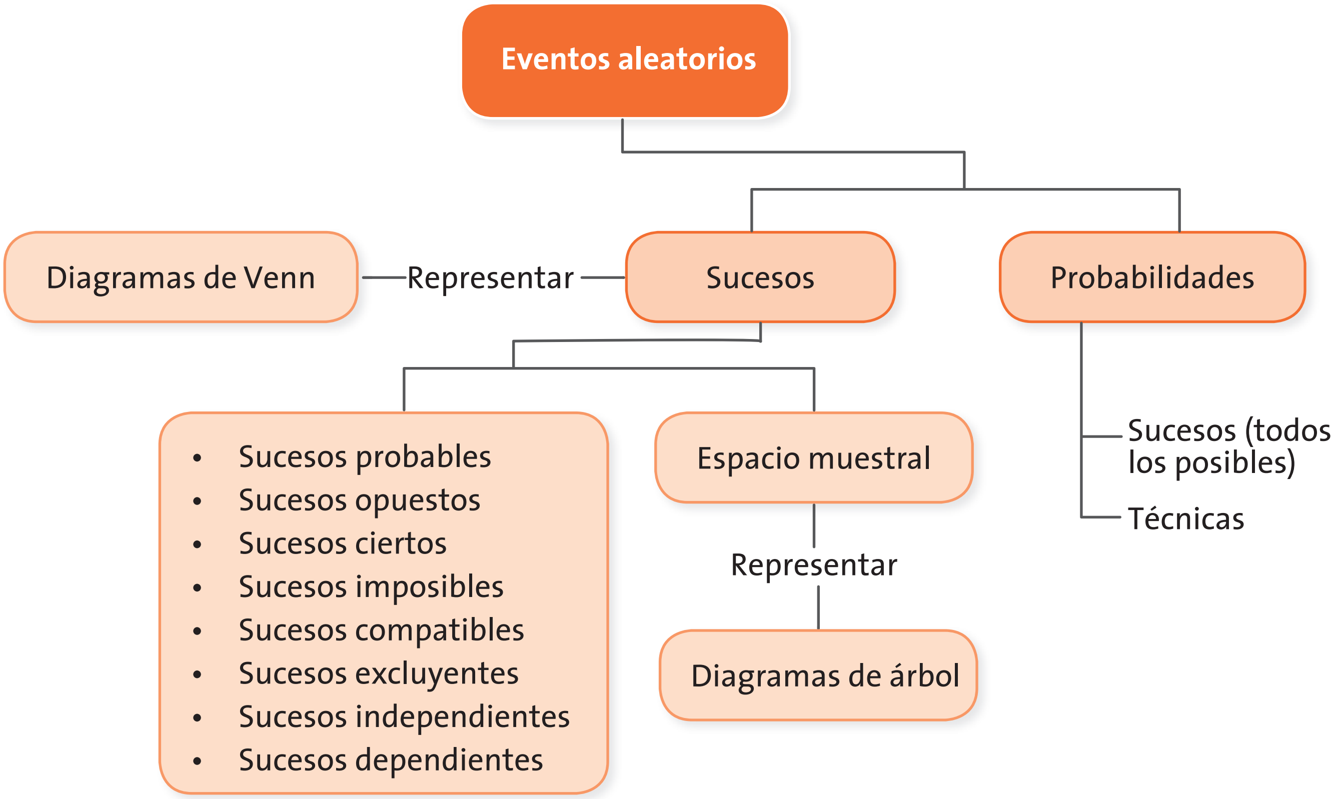
• El proceso de modelación, al representar situaciones de la vida cotidiana donde opera la probabilidad gráficamente, esquematizando información relevante para el desarrollo de las actividades propuestas. Al resolver las actividades propuestas por medio de la utilización de diagramas de árbol, listados, diagrama de Venn y demás técnicas de conteo.

• El proceso de razonamiento, al establecer relaciones entre las diferentes formas de conteo; al justificar y explicar coherentemente los resultados obtenidos mediante la aplicación de la probabilidad y al relacionar las reglas de la probabilidad con las diferentes situaciones de la vida cotidiana.

• El proceso de formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, al utilizar un modelo matemático probabilístico para el desarrollo de los problemas propuestos.</td></tr>
<tr><td>Guía 16.
Calculando probabilidades de varios eventos</td><td>Clases de eventos

Formas de calcular las probabilidades de eventos</td></tr>
</table>

El siguiente esquema te muestra la manera cómo se relacionan los conceptos en las diferentes guías.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Desde pequeños hemos vividos rodeados de todas aquellas cosas que el mundo nos ofrece, sin darnos cuenta de todos aquellos fenómenos están ligados al azar y que ciertos cálculos nos permitirían tomar decisiones más acertadas. La probabilidad es la encargada del estudio de los fenómenos aleatorios que día a día encontramos en nuestro entorno, como cuando nos preguntamos qué tan fácil es ganar el premio de una lotería, o qué posibilidades hay de que tu equipo favorito gane.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En el desarrollo del módulo se proponen diferentes momentos en los que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evidenciar y analizar los progresos que tuviste en cuanto al aprendizaje de los conceptos básicos relacionados con la probabilidad. En este módulo recorrerás un camino en el que recordarás y aplicarás conocimientos matemáticos anteriores a situaciones prácticas, y reconocerás nuevos conceptos y procedimientos útiles para tu vida; al final, podrás evidenciar qué conocimientos obtuviste, y analizarás las diversas formas y medios que utilizaste para resolver las actividades propuestas y la forma cómo interactuaste con el grupo.

Aplico lo aprendido y *Evaluación* son secciones que te proponen diferentes actividades, problemas y situaciones que te invitarán a poner en práctica tus conocimientos, así como a realizar trabajos individuales o grupales que retarán tus habilidades para expresar tus ideas y pensamientos.

Explora tus conocimientos

Mauricio es un campesino que vive en el oriente colombiano y ha vacunado a su ganado de la siguiente forma:

A. vacuna mixta triple a: 90 vacas

B. vacuna leptospira a: 38 vacas

C. vacuna brucella a: 37 vacas

D. vacunas mixta triple y leptospira a: 30 vacas

E. vacunas mixta y brocellas: 24 vacas

F. Vacas a las que les aplicaron las vacunas brocella y leptospira: 13

G. vacunas mixta, brocella y leptospira a: 10 vacas

- Representa la información de la vacunación en un diagrama de Venn. Cada uno de los enunciados tiene una letra para que identifiques los conjuntos.
- Responde:
    - » ¿Cuál es el total de vacas de esta muestra?
    - » ¿A cuántas vacas les han colocado la vacuna brucella y mixta triple pero no la leptospira?

Guía 15

Recordando la probabilidad de eventos

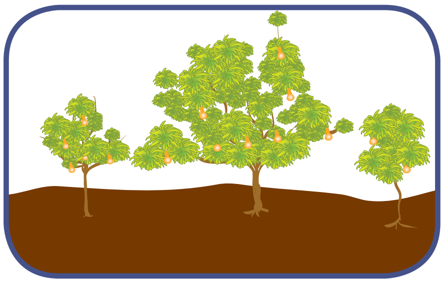
Estándar:

Pensamiento aleatorio

- Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

En el desarrollo de esta guía recordaremos algunos cálculos para determinar la probabilidad de un evento.

Lo que sabemos



Mauricio tiene en su finca tres tipos de aguacates: trapp, hass y reed. Si la cantidad de árboles de aguacate tipo trapp es el doble del de hass y el hass el doble del reed, en una muestra de 600 aguacates.

- ¿Cuál es la probabilidad de que Mauricio escoja un aguacate tipo reed?
- ¿Cuál la probabilidad de que escoja un aguacate tipo trapp?
- Compara con tus compañeros los resultados obtenidos.

Aprendamos algo nuevo

Mauricio está experimentando a colocarles música clásica a las vacas cuando las ordeña. Si su reproductor de música reproduce las pistas aleatoriamente y tiene en total doce pistas o canciones, ¿cuál será la probabilidad de que suene la pista número 7?

Veamos:
El espacio muestral de las pistas es P = {1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Al observar que la cantidad de casos posibles son 12; para determinar la probabilidad de que suene la pista número 7 se establece la razón 1 : 12.

Simbólicamente:

$$P(pista\ 7) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{12} = 0{,}083 = 8.33\%$$

La probabilidad que suene la pista número 7 es del 8.3%. En este caso, que suene la pista 7 es un evento o un caso del espacio muestral.

Recordemos relaciones que se dan al estudiar eventos aleatorios.

Un fenómeno o experimento se considera no determinístico o aleatorio, cuando hay más de un resultado posible y no se puede determinar cuál de ellos es posible que suceda.

Todos los posibles casos que corresponden a un fenómeno o experimento aleatorio definen un conjunto que se denomina espacio muestral.

Un evento es una de las posibilidades establecidas en el espacio muestral, aunque también se puede hablar de más de un evento, lo que determina un subconjunto del espacio muestral.

- Analicemos la situación de hallar la probabilidad de varios eventos de un espacio muestral.

Ejemplo1:

¿Cuál es la probabilidad de que la pista que suene sea una pista de número menor que 4?

Recordemos que el espacio muestral es

$$P = \{1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

y que las pistas que cumplen la condición son la 1, la 2 y la 3; es decir 3 de las 12. Por tanto la probabilidad es 3 : 12 (que es lo mismo que el 25%).

Esta situación también se puede resolver al hallar la probabilidad de cada una de las pistas y realizar su respectiva suma:

$$P(pista < 4) = P\,(pista = 1) + P\,(pista = 2) + P\,(pista = 3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = 0{,}25 = 25\%$$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la probabilidad de que la pista que suene no sea la número 10?

Una manera de resolverla es reconociendo que el espacio muestral son 12 casos posibles P = {1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} y que nos están preguntando son los eventos que suenen todas las pistas menos la 10, lo que corresponde a las pistas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 y 12. Lo que da 11 casos de los 12, Por lo tanto, la probabilidad es 11:12 (que es lo mismo que el 91.6%).

Otra forma lleva a reconocer que la probabilidad de que pasen todos los casos es 1 y se resta la probabilidad del caso de la pista 10 (1:12), lo que nos da:

$$P(pista \neq 10) = 1 - P\,(pista = 10) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{12 - 1}{12} = \frac{11}{12} = 0{,}916 = 91{,}6\%$$

Propiedad: La suma de todas las probabilidades de todos los casos posibles es igual a 1.

Entonces, la probabilidad para que no pase uno de esos sucesos es equivalente a establecer la diferencia entre el valor total de todos los casos posibles y la probabilidad del caso. Simbólicamente:

$$P(A') = 1 - P\,(A)$$

Donde *A'* hace referencia al caso contrario del evento *A*.

Esta propiedad también se puede escribir así:

$$P(A) + P(A') = 1$$

Recordemos lo siguiente:

La probabilidad de un evento es un número comprendido entre 0 y 1 que indica la medida de la posibilidad que este evento ocurra. Cuanto más cercano está el valor de la probabilidad a 1, mayor será la posibilidad de que ocurra. En el caso que la probabilidad sea 1, diremos que la posibilidad de ocurrencia del evento es seguro. Si la probabilidad de un evento es 0, diremos que la posibilidad de ocurrencia del evento es imposible.

La probabilidad de un evento es conocida como **Regla de Laplace**:

$$\textit{Probabilidad de un evento} = \frac{\textit{Número de casos favorables del evento}}{\textit{Número total de casos posibles}}$$

Ejercitemos lo aprendido

Trabajo en grupo

1. Mauricio tiene una ruleta dividida en 25 partes iguales, enumeradas del 1 al 25 como la que se muestra en la figura, con la que generalmente juega.

   Cuál es la probabilidad de que al girar la ruleta se obtenga:

   » el número 13.

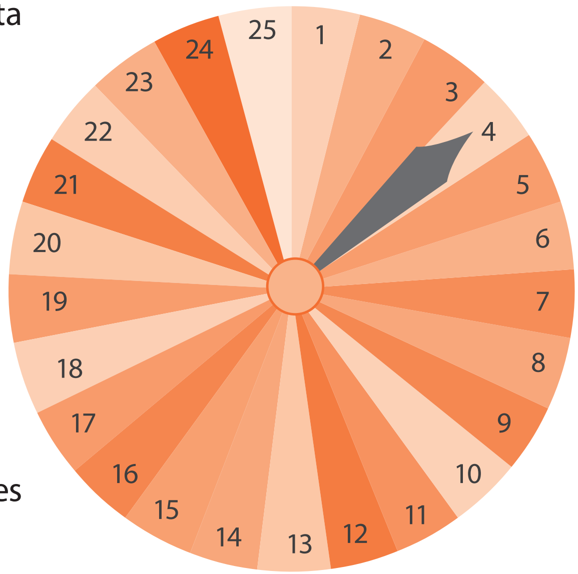
   » un número par.

   » un número impar.

   » un número mayor a 23.

   » un número menor o igual a 4.

   » un número diferente de 16.



2. En el lanzamiento de un dado de 8 caras, cuál es la probabilidad de que el resultado sea:

   » igual a 3.

   » un número par.

   » un número menor o igual a 2.

   » un número mayor o igual a 6.

   » no sea el número 8..

3. De una baraja española de 48 cartas se extrae una carta al azar. Cuál es la probabilidad de que el resultado sea:

   » una carta de copas.

   » una carta menor a 3.

   » una carta par.

Guía 16

Calculando probabilidades de varios eventos

Estándares:

Pensamiento aleatorio

- Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
- Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.
- Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.)

En esta guía avanzaremos en el cálculo de probabilidades de varios eventos o sucesos.

Lo que sabemos

Mauricio le puso a su finca el nombre COLMILLO. Si recorta las letras de esta palabra y las mete en una bolsa para sacar un papelito al azar, cuál es la probabilidad de que:

a. ¿Sea una vocal la letra que sale?

b. ¿Sea una consonante la letra que sale?

c. ¿No sea la letra C?

d. ¿Sea una letra L?

Aprendamos algo nuevo

Clases de eventos o sucesos

Los eventos a los que le calculamos la probabilidad de ocurrencia son sucesos que tienen ciertas características y se pueden clasificar de la siguiente forma:

- **Criterio 1**: Casos que ocurran. Salen dos clases: probables y opuestos.
  - » **Sucesos probables**: Son aquellos que son posibles de ocurrir en un fenómeno.
  - » **Sucesos opuestos**: Son aquellos que no van a ocurrir en el fenómeno.

  En el caso de las pistas, es un suceso probable que suene la pista 10 y que no suene la pista 10 es un suceso opuesto.

- **Criterio 2**: Simultaneidad de ocurrencia.
  - » **Sucesos compatibles**: Son aquellos que pueden suceder simultáneamente.
  - » **Sucesos excluyentes**: Son aquellos que sólo pueden ocurrir una vez.
- **Criterio 3**: Dependencia
  - » **Sucesos dependientes**: Son aquellos en que la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia de otro.
  - » **Sucesos independientes**: Son aquellos que la ocurrencia de uno no afecta a otros.

Calcular la probabilidad de sucesos o eventos compatibles

1. Retomemos la situación trabajada en otras guías sobre don Mauricio quien tiene cuatro frutas en una canasta y analicemos la probabilidad de que salga una fruta sin cáscara o que el nombre de dicha fruta tenga más de seis letras.

   E = {pera, manzana, naranja, granadilla}, Se consideran los siguientes sucesos:

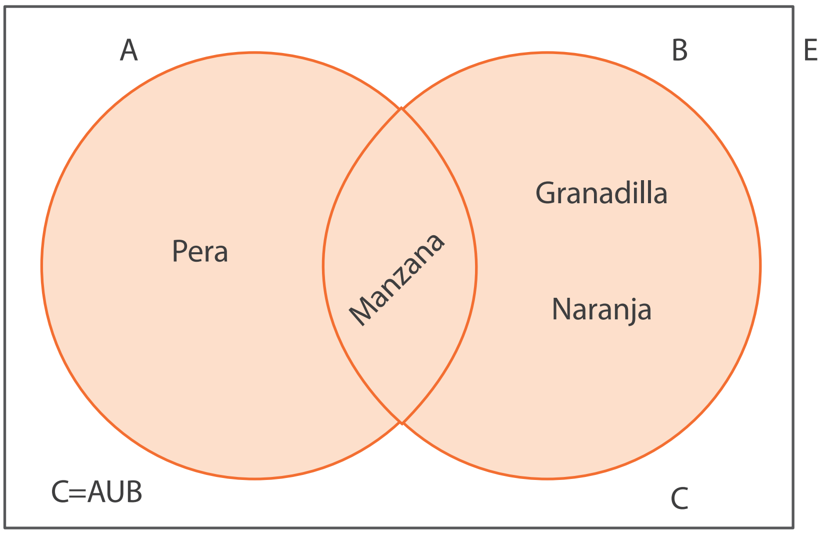
A= [Salir fruta sin concha o cáscara] = {pera, manzana}
B= [Salir fruta con más de 6 letras] = {granadilla, manzana, naranja}

Si se escribe el suceso:

AUB = C = [salir fruta sin cáscara o con más de 6 letras] = {pera, manzana, granadilla, naranja}

Cada uno de estos sucesos se puede representar por medio de un conjunto, y así generar un diagrama de Venn como el siguiente:

Diagrama de Venn unión:



Por lo tanto el evento C = A U B = [A o B]

La probabilidad asociada a este evento observando el diagrama de Venn será igual a:

$$P\ (\textit{salir fruta sin cascara o con mas de 6 letras}) = P(C) = \frac{\textit{Casos favorables}}{\textit{Casos posibles}} = \frac{4}{4} = 1 = 100\%$$

Dados dos sucesos, A o B, indagar sobre la probabilidad de ambos eventos es calcular la probabilidad de ocurrencia de la unión de los eventos de cada uno de los sucesos.

A U B "ocurre A o bien ocurre B o bien ocurren ambos a la vez".

2. Para el mismo experimento aleatorio de Mauricio de tomar una de las cuatro frutas de la canasta al azar, y cuyo espacio muestral es:

   E = {pera, manzana, naranja, granadilla}

   Se consideran los mismos sucesos:

   A= {Salir fruta sin concha o cascara} = {pera, manzana}
   B= {Salir fruta con más de 6 letras} = {granadilla, manzana, naranja}

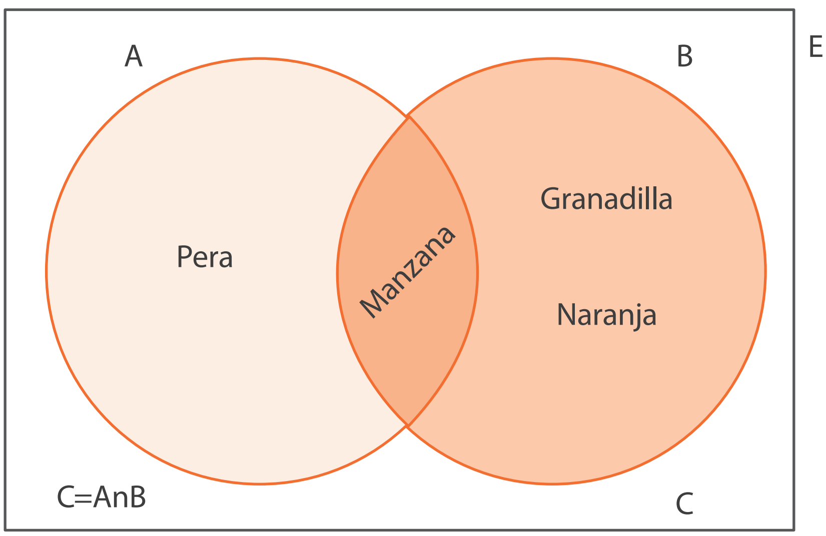
   Si se escribe el suceso:

   D = [salir fruta sin cáscara y con más de 6 letras] = {manzana}

   Por lo tanto el evento D = $A \cap B$ = [A y B]

   Cada uno de estos sucesos se puede representar por medio de un conjunto, y así generar un diagrama de Venn como el siguiente:

Diagrama de Venn intersección:



La probabilidad asociada a este evento observando el diagrama de Venn será igual a:

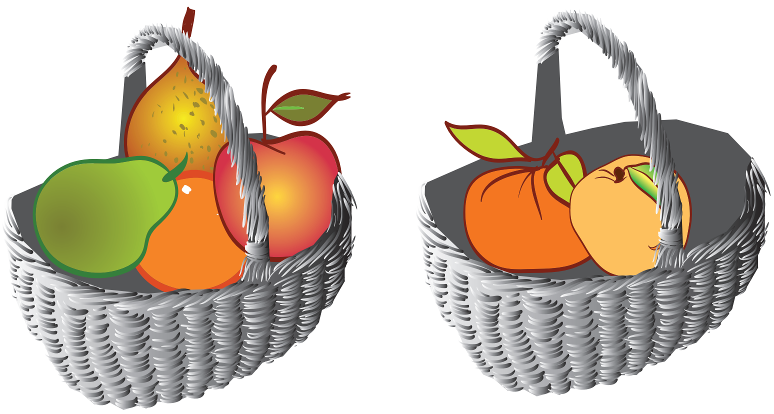
$$P\,(\textit{salir fruta sin cascara y con mas de 6 letras}) = P(D) = \frac{\textit{Casos favorables}}{\textit{Casos posibles}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se encuentran eventos que forman parte de los sucesos A y B.

Estos eventos son los que forman parte de la intersección de A con B.

$A \cap B$, es el evento que contiene a todos los elementos que son comunes a A y a B. Es decir, "ocurren A y B a la vez".

Imaginemos ahora que Mauricio tiene dos canastas:



Si ahora don Mauricio tiene otra canasta con dos frutas, durazno y mandarina y toma una fruta al azar de cada canasta, se da un caso de sucesos compatibles ya que ocurren al mismo tiempo.

El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio se representa en el siguiente diagrama de árbol:

Diagrama de árbol de las frutas

Canasta 1	Canasta 2	Espacio muestral
Manzana	Durazno	Manzana, Durazno
	Mandarina	Manzana, Mandarina
Pera	Durazno	Pera, Durazno
	Mandarina	Pera, Mandarina
Naranja	Durazno	Naranja, Durazno
	Mandarina	Naranja, Mandarina
Granadilla	Durazno	Granadilla, Durazno
	Mandarina	Granadilla, Mandarina

Si se pide calcular la posibilidad de que salga naranja o durazno cuando se seleccionen las frutas del canasto se tiene que:

El espacio muestral es:

E = {(manzana, durazno), (manzana, mandarina), (pera, durazno), (pera, mandarina), (naranja, durazno), (naranja, mandarina), (granadilla, durazno), (granadilla, mandarina)}

A: Una de las fruta salga naranja son 2 de los 8 casos.

B: Una de las fruta salga durazno son 4 de los 8 casos.

$P(A) = \frac{2}{8}$ y $P(B) = \frac{4}{8}$ debemos encontrar la probabilidad de la intersección de $A \cap B$

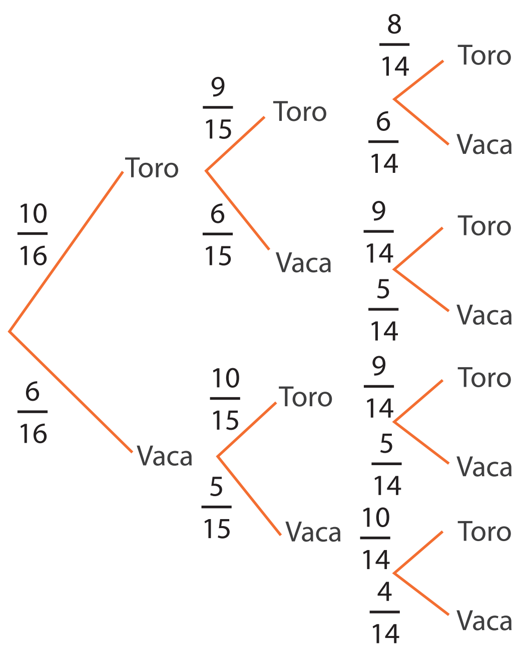
$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$

Estos dos **eventos se dicen independientes** ya que el tomar una fruta de una canasta y de la otra canasta, la realización del primer evento no condiciona o afecta la realización del segundo evento.

Mauricio tiene en su establo seis vacas y diez toros. Si desea escoger sólo tres de estos animales al azar para vacunar, ¿cuál será la probabilidad de seleccionar tres toros?

Para dar solución a este experimento aleatorio, Mauricio se basó en el siguiente diagrama de árbol:

Diagrama de árbol de animales



Basados en el diagrama de árbol, obtenemos:

- La probabilidad de seleccionar el primer toro es $\frac{10}{16}$.
- La probabilidad de seleccionar el segundo toro es uno menos, ya que se seleccionó el primero quedando $\frac{9}{15}$.

- La probabilidad de seleccionar el tercer toro es dos menos, ya que se han seleccionado dos, quedando $\frac{8}{14}$.

Para hallar la probabilidad de eventos dependientes, se calcula multiplicando el valor de cada una de las probabilidades.

$$P(3\ toros) = \frac{10}{16} \times \frac{9}{15} \times \frac{8}{14} = 0{,}21 = 21\%$$

La probabilidad de que Mauricio seleccione tres toros es del 21%.

¿Cuál será la probabilidad de seleccionar dos toros y una vaca?

Basados en el diagrama de árbol, obtenemos:

$$P(2\ toros\ y\ una\ vaca) = \left(\frac{10}{16} \times \frac{9}{15} \times \frac{6}{14}\right) + \left(\frac{10}{16} \times \frac{6}{15} \times \frac{9}{14}\right) + \left(\frac{6}{16} \times \frac{10}{15} \times \frac{9}{14}\right) = 0{,}48 = 48\%$$

Mira con atención la siguiente tabla que muestra los tipos de pollos y gallinas que tiene don Mauricio en su corral.

Información de pollos y gallinas

	Pollos	Gallinas	Total
Blanco (a)	145	42	187
Negro (a)	51	96	147
TOTAL	196	138	334

Supongamos que este corral sólo tiene una puerta y que por ella sólo cabe uno de estos animales a la vez. Si Mauricio abre la puerta, ¿cuál es la probabilidad de que el primer animal que salga sea blanco si se sabe que fue un pollo?

Sea el evento A: pollo y el evento B: blanco

La probabilidad pedida es: $\frac{145}{196}$ pues hay 196 pollos de los cuales 145 son blancos.

Al utilizar la tabla y mirar el espacio muestral asociado a este evento podemos decir:

$$P(A) = \frac{196}{334}$$

$$P(A \cap B) = \frac{145}{334}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{145}{334}}{\frac{196}{334}} = \frac{145}{196} = 0{,}739 = 73{,}9\%$$

Esta probabilidad es la que llamamos **probabilidad condicionada** del suceso B respecto al suceso A. Dicho de otro modo, la probabilidad condicionada de un suceso B respecto de otro A es la probabilidad del suceso B sabiendo que previamente ha ocurrido el suceso A (En este caso, se dice que los eventos son dependientes).

Se llama probabilidad condicionada del suceso B respecto del suceso A, y lo denotamos por $P(B|A)$, al cociente:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{Si } P(A) \neq 0$$

Análogamente se define $P(B|A)$.

De lo anterior se deducen claramente las siguientes relaciones:

$P(A \cap B) = P(B) \, x \, P(A|B)$
$P(B \cap A) = P(A) \, x \, P(B|A)$
$P(A \cap B) = P(B \cap A)$

De una canasta que contiene nueve manzanas rojas y cinco verdes, Mauricio extrae sucesivamente dos manzanas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a. Que las dos manzanas sean verdes.

Para dar solución a esta pregunta, se asume:

Sea el evento A: Sacar la 1ª manzana verde y el evento B: Sacar la 2ª manzana verde, entonces:

$$P(A \cap B) = P(B)\ x\ P(A \mid B) = \frac{5}{14} \times \frac{4}{13} = \frac{10}{91} = 0{,}109 = 10{,}9\%$$

b. Que las dos manzanas sean rojas.

Para dar solución a esta pregunta, se asume:

Sea el evento A: Sacar la 1ª manzana roja y el evento B: Sacar la 2ª manzana roja, entonces:

$$P(A \cap B) = P(B)\ x\ P(A \mid B) = \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{36}{91} = 0{,}395 = 39{,}5\%$$

c. Que la segunda manzana sea roja sabiendo que la primera fue verde.

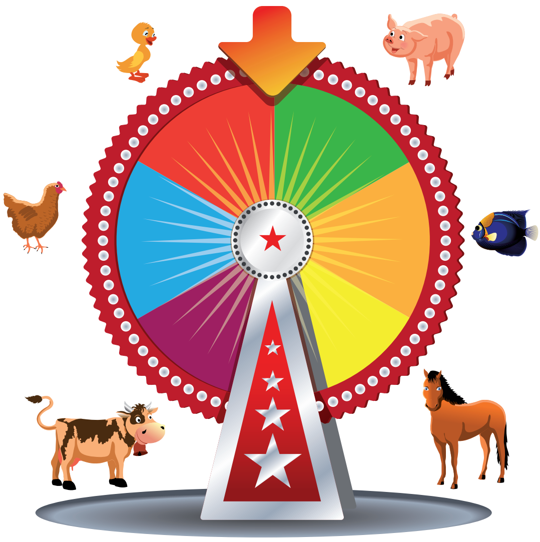
Para dar solución a esta pregunta, se asume:

Sea el evento A: Sacar la 1ª manzana verde y sea el evento B: Sacar la 2ª manzana roja, entonces:

$$P(A \cap B) = P(B)\ x\ P(A \mid B) = \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{45}{182} = 0{,}247 = 24{,}7\%$$

Hay que tener en cuenta: que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

1. Imaginemos ahora que Mauricio tiene dos ruletas como lo muestra la figura:



Ruleta I

Ruleta II

La ruleta I que tiene seis divisiones para saber cuál animal alimentar y la ruleta II tiene tres divisiones iguales, para saber cuál sombrero se pondrá por día. Si Mauricio girara las dos ruletas al tiempo:

» ¿Este sería un experimento aleatorio? ¿Por qué?

» ¿Cuál será el espacio muestral del experimento?

» ¿Estos eventos serán independientes? ¿Por qué?

» Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a este experimento.

» ¿Cuál será la probabilidad de alimentar los patos con el sombrero negro?

» ¿Cuál será la probabilidad de alimentar los peces con el sombrero café?

2. Mauricio tiene en un corral tres pollos, cuatro gallinas y dos pollitos. Si desea escoger al azar solo tres de estos animales para alimentar.
   - Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a este experimento aleatorio.
   - ¿Cuál será la probabilidad de seleccionar tres pollos?
   - ¿Cuál será la probabilidad de seleccionar un pollo, una gallina y un pollito?
3. Realiza el experimento de lanzar dos monedas al aire.
   - Escribe los resultados que obtuviste; verifica y calcula la probabilidad de obtener dos sellos.
4. En una caja hay cinco baterías, de las cuales una está defectuosa. Con el objeto de efectuar un control de calidad, se sacan dos baterías, al azar, y se prueban.
   - ¿Cuál es la probabilidad de obtener la defectuosa?
   - ¿Cuál es la probabilidad de no obtener la defectuosa?
5. En una caja de caramelos hay diez de menta, seis de fresa y cinco de anís. Se escoge un caramelo al azar. Halla la probabilidad de que el caramelo:
   - Sea de menta
   - Sea de menta o de anís
   - No sea de anís
   - Sea de menta o de fresa
6. Experimenta con un dado de seis caras y una moneda, lánzalos al mismo tiempo en repetidas ocasiones. Escribe los resultados que obtuviste:
   - ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara y un número par, experimentalmente?
   - ¿Este resultado cumple con la probabilidad teórica?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que salga sello y el número dos?
   - ¿Este resultado cumple con la probabilidad teórica?
7. Un árbol tiene una probabilidad de 0,7 de ser trasladado de parcela, y la probabilidad de ser trasladado y podado es de 0,6. Calcula:
   - La probabilidad de ser podado, en el supuesto de que haya sido trasladado.
   - La probabilidad de que no sea podado, en el supuesto de que haya sido trasladado.

Apliquemos lo aprendido

1. Realiza el experimento de lanzar tres monedas al aire (mínimo 20 veces). Escribe los resultados que obtuviste. Define los siguientes sucesos y calcula su probabilidad:

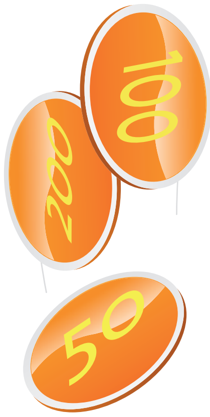
   » No salir ningún sello.

   » Salir más de una cara.

   » Salir como mínimo dos caras.

   » No salir ninguna cara.

   » Salir tres sellos.



   Compara los resultados prácticos con los resultados teóricos y concluye respecto a cada enunciado.

2. Realiza el experimento de lanzar dos dados de seis caras y escribe los resultados que obtuviste.

   » ¿Cuál es su espacio muestral?

   » ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea un número par?

   » ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea uno o dos?

   » ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea el número 12?

   » ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea menor o igual a 4?

   » ¿Son consecuentes estas probabilidades con los resultados que obtuviste experimentalmente? Justifica.

3. Comprueba experimentalmente con dos dados, que es más probable obtener un número que sumado de 8, que un número que sumado de 12 o 2. ¿Por qué? Demuestra esto teóricamente.

4. Consideremos el experimento aleatorio de sacar una bola de una urna, que contiene dos bolas rojas, tres blancas y dos negras. Define los siguientes sucesos siguientes y calcula su probabilidad:

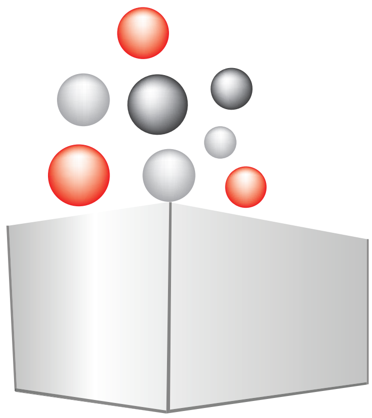
   » Salir una bola blanca.

   » No salir negra.

   » Salir roja o negra.

   » Salir blanca o roja.

   » No salir ni blanca, ni roja.



Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

A un consultorio médico ingresan, generalmente por la mañana, tres pacientes con dolor de cabeza, ocho con escalofríos y tres con fiebre, y por la tarde dos con dolor de cabeza, tres con escalofríos y una con fiebre. Como lo presenta la siguiente tabla:

Información de los pacientes

	Dolor de cabeza	Escalofríos	Fiebre
Mañana	3	8	3
Tarde	2	3	1

Con la información anterior, calcula:

1. El porcentaje de los pacientes que acuden al consultorio por la tarde.

   a. 20%
   b. 30%
   c. 40%
   d. 50%

2. El porcentaje de los pacientes que acuden al consultorio por escalofríos.

   a. 45%
   b. 50%
   c. 55%
   d. 65%

3. La probabilidad de que un paciente con dolor de cabeza acuda al consultorio por la mañana.

   a. 60%
   b. 50%
   c. 55%
   d. 45%

4. La probabilidad de que un paciente con fiebre acuda al consultorio por la tarde.

   a. 45%
   b. 40%
   c. 35%
   d. 25%

De acuerdo con el trabajo realizado a lo largo de este módulo, responde:

- De todas las actividades propuestas, ¿cuál fue la que más se te facilitó y por qué?
- ¿Cuál fue la que más se te dificultó y por qué?
- ¿Qué herramientas utilizaste para buscar la solución a la actividad que más se te dificultó?
- ¿Pudiste solucionar todas las actividades propuestas? Argumenta tu respuesta.

Reúnete con otro compañero, escoge una de las actividades desarrolladas en la guía y explícale cómo lograste dar solución a dicha actividad. Luego pídele a tu compañero que haga lo mismo.

¿Cómo me ven los demás?

1. Formen grupos de cuatro personas y en una urna ingresen diez pimpones enumerados del 1 al 10. Un voluntario sacará al azar un pimpón. Escriban en su cuaderno:

   » ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor a 4?

   » ¿Cuál la de obtener un número diferente de 3?

   » ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor o igual a 8?

   » Ingresen el pimpón nuevamente a la urna y repitan diez veces el experimento. ¿Es coherente lo obtenido en la práctica con los resultados teóricos?

   » Comparen los resultados obtenidos con los de otros grupos de compañeros, revisen entre todos que los resultados obtenidos sean coherentes.

2. Formen grupos de tres personas y en una urna ingresen diez pimpones de diferentes colores y numerados de la siguiente manera: 1 y 5, verdes; 2, 3, 4, 6 y 7, rojos; 8,9 y 10, azules. Un voluntario extraerá un pimpón al azar, calculen la probabilidad de que salga:

   » Rojo

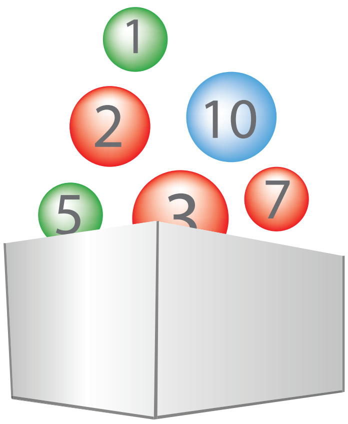
   » Verde

   » Mayor que 3

   » Rojo y mayor que 3

   » Verde o azul

   » Azul y par



   » Ingresen el pimpón nuevamente a la urna y repitan 10 veces el experimento. ¿Es coherente lo obtenido en la práctica con los resultados teóricos?

   » Comparen los resultados obtenidos con los de otros grupos de compañeros, revisen entre todos que los resultados obtenidos sean coherentes.

3. Formen grupos de dos personas, recorten las letras de la palabra PROBABILIDAD e ingrésenlas en una bolsa. Un voluntario tomará una letra al azar, calculen la probabilidad de que:

   » Sea una vocal

   » Sea una consonante

   » No sea una B

   » Sea una D

Ingresen la letra nuevamente a la bolsa y repitan diez veces el experimento. ¿Es coherente lo obtenido en la práctica con los resultados teóricos?

Comparen los resultados obtenidos con los de otros grupos de compañeros, revisen entre todos que los resultados obtenidos sean coherentes.

De acuerdo al trabajo realizado a lo largo de este módulo, responde.

- ¿La mayoría de actividades las desarrollaste en grupo o individualmente?
- ¿Consideras que es más fácil trabajar en grupo o individualmente? Argumenta tu respuesta.
- Escribe por lo menos tres ventajas de trabajar en grupo.
- Escoge una de las actividades que hayas desarrollado en grupo y elabora un cuadro en el que indiques el aporte de cada integrante a la solución del problema, incluyéndote a ti mismo. Puedes utilizar como guía el siguiente cuadro:

Problema:	
Integrante	Aporte a la solución
A	
B	
C	
YO	

¿Qué aprendí?

Completa la siguiente tabla, marcando con una X cada uno de los aspectos desarrollados durante el módulo, teniendo en cuenta todo lo que aprendiste.

	Sí	No	A veces	Justificación
Identifico el espacio muestral de un experimento aleatorio.				
Reconozco los diferentes eventos.				
Calculo la probabilidad de cualquier evento.				
Represento mediante diagramas de árbol, diversos experimentos aleatorios con su correspondiente espacio muestral y la probabilidad de algún evento.				
Trabajo activamente en grupo y respeto la opinión de mis compañeros.				
Soy perseverante en dar solución a los problemas planteados.				
Utilizo diversas herramientas para resolver los problemas planteados.				
Trabajo activamente en grupo y respeto la opinión de mis compañeros.				
Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Aporto en las actividades que son trabajo en grupo.				
Soy tolerante con las diferencias de opinión cuando trabajo en grupo.				

Determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento con tu maestro.

Módulo 6

Apoyándonos en nuevas herramientas

¿Qué vas a aprender?

En algunas ocasiones necesitamos realizar un análisis estadístico de muchos datos que al hacerlos de manera analítica, corremos el riesgo de equivocarnos y de invertir más tiempo del previsto para esta actividad; algo semejante ocurre cuando deseamos realizar el cálculo de una expresión que contenga una función exponencial o logarítmica.

Además, en algunos casos, es necesario dibujar muchas figuras geométricas o graficar familias de funciones para evidenciar algún comportamiento; estos son apenas unos ejemplos que admiten y justifican el uso que se puede dar a programas de computadoras y calculadoras y que a su vez permiten alcanzar algunos de los estándares básicos de competencias propuestos para este grado.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

Pensamiento aleatorio

- Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.

Pensamiento variacional

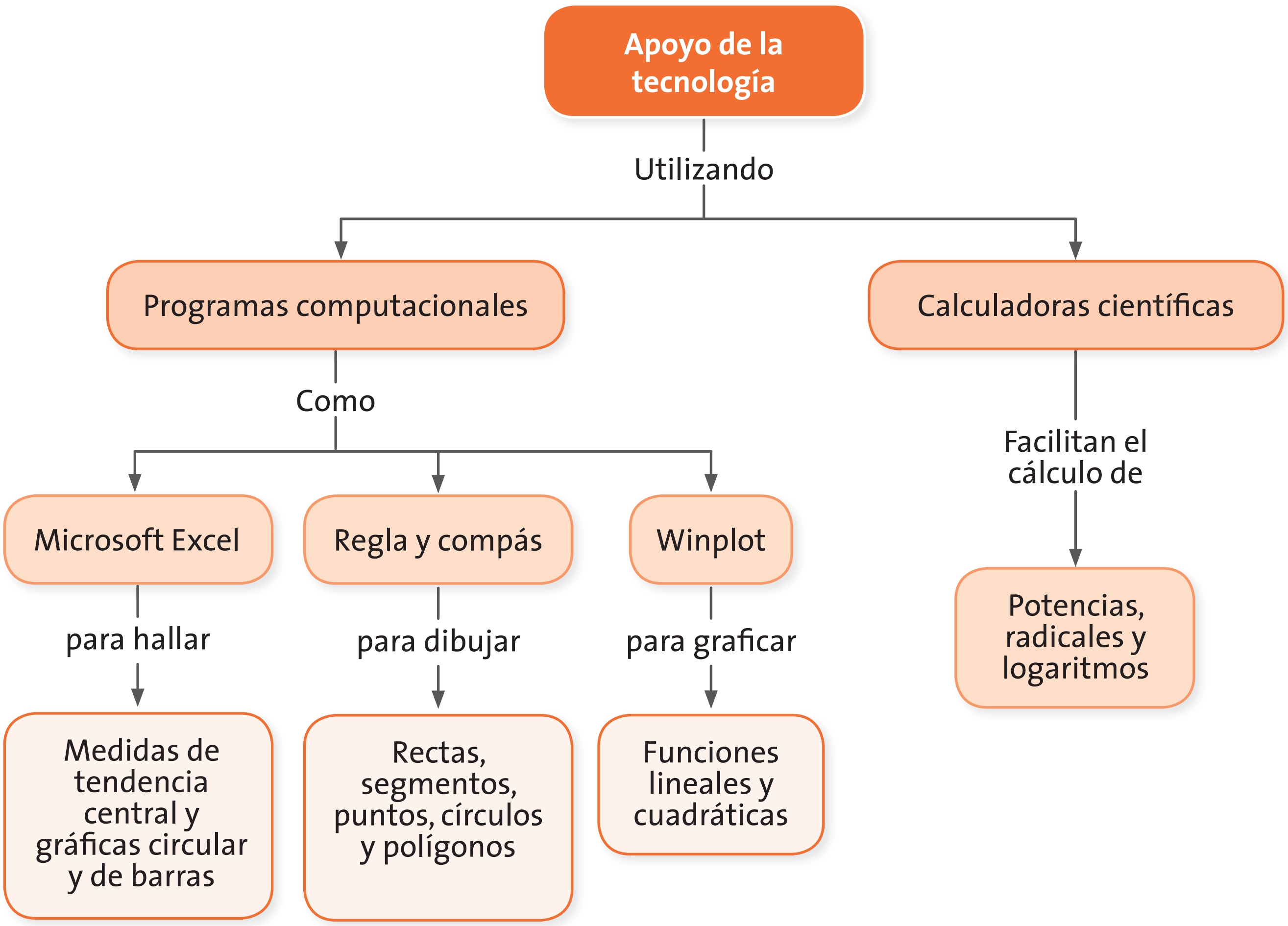
- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

- Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a las familia de funciones polinómicas.

Este módulo te ayudará a afianzar los estándares básicos de competencias mencionados anteriormente, mediante el manejo de herramientas como calculadoras y programas de computadoras. En la siguiente tabla se especifican las guías que contiene el módulo y los temas que se desarrollan en cada una de ellas.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 17.
Ayudas tecnológicas para calcular medidas de tendencia</td><td>Uso de Microsoft, Excel para el cálculo de las medidas de tendencia central media, mediana y moda</td><td rowspan="3">• Se favorecen el proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas, al resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando herramientas tecnológicas como la calculadora y programas computacionales, reconociendo las ventajas de cada uno de estos.
• El proceso de modelación, al representar y organizar información por medio de hojas de cálculo, tablas y gráficas que posibilitan los programas computacionales y al construir fórmulas que representan situaciones de la vida cotidiana en la calculadora y programas computacionales.
• El proceso de comunicación, al relacionar las diferentes situaciones de la vida cotidiana propuestas con fórmulas y diagramas que encontramos en programas computacionales con Excel.
• El proceso de formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, al establecer rutinas y practicar pasos para ejecutar actividades de manera más sencilla, por medio de ayudas tecnológicas y al realizar operaciones con la calculadora y el computador.
• El proceso de razonamiento, al establecer relaciones entre las operaciones y resultados obtenidos por medio de las ayudas tecnológicas y los obtenidos sin ellas y al reconocer diferentes formas de realizar procedimientos y entender ventajas y desventajas de los mismos.</td></tr>
<tr><td>Guía 18.
¡Calculando, ando!</td><td>Manejo de calculadoras científicas en la potenciación, radicación y logaritmación.</td></tr>
<tr><td>Guía 19.
¡Graficando con ayuda!</td><td>Uso de programas computacionales como regla y compás en geometría y Winplot en la graficación de funciones lineales y cuadráticas</td></tr>
</table>

El siguiente esquema te muestra la manera en que se pueden relacionar los conceptos.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

El aporte hecho por la tecnología, es sin lugar a dudas una gran herramienta y un buen soporte con el que podemos contar cuando nos encontremos en situaciones en las que es necesario realizar operaciones complejas y exactas; procedimientos demasiado largos o representaciones gráficas con mucho detalle; en estas ocasiones es útil tener claro el manejo de herramientas que nos faciliten dichos cálculos, ya sean programas de computadoras o calculadoras. Estas herramientas permiten afianzar, y en ocasiones aclarar, los conocimientos adquiridos.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En el desarrollo del módulo se proponen diferentes momentos en los que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evidenciar y analizar los progresos en los aprendizajes de los conceptos básicos y su relación con el apoyo dado por la tecnología.

Además encontrarás dos secciones: *Ejercito lo aprendido* y *Evaluación*, en las que se proponen diferentes actividades, problemas y situaciones que te invitarán a poner en práctica tus conocimientos o a realizar trabajos individuales o grupales que retarán tus habilidades en el manejo de la tecnología.

Explora tus conocimientos

Seguramente has escuchado que "*La Orquídea es la flor nacional*". Concretamente, la variedad denominada *Cattleya Trianae*. Lleva este nombre en honor del naturalista colombiano José Jerónimo Triana.

La siguiente tabla muestra el pago por día que se dio a varios cultivadores dependiendo del género de orquídea que sembró, así como la cantidad de días trabajados durante el mes.

	A	B	C	D
1	Genero de la orquidea	Pago por día	Días trabajados	Sueldo
2	Cymbidium	20000	25	
3	Dendrobium	19000	27	
4	Oncidium	21000	15	
5	Phalaenopsis	24000	30	
6	Paphiopediliom	27000	21	
7	Total			

Utiliza una calculadora o copia la tabla anterior en una hoja de Microsoft office Excel u Open Office y responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto se pagó por el total del cultivo de todas las orquídeas?
- ¿Cuántos días trabajaron todos los cultivadores?
- ¿Cuánto dinero se paga por un día trabajado?

Guía 17

Ayudas tecnológicas para calcular medidas de tendencia central

Estándares:

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

Pensamiento aleatorio

- Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.

Puede resultar tedioso y complejo calcular las medidas de tendencia central cuando contamos con muchos datos, en estos casos podemos ayudarnos con programas computacionales que ahorren tiempo y brinden una gran exactitud. La guía que trabajarás a continuación, te dará una corta introducción sobre cómo hallar estas medidas de tendencia central, así como generar gráficas circulares utilizando el programa Microsoft Excel. Si no cuentas con esta herramienta puedes hallar una similar en el paquete de oficina Open Office que es gratuito.

Lo que sabemos

Sobre el café

El café de Colombia es conocido por su sabor y suavidad.

Un cultivador del eje cafetero ha sembrado algunas variedades del café Arábica que se encuentran en Colombia; en la siguiente tabla se encuentra una relación entre los tipos o clases de café y la cantidad en gramos que se produce en su finca mensualmente:

	A	B
1	**Tipo o clase de café**	**Cantidad en kg**
2	*Typica*	230
3	*Común*	190
4	*Bourbon*	245
5	*Caturra*	210
6	*Colombia*	250
7	*Maragogipe*	170
8	Total	?
9	Promedio	?

Copia la anterior tabla en una hoja de Microsoft Office Excel, complétala tabla y calcula:

- La cantidad de kilogramos de café que produce la finca.
- El promedio de la cantidad de kilogramos de café.

Aprendamos algo nuevo

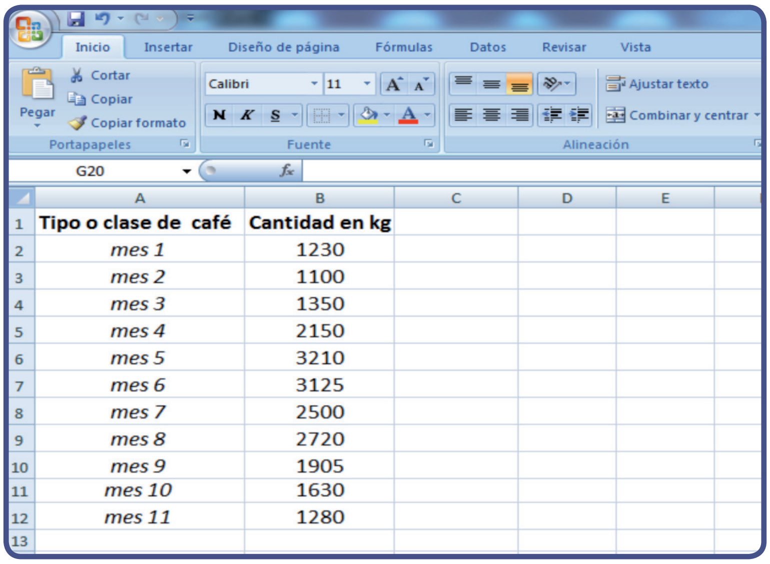
Supongamos ahora que este cultivador lleva una tabla como la siguiente en la cual ha relacionado la producción de todos los tipos de café que ha dado su finca en los últimos once meses:

Tipo o clase de café	Cantidad en kg
mes 1	1.230
mes 2	1.100
mes 3	1.350
mes 4	2.150
mes 5	3.210
mes 6	3.125
mes 7	2.500
mes 8	2.720
mes 9	1.905
mes 10	1.630
mes 11	1.280

Requiere conocer cuánto ha sido la producción total de café de estos once meses, así como la máxima y la mínima producción; además le interesa saber cuál ha sido la producción media o promedio de café en estos meses y conocer las otras medidas de tendencia central como la moda y la mediana.

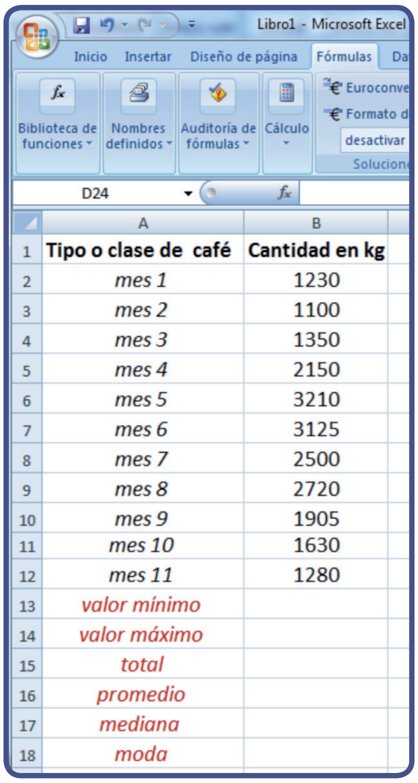
En una hoja de Excel se pueden seguir los siguientes pasos:

Abre la hoja de cálculo que presenta Microsoft Office Excel u open office:



	A	B
1	Tipo o clase de café	Cantidad en kg
2	mes 1	1230
3	mes 2	1100
4	mes 3	1350
5	mes 4	2150
6	mes 5	3210
7	mes 6	3125
8	mes 7	2500
9	mes 8	2720
10	mes 9	1905
11	mes 10	1630
12	mes 11	1280

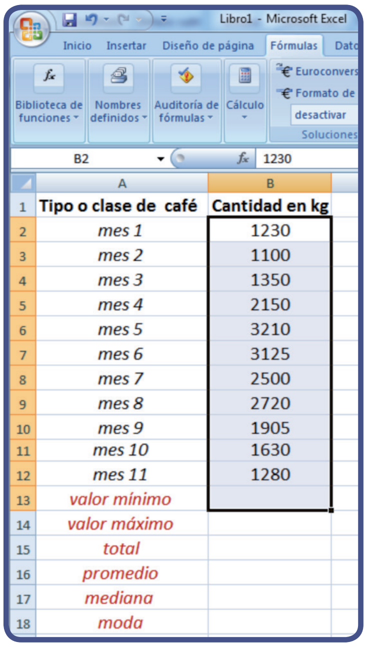
Paso 1: Copia los datos de la tabla en una hoja de Excel como lo muestra la figura:



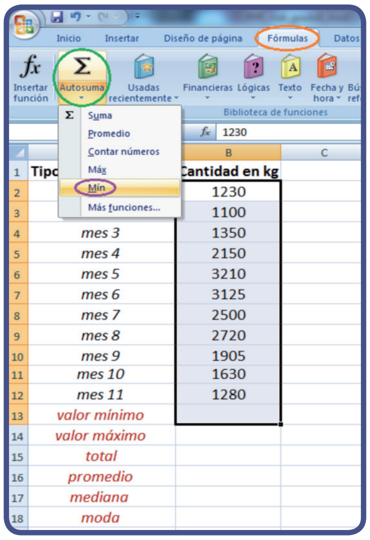
	A	B
1	Tipo o clase de café	Cantidad en kg
2	mes 1	1230
3	mes 2	1100
4	mes 3	1350
5	mes 4	2150
6	mes 5	3210
7	mes 6	3125
8	mes 7	2500
9	mes 8	2720
10	mes 9	1905
11	mes 10	1630
12	mes 11	1280
13	valor mínimo	
14	valor máximo	
15	total	
16	promedio	
17	mediana	
18	moda	

Paso 2: Agrega, en la parte inferior, las incógnitas o variables a hallar. Por comodidad, es recomendable asignar otro color a la fuente o letra; en este caso puede ser así:

Paso 3: Para hallar el valor mínimo, solamente hay que seleccionar los datos de interés, incluyendo la casilla que está frente al valor mínimo, así:



Seguido de esto vamos a Fórmulas -> Autosuma -> Min; así:

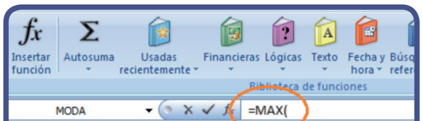


Y obtendremos el valor, así:

	A	B
1	**Tipo o clase de café**	**Cantidad en kg**
2	*mes 1*	1230
3	*mes 2*	1100
4	*mes 3*	1350
5	*mes 4*	2150
6	*mes 5*	3210
7	*mes 6*	3125
8	*mes 7*	2500
9	*mes 8*	2720
10	*mes 9*	1905
11	*mes 10*	1630
12	*mes 11*	1280
13	*valor mínimo*	1100
14	*valor máximo*	
15	*total*	
16	*promedio*	
17	*mediana*	
18	*moda*	

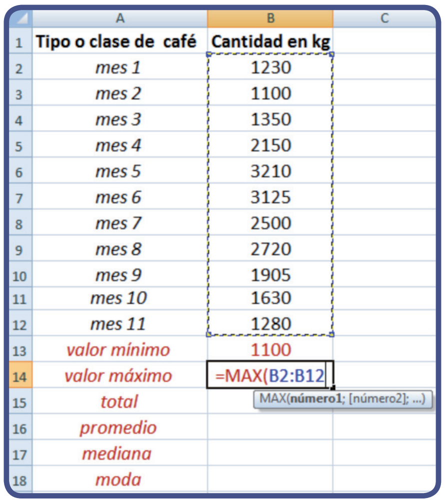
Como podemos verificar en la tabla 1,100 es el menor valor de toda la producción.

Paso 4: Para hallar el valor máximo, se puede realizar un procedimiento similar al anterior, o simplemente ubicarse frente a la casilla en la cual colocamos valor máximo y colocamos un signo igual; seguido de este escribimos MAX y abrimos paréntesis, así:



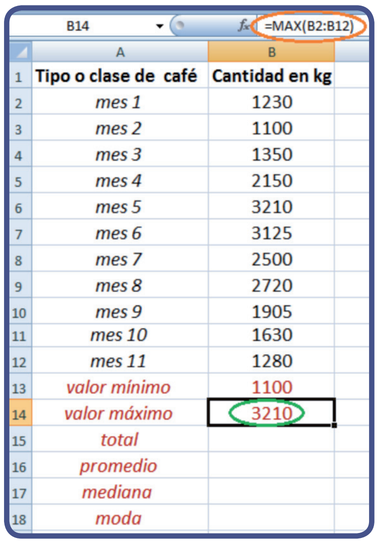
	A	B	C
1	**Tipo o clase de café**	**Cantidad en kg**	
2	*mes 1*	1230	
3	*mes 2*	1100	
4	*mes 3*	1350	
5	*mes 4*	2150	
6	*mes 5*	3210	
7	*mes 6*	3125	
8	*mes 7*	2500	
9	*mes 8*	2720	
10	*mes 9*	1905	
11	*mes 10*	1630	
12	*mes 11*	1280	
13	*valor mínimo*	1100	
14	*valor máximo*	=MAX(	
15	*total*	MAX(**número1**; [número2]; ...)	
16	*promedio*		
17	*mediana*		
18	*moda*		

Seguido de esto, seleccionamos los datos de interés así:



	A	B	C
1	Tipo o clase de café	Cantidad en kg	
2	mes 1	1230	
3	mes 2	1100	
4	mes 3	1350	
5	mes 4	2150	
6	mes 5	3210	
7	mes 6	3125	
8	mes 7	2500	
9	mes 8	2720	
10	mes 9	1905	
11	mes 10	1630	
12	mes 11	1280	
13	valor mínimo	1100	
14	valor máximo	=MAX(B2:B12	
15	total	MAX(número1; [número2]; ...)	
16	promedio		
17	mediana		
18	moda		

Cerramos el paréntesis y presionamos la tecla enter, y obtendremos el máximo valor de la producción de estos meses:



B14 f_x =MAX(B2:B12)

	A	B
1	Tipo o clase de café	Cantidad en kg
2	mes 1	1230
3	mes 2	1100
4	mes 3	1350
5	mes 4	2150
6	mes 5	3210
7	mes 6	3125
8	mes 7	2500
9	mes 8	2720
10	mes 9	1905
11	mes 10	1630
12	mes 11	1280
13	valor mínimo	1100
14	valor máximo	3210
15	total	
16	promedio	
17	mediana	
18	moda	

Se puede apreciar que el valor máximo de la producción de café en estos once meses fue 3.210 kg.

Paso 5: Para hallar el total de la producción en estos once meses, se puede utilizar la función de autosuma o como en el paso anterior, escribir igual frente a la casilla que dice total y seguido de este escribir SUMA y abrir paréntesis, así:

MAX =SUMA(

	A	B	C
1	**Tipo o clase de café**	**Cantidad en kg**	
2	*mes 1*	1230	
3	*mes 2*	1100	
4	*mes 3*	1350	
5	*mes 4*	2150	
6	*mes 5*	3210	
7	*mes 6*	3125	
8	*mes 7*	2500	
9	*mes 8*	2720	
10	*mes 9*	1905	
11	*mes 10*	1630	
12	*mes 11*	1280	
13	*valor mínimo*	1100	
14	*valor máximo*	3210	
15	*total*	=SUMA(	
16	*promedio*	SUMA(**número1**; [número2]; ...)	
17	*mediana*		
18	*moda*		

Enseguida, seleccionamos los datos de interés, así:

MAX =SUMA(B2:B12

	A	B	C
1	**Tipo o clase de café**	**Cantidad en kg**	
2	*mes 1*	1230	
3	*mes 2*	1100	
4	*mes 3*	1350	
5	*mes 4*	2150	
6	*mes 5*	3210	
7	*mes 6*	3125	
8	*mes 7*	2500	
9	*mes 8*	2720	
10	*mes 9*	1905	
11	*mes 10*	1630	
12	*mes 11*	1280	
13	*valor mínimo*	1100	
14	*valor máximo*	3210	
15	*total*	=SUMA(B2:B12	
16	*promedio*	SUMA(**número1**; [número2]; ...)	
17	*mediana*		
18	*moda*		

Al cerrar el paréntesis y presionar enter, obtendremos el total de toda la producción en estos once meses, así:

1	Tipo o clase de café	Cantidad en kg
2	*mes 1*	1230
3	*mes 2*	1100
4	*mes 3*	1350
5	*mes 4*	2150
6	*mes 5*	3210
7	*mes 6*	3125
8	*mes 7*	2500
9	*mes 8*	2720
10	*mes 9*	1905
11	*mes 10*	1630
12	*mes 11*	1280
13	*valor mínimo*	1100
14	*valor máximo*	3210
15	*total*	22200
16	*promedio*	
17	*mediana*	
18	*moda*	

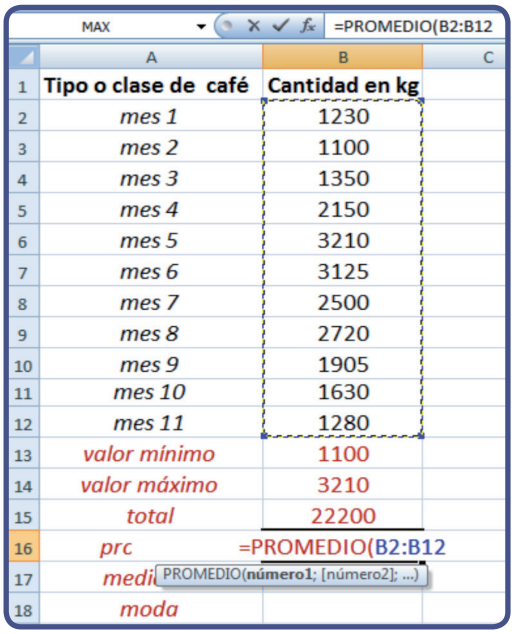
Con este resultado sabemos que en los once meses se produjeron 22.200 kg de café.

Paso 6: Para hallar la media o el promedio de la producción de café en estos once meses, se puede utilizar la función *promedio*. El procedimiento es similar al del paso anterior; escribimos el signo igual y PROMEDIO frente a la casilla que dice promedio y abrimos paréntesis, así:

MAX =PROMEDIO(

	A	B	C
1	Tipo o clase de café	Cantidad en kg	
2	*mes 1*	1230	
3	*mes 2*	1100	
4	*mes 3*	1350	
5	*mes 4*	2150	
6	*mes 5*	3210	
7	*mes 6*	3125	
8	*mes 7*	2500	
9	*mes 8*	2720	
10	*mes 9*	1905	
11	*mes 10*	1630	
12	*mes 11*	1280	
13	*valor mínimo*	1100	
14	*valor máximo*	3210	
15	*total*	22200	
16	*promedio*	=PROMEDIO(	
17	*mediana*	PROMEDIO(**número1**; [número2]; ...)	
18	*moda*		

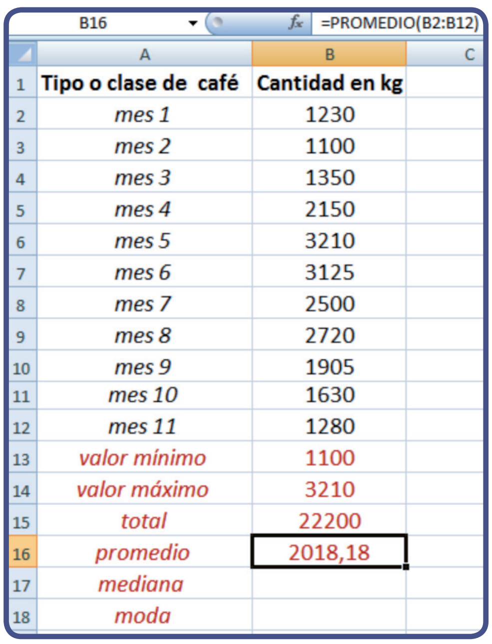
Después, seleccionamos los datos de interés, así:



MAX | =PROMEDIO(B2:B12

	A	B	C
1	**Tipo o clase de café**	**Cantidad en kg**	
2	*mes 1*	1230	
3	*mes 2*	1100	
4	*mes 3*	1350	
5	*mes 4*	2150	
6	*mes 5*	3210	
7	*mes 6*	3125	
8	*mes 7*	2500	
9	*mes 8*	2720	
10	*mes 9*	1905	
11	*mes 10*	1630	
12	*mes 11*	1280	
13	*valor mínimo*	1100	
14	*valor máximo*	3210	
15	*total*	22200	
16	*prc*	=PROMEDIO(B2:B12	
17	*medi*	PROMEDIO(**número1**; [número2]; ...)	
18	*moda*		

Cerramos el paréntesis y presionamos la tecla enter. Así obtendremos el promedio o el valor medio de la producción de café en los once meses.



B16 | =PROMEDIO(B2:B12)

	A	B	C
1	**Tipo o clase de café**	**Cantidad en kg**	
2	*mes 1*	1230	
3	*mes 2*	1100	
4	*mes 3*	1350	
5	*mes 4*	2150	
6	*mes 5*	3210	
7	*mes 6*	3125	
8	*mes 7*	2500	
9	*mes 8*	2720	
10	*mes 9*	1905	
11	*mes 10*	1630	
12	*mes 11*	1280	
13	*valor mínimo*	1100	
14	*valor máximo*	3210	
15	*total*	22200	
16	*promedio*	2018,18	
17	*mediana*		
18	*moda*		

Se puede observar que en promedio se produjeron 2.018 kg de café por mes.

Paso 7: Para hallar los valores correspondientes a la mediana y a la moda solo hay que seguir el procedimiento del paso 6, cambiando la función PROMEDIO por la función MEDIANA o MODA según corresponda, logrando completar la tabla de la siguiente manera:

1	**Tipo o clase de café**	**Cantidad en kg**
2	*mes 1*	1230
3	*mes 2*	1100
4	*mes 3*	1350
5	*mes 4*	2150
6	*mes 5*	3210
7	*mes 6*	3125
8	*mes 7*	2500
9	*mes 8*	2720
10	*mes 9*	1905
11	*mes 10*	1630
12	*mes 11*	1280
13	*valor mínimo*	1100
14	*valor máximo*	3210
15	*total*	22200
16	*promedio*	2018,18
17	*mediana*	1905
18	*moda*	#N/A

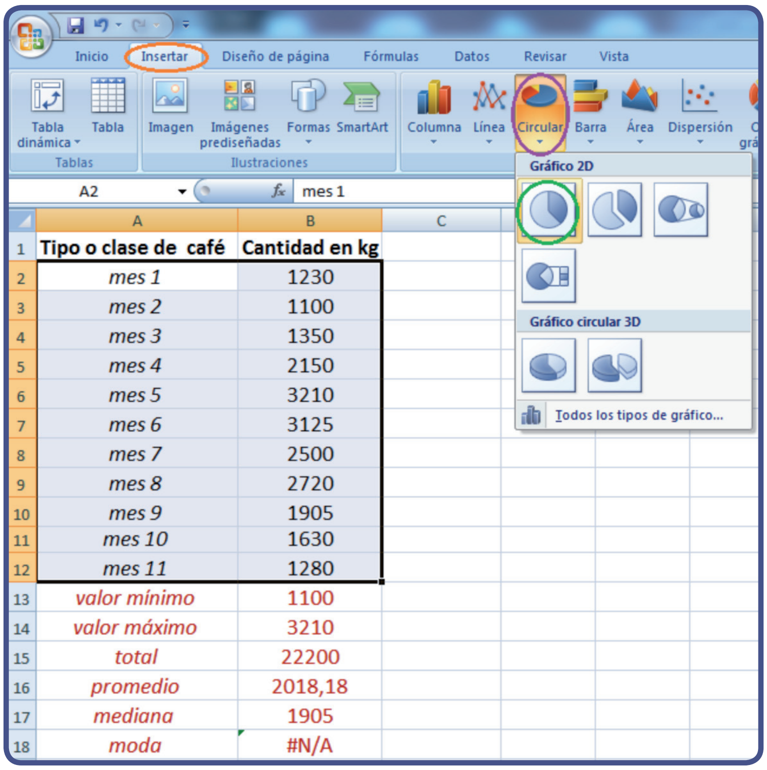
La mediana es 1905 kg; se puede comprobar este resultado ordenando los datos y hallando el valor que se encuentra en la mitad de ellos. Si miramos el valor de la moda (encerrado en color morado), podemos deducir que no existe ningún valor que corresponda a esta medida, es decir que ninguno de los datos se repite, recordemos que este valor puede no existir.

Ahora, si el cultivador desea hallar la ponderación de esta producción, se puede generar un diagrama circular o de barras de la siguiente manera:

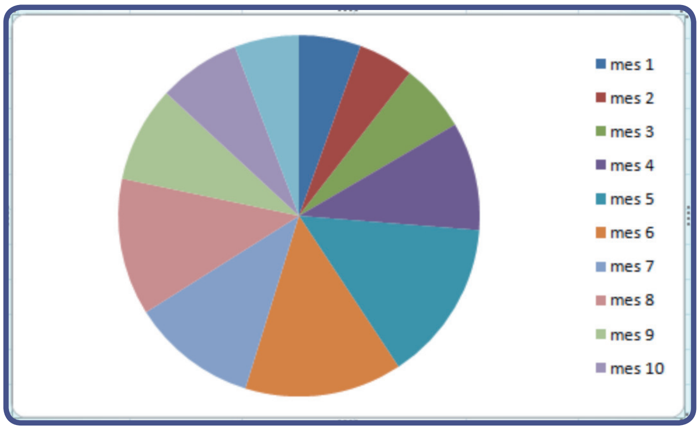
Paso 1: Seleccionamos los datos de la tabla:

	A	B
1	Tipo o clase de café	Cantidad en kg
2	*mes 1*	1230
3	*mes 2*	1100
4	*mes 3*	1350
5	*mes 4*	2150
6	*mes 5*	3210
7	*mes 6*	3125
8	*mes 7*	2500
9	*mes 8*	2720
10	*mes 9*	1905
11	*mes 10*	1630
12	*mes 11*	1280

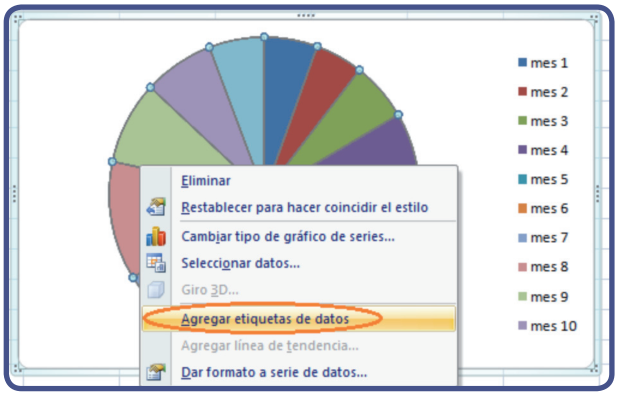
Paso 2: Insertamos -> Circular -> Gráfico en 2D; como se muestra a continuación:



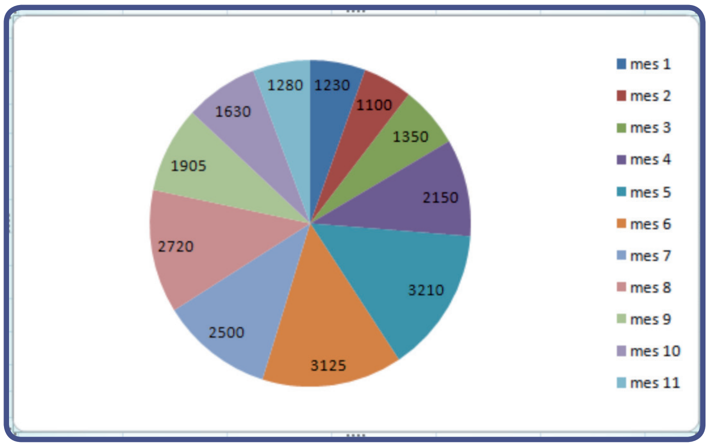
Paso 3: Damos clic derecho en este gráfico y nos sale la siguiente figura:



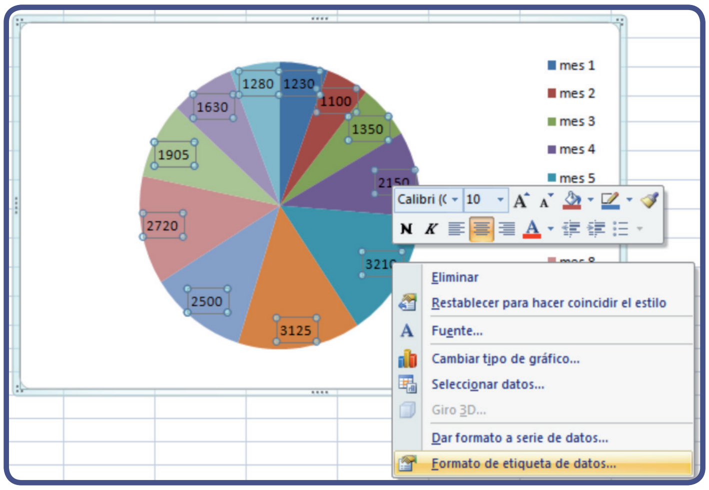
Como podemos observar, se ven las divisiones correspondientes a los once meses, pero no se ve la ponderación. Para hallarla simplemente seleccionamos el diagrama y damos clic derecho en donde nos aparecerá la opción de *Agregar etiquetas de datos,* como se muestra a continuación:



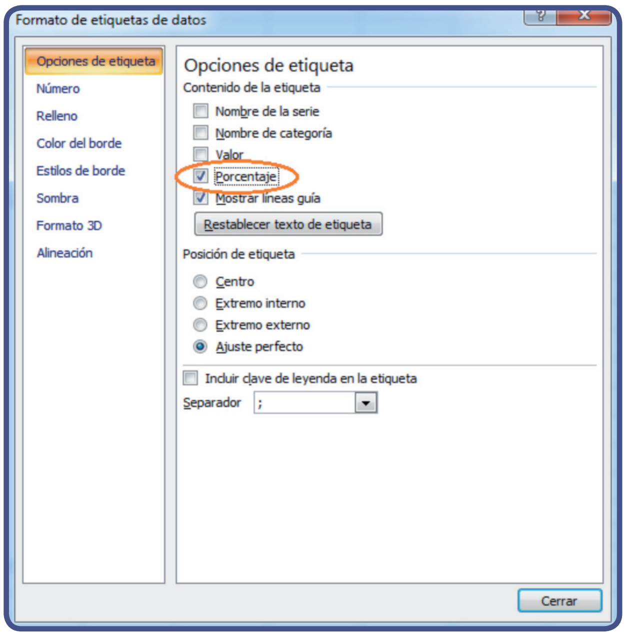
Sale la misma gráfica pero con los valores de la tabla.



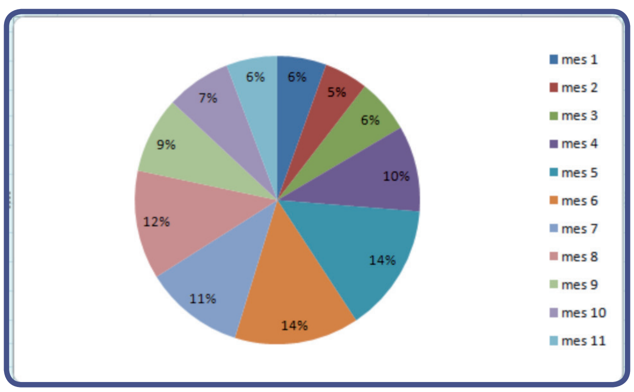
Para ver la ponderación de dichos datos seleccionamos los valores actuales, damos clic derecho y clic en *formato de etiqueta de datos*, así:



Luego desactivamos *valor* y seleccionamos *porcentaje* así:



Presionamos cerrar y nos saldrá el siguiente gráfico con sus porcentajes:



Con esta gráfica, el cultivador puede fácilmente apreciar que la mayor producción se dio en los meses cinco y seis, y que este valor corresponde al 14%. Este mismo procedimiento se puede realizar con una gráfica de barras. ¿Lo puedes comprobar?

Ejercitemos lo aprendido

Trabajo en grupo

Si ahora el agricultor nos presenta la siguiente tabla, en la cual se indica el promedio de lluvia y la temperatura promedio mensual del último año, respondan las siguientes preguntas que son de interés para él:

Mes	Promedio de lluvia (en mm)	Temperatura (en °C)
Enero	1780	23
Febrero	2000	19
Marzo	2100	20
Abril	2050	17
Mayo	1980	21
Junio	2010	19
Julio	2000	19
Agosto	2115	20
Septiembre	2500	16
Octubre	1910	22
Noviembre	1900	23
Diciembre	2020	18

1. ¿Cuál es la temperatura máxima alcanzada en el último año?

2. ¿Cuáles son los valores correspondientes a la media, moda y mediana, para el promedio de lluvia y para la temperatura?

3. ¿Cuánta fue la cantidad de lluvia total al finalizar el año?

4. Dibujen un diagrama que represente los datos de cada una de las dos variables, y evalúen si existe alguna relación entre las dos.

Guía 18

¡Calculando, ando!

Estándares

Pensamiento numérico

Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

La radicación, logaritmación y potenciación, tienen aplicaciones en ingeniería, química, física y economía entre otras, por tal motivo es de gran importancia un buen cálculo y manejo de ellas. Para esto podemos hacer uso de calculadoras generalmente científicas, aunque pueden ser graficadoras, financieras o de otro tipo dependiendo del contexto.

La guía que trabajarás a continuación, te dará una corta introducción sobre cómo calcular potencias, radicales y logaritmos utilizando una calculadora científica. Si no cuentas con esta herramienta puedes hallar una calculadora científica virtual en el sistema operativo Windows en, Inicio -> Programas -> Accesorios -> calculadora -> ver -> Científica. Los sistemas operativos con GNU/Linux o Unix también tienen calculadoras científicas virtuales.

Lo que sabemos

Nuestro cultivador del eje cafetero, ha invertido en su negocio \$P dinero durante n años, con un interés anual i. Si el valor futuro acumulado está dado por:

$F = P(1 + I)^n$

Si el interés ganado es $I = F - P$

Encuentre F e I, para P, n e I dados:

P = \$1.250.000, con $n = 5$ años y un interés del 17%.

P = \$3.750.000, con $n = 7$ años y un interés del 15%.

P = \$5.500.000, con $n = 9$ años y un interés del 12%.

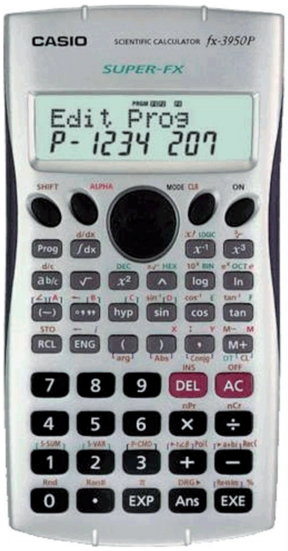
¿En cuál de los tres casos ganará más dinero?

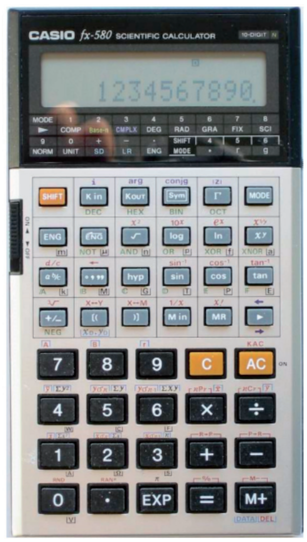
Aprendamos algo nuevo

Supongamos ahora que este cultivador desea calcular algunos valores, relacionados con la cantidad de café, el precio y el abono. Desea hacer algunos cálculos como los siguientes:

1. Calcular potencias como: 13^7

Para realizar este cálculo, le podemos sugerir que utilice una calculadora científica, como alguna de las que se muestra en la siguiente figura:





Como se puede apreciar, estas dos calculadoras no son iguales, tienen las funciones en distinto orden y la forma como se ingresan los datos para los cálculos también varía. La primera es de tipo Notación algebraica (DAL, de *Direct Algebraic Logic*), que generalmente tiene dos líneas de entrada/salida en la pantalla; la segunda es de tipo Notación Mixta (NM), que generalmente sólo tienen una línea en la pantalla, entonces para hacer el cálculo de la potencia podemos realizar el siguiente procedimiento:

A. Para el primer tipo de calculadora presionamos las siguientes teclas:

Obteniendo el siguiente resultado:

B. Para el segundo tipo de calculadora, presionamos las siguientes teclas:

Obteniendo el mismo resultado:

2. Calcular raíces como:

$$\sqrt[4]{712}$$

A. Para el primer tipo de calculadora, presionamos las siguientes teclas:

Obteniendo el siguiente resultado:

B. Para el segundo tipo de calculadora, presionamos las siguientes teclas:

Obteniendo el mismo resultado:

3. Calcular logaritmos:

Las calculadoras científicas sólo suelen incluir teclas para los logaritmos en base 10 y e, log y ln, respectivamente. Para el resto de bases tendremos que utilizar la propiedad del cambio de base, según la cual cualquier logaritmo es igual al cociente del logaritmo del argumento entre el logaritmo de la base, ambos logaritmos en cualquiera otra base, pero la misma, puede ser 10 o e, si queremos aprovechar las teclas mencionadas:

$$log_a m = \frac{\log m}{\log a} = \frac{\ln m}{\ln a}$$

- Calcular el $log_2 8$

A. Para el primer tipo de calculadora, presionamos las siguientes teclas:

Obteniendo el siguiente resultado:

B. Para el segundo tipo de calculadora, presionamos las siguientes teclas:

Obteniendo el mismo resultado:

- Calcular $9^{\ln 5}$

A. Para el primer tipo de calculadora, presionamos las siguientes teclas:

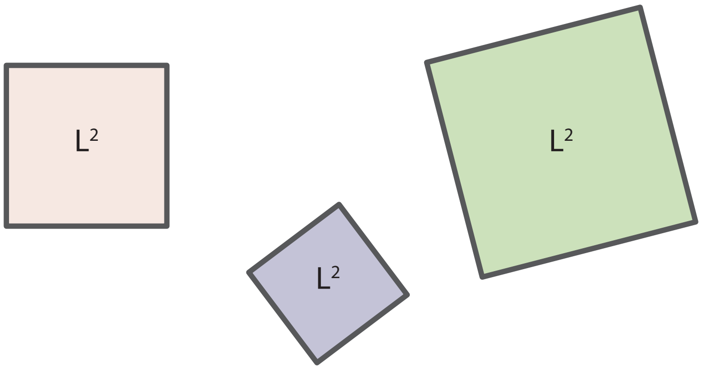
Obteniendo el siguiente resultado:

B. Para el segundo tipo de calculadora, presionamos las siguientes teclas:

Obteniendo el mismo resultado:

Ejercitemos lo aprendido

Trabaja individualmente, mira las figuras y realiza la actividad que las acompaña.



1. Completa la siguiente tabla; te permitirá observar cómo varían el área y el perímetro de un cuadrado al variar la longitud de su lado. Ayúdate de una calculadora.

Lado (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm²)
1.1		
	9.2	
		12.25
		22.09
	23.6	
6.1		
7.3		
	34	
		94.09

2. Analiza los datos de la tabla y responde:

    a. ¿Entre qué números enteros está la medida del lado de un cuadrado de área 51.84?

    b. Si el lado del cuadrado mide z, ¿cuál es el área? y ¿cuál es el perímetro?

    c. Y si el lado se duplica, es decir, si el lado mide 2 z, ¿cuál es el área? y ¿cuál es el perímetro?

3. Completa la siguiente tabla con las siete primeras potencias de los números del 1 al 11. Puedes ayudarte con una calculadora:

		Exponente						
		1	2	3	4	5	6	7
Base	1	1	1	1				
	2	2	4	8				
	3	3	9	27				
	4	4	16					
	5	5	25					
	6	6	36					
	7	7	49					
	8	8	64					
	9	9	81					
	10	10	100					
	11	11	121					19487171

- Con ayuda de la calculadora halla:

    a. $\sqrt{log_3 5}$

    b. $log_{0,8} \frac{7}{3}$

    c. $(78 - 93)^6$

    d. $\sqrt[5]{-627}$

Guía 19

¡Graficando con ayuda!

Estándares:

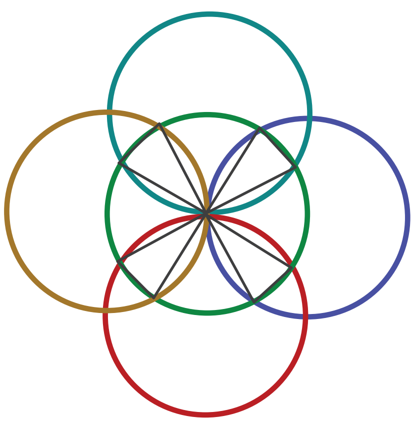
Pensamiento variacional

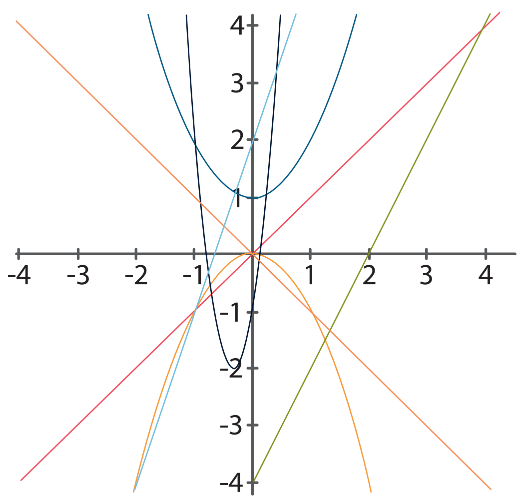
- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.
- Analizo, en representaciones gráficas cartesianas, los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a la familia de funciones polinómicas.

Representar o dibujar funciones resulta divertido y agradable cuando contamos con programas sencillos y gratuitos. La guía que trabajarás a continuación, te dará una corta introducción para dibujar algunas figuras geométricas utilizando el programa Regla y Compás como Winplot. Así mismo invita a los estudiantes para que usen programas comographmatica o derive; entre otros, con el fin de graficar algunas funciones.

Lo que sabemos

Imágenes de figuras geométricas y gráficas de funciones.



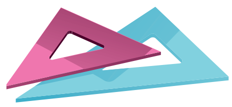


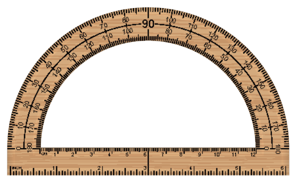
Con ayuda de regla, escuadra, transportador y/o compás trata de dibujar las siguientes figuras geométricas:

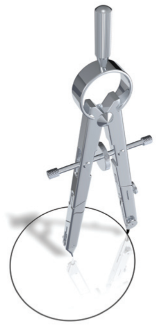
- Un pentágono
- Un hexágono
- Un octágono

Ahora recuerda cómo se tabulan y grafican las funciones:

- $y = 5x$
- $y = -3x + 6$
- $y = x^2 + 4$
- $y = (x - 2)^2 + 2$







Aprendamos algo nuevo

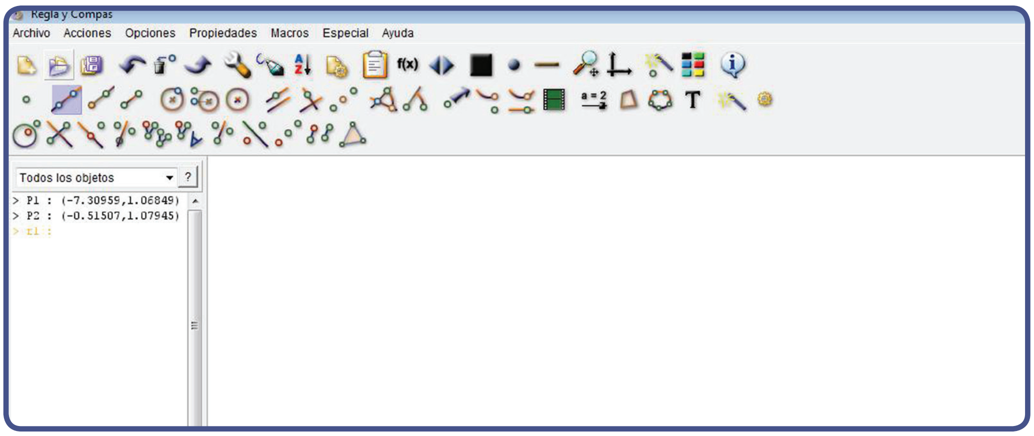
A continuación se presentará un programa llamado Regla y Compás, el cual es gratuito y se puede descargar desde internet. Este programa es de gran ayuda para el manejo de la geometría:

La barra principal del programa cuenta con el siguiente menú:

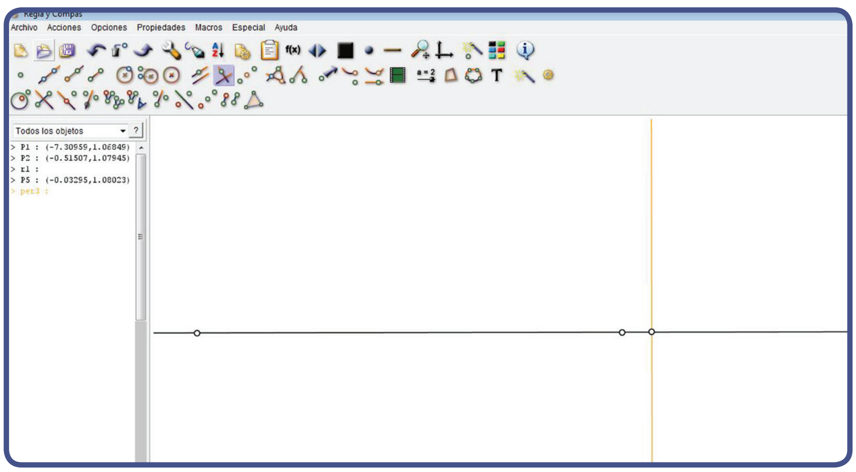
- Archivo. Contiene: nueva construcción, guardar, imprimir, propiedades especiales de exportación y salir, entre otros.
- Acciones: Allí se encuentran puntos, rectas, círculos y editar último objeto, entre otros.
- Opciones: Mostrar cuadrícula, editar cuadrícula, fondo, zoom, y configuración son algunos de sus elementos.
- Propiedades: Contiene herramientas reducidas y editar las herramientas, entre otras.

Además, tiene unos botones o accesos directos a varias funciones dentro de las que están: Nueva construcción, borrar un objeto, editar objeto, mostrar comentario, revisar construcción; y elementos de gran interés como punto, recta, segmento, círculo, paralelas, etc.

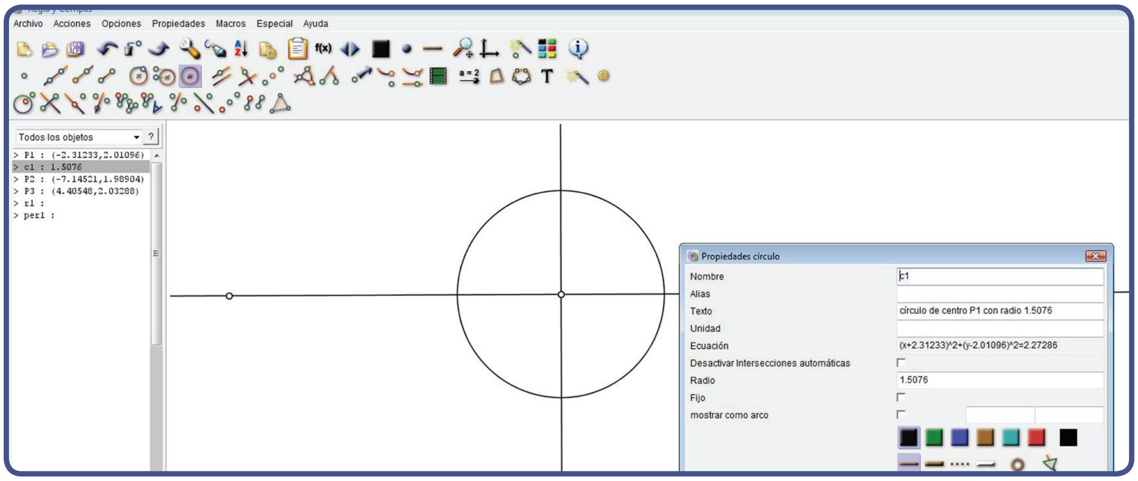
Para dibujar un objeto se puede probar con la herramienta recta (encerrada en morado) generando una línea recta, como la que se muestra en la siguiente figura:



Luego, con la herramienta recta perpendicular (encerrada en morado) generamos otra recta:



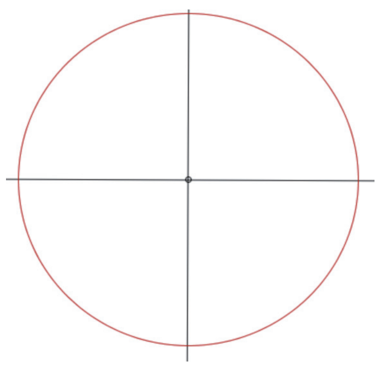
Seguido de esto, con la herramienta círculo de radio fijo, generamos una circunferencia con centro en los dos ejes, a medida que se genera el círculo, indica la magnitud del radio, en este caso de 1.5.



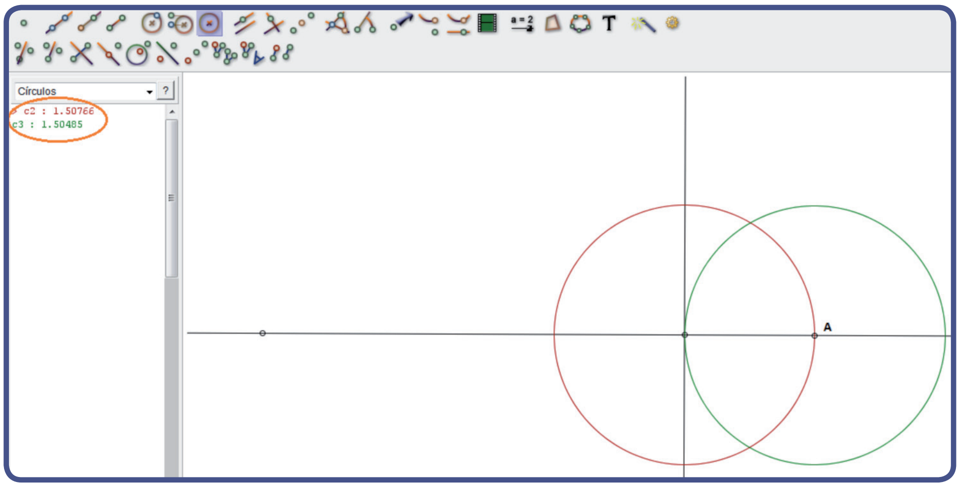
Responde:

- ¿Qué facilidades presta este programa al desarrollo de la geometría?
- ¿Qué herramientas útiles encontraste en él?

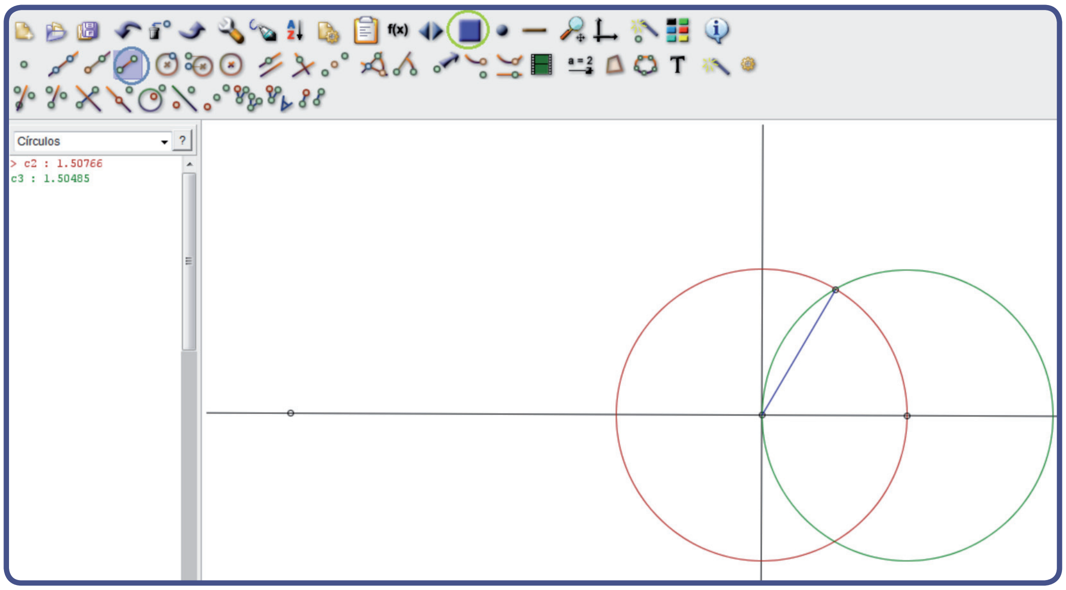
Finalmente obtendremos la circunferencia que se aprecia en la siguiente figura:



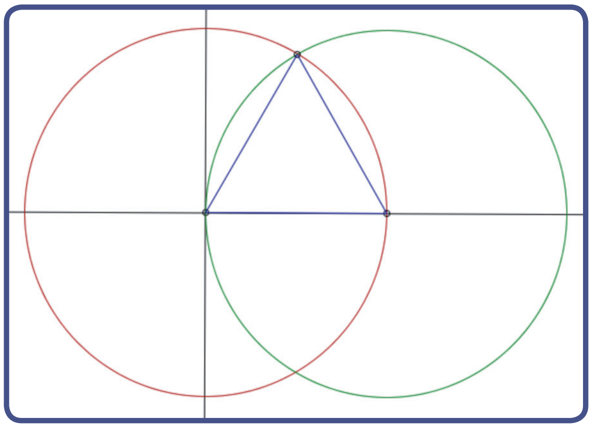
Generemos otra circunferencia con centro en alguna parte de la circunferencia, en este caso en *A*, asignémosle el color verde y verifiquemos que tengan el mismo radio, como se muestra a continuación:



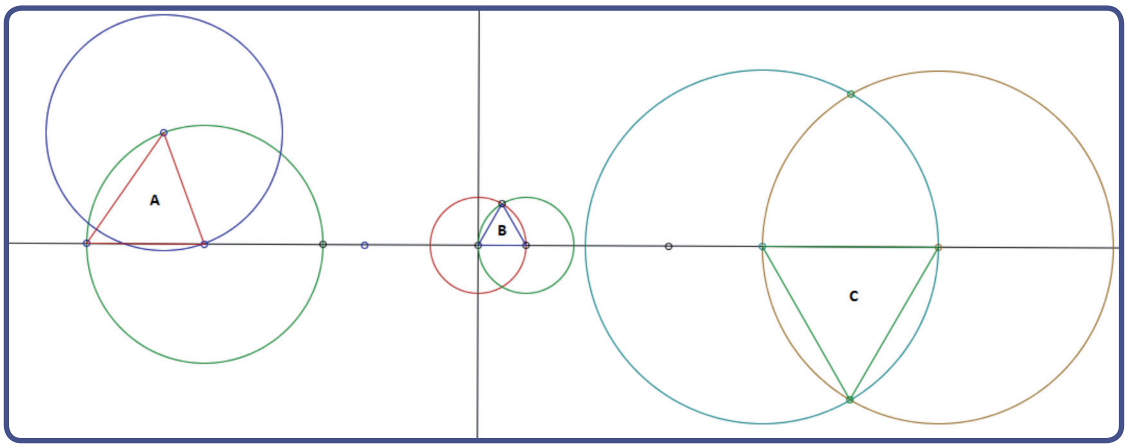
Seguido de esto vamos nuevamente al botón de segmento, le asignamos un color azul y generamos un segmento entre el centro del primer círculo y la unión de los dos círculos superiores, como lo muestra la siguiente figura:



Después, generamos dos segmentos más, uno entre el centro de los dos círculos y otro, entre el centro del segundo círculo y la unión de los dos círculos superiores, como se muestra en la siguiente figura:



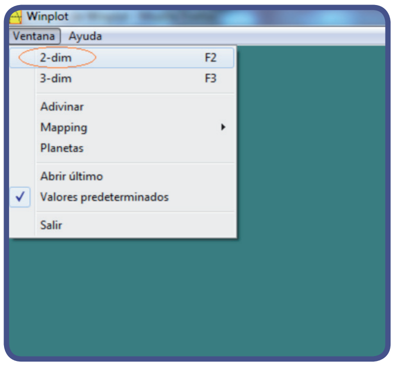
- ¿Consideras que este es un triangulo equilátero? ¿Por qué?
- Mira con atención la siguiente figura:



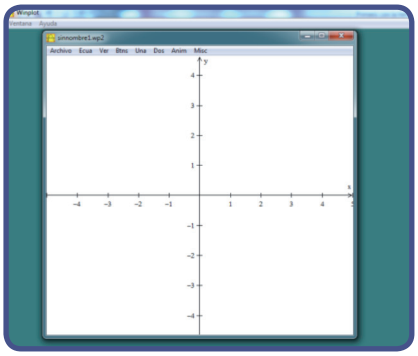
- ¿Consideras que estos tres triángulos son semejantes? ¿Por qué?

Otro programa de gran ayuda, en especial para graficar funciones es Winplot.

Para graficar una función, abrimos el programa y vamos a: ventana -> 2-dim



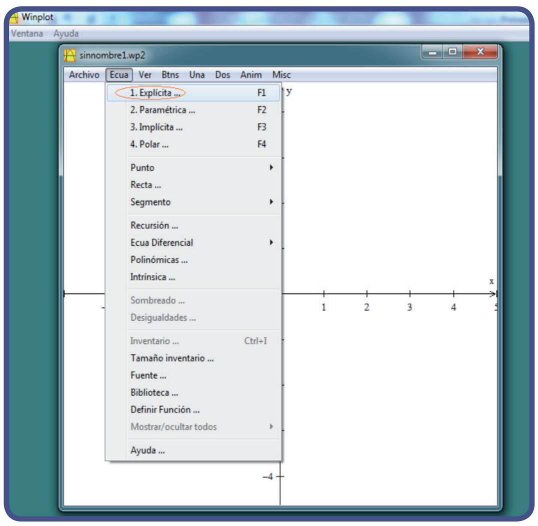
De esta manera, se genera una nueva ventana como la siguiente:



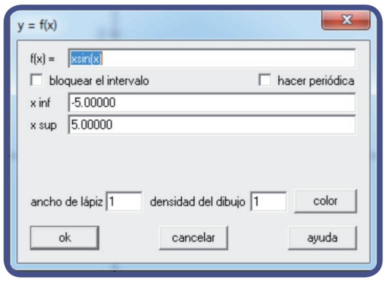
Para generar la función: $f(x) = x$

Solo se siguen los siguientes pasos:

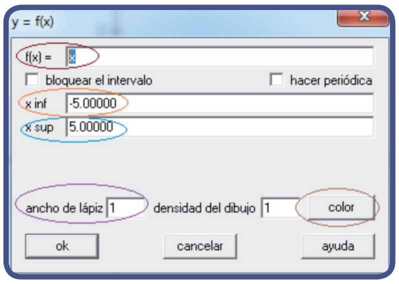
Paso 1: Vamos a: Ecuación -> Explicita, como lo muestra la siguiente figura:



Sale una ventana como la siguiente:

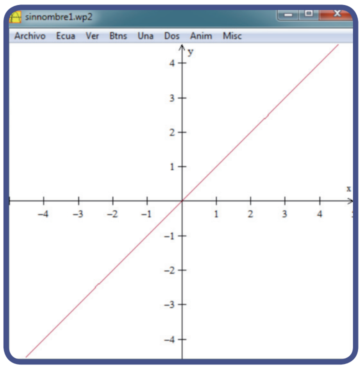


Reemplazamos el valor que viene por defecto: x sin(x) por x, así:

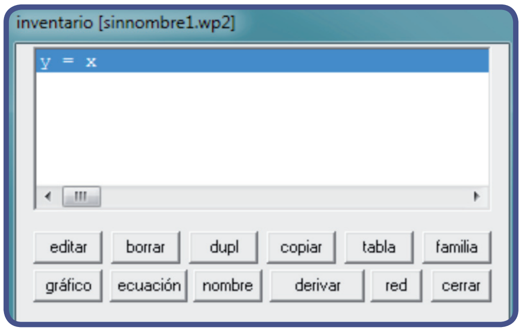


En donde dice f(x), se hace referencia a la función a graficar, la variable independiente es x, x inf es el valor inferior en el eje x, así como x sup es el valor superior en el eje x en este caso de 5, también se indica el ancho del lápiz o grosor de la línea de la función y el color.

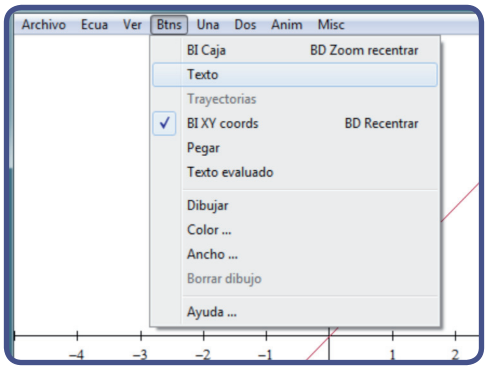
En este caso, se dejarán estos parámetros predeterminados, y se obtiene la siguiente figura, en donde podemos apreciar la gráfica de la función:



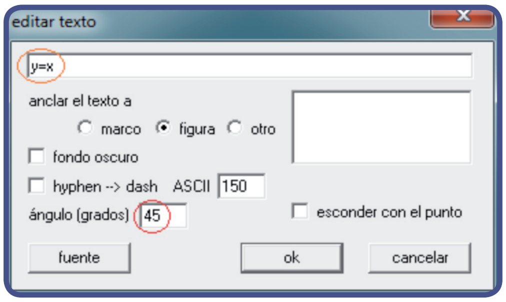
Se observa que la pendiente de la recta es igual a uno y que es positiva. Además nos arroja la siguiente ventana llamada inventario, en la cual se puede apreciar la función dibujada y las opciones para editarla, borrarla, duplicarla o copiarla, entre otras.



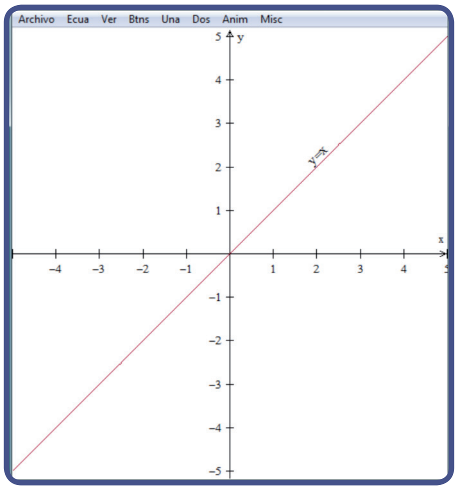
También podemos ir a Btns (abreviatura de botones) y seguido de esto a texto, como lo indica la siguiente figura:



Saldrá la siguiente ventana:



En la cual se digita el nombre de la función, en este caso y = x y el ángulo de inclinación de dichas letras, para obtener una figura como la siguiente:

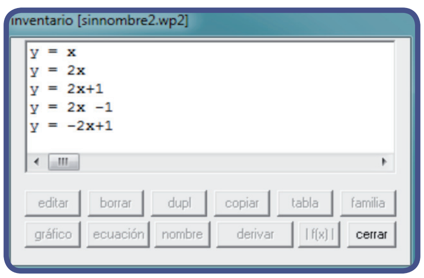


Podemos agregar más funciones, dando a la ventana de inventario en duplicar y modificando la función.

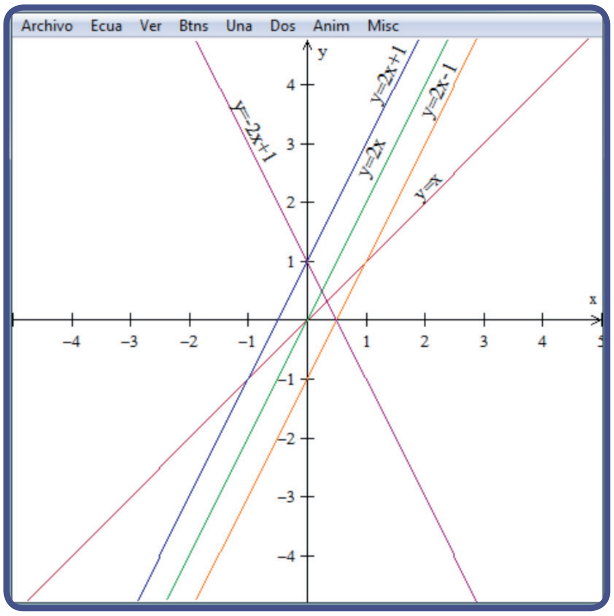
Por ejemplo, si quisiéramos graficar las siguientes funciones y mirar en qué se diferencian:

y = 2x
y = 2x + 1
y = 2x – 1
y = -2x + 1

solo tenemos que agregarlas en la ventana de inventario, como se ve a continuación:



Y luego de asignarle a cada función un color y su nombre, obtenemos las siguientes funciones:



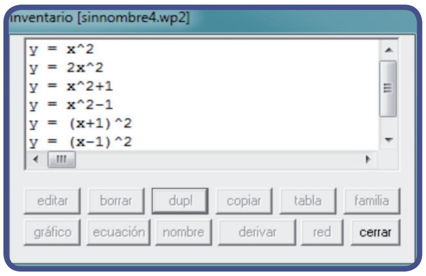
De donde podemos deducir que:

- Para la función $y = x$, la pendiente es igual a 1 y es positiva, además pasa por el origen de las coordenadas.
- Cuando se agrega la función $y = 2x$, la pendiente aumenta (a 2), pero sigue siendo positiva y pasando por el origen
- Cuando se agrega la función $y = 2x + 1$, la pendiente se mantiene igual (es decir en 2), pero se desplaza hacia arriba en las coordenadas y ahora no pasa por el origen sino por el punto (0,1).
- Cuando se agrega la función $y = 2x -1$, la pendiente se mantiene igual (es decir en 2), pero se desplaza por debajo de las coordenadas y ahora no pasa por el punto (0,1), sino por el punto (0,-1).
- Cuando se agrega la función $y = -2x + 1$, la pendiente es ahora negativa (2) y pasa por el punto (0,1).

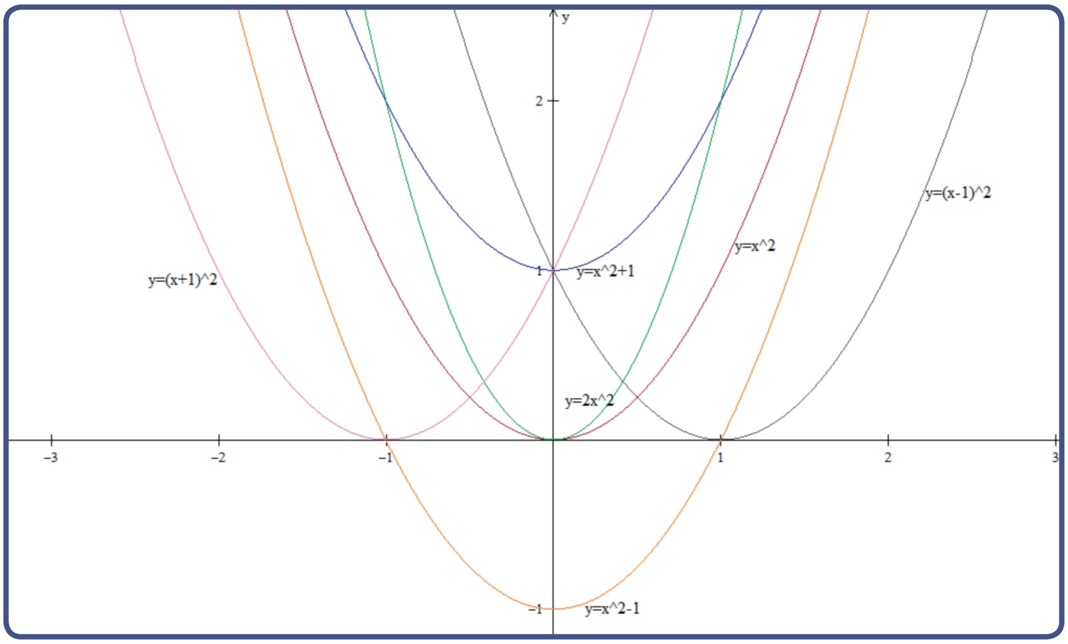
Algo parecido ocurre con las funciones cuadráticas, supongamos que deseamos dibujar las siguientes funciones cuadráticas:

$$y = x^2$$
$$y = 2x^2$$
$$y = x^2 + 1$$
$$y = x^2 - 1$$
$$y = (x + 1)^2$$
$$y = (x - 1)^2$$

En la ventana de inventario solo tenemos que agregarlas, como se ve a continuación:



Cuando le asignamos a cada función un color y su nombre, obtenemos las siguientes gráficas:



De donde podemos deducir que:

- La función $y = x^2$ pasa por el origen de las coordenadas.
- Luego, al multiplicarla por dos, es decir $y = 2x^2$, la concavidad disminuyó pero siguió pasando por el origen de las coordenadas.
- Cuando se agrega la función $y = x^2 + 1$, la función $y = x^2$ se desplaza hacia arriba en una unidad de las coordenadas de *y*, pasando ahora por el punto (0,1).
- Cuando se agrega la función $y = x^2 - 1$, la función se desplaza hacia abajo en una unidad de las coordenadas de *y*, pasando ahora por el punto (0, -1).
- Cuando se agrega la función $y = (x + 1)^2$, la función $y = x^2$ se desplaza hacia la izquierda en una unidad de las coordenadas de x, pasando ahora por el punto (-1,0).
- Cuando se agrega la función $y = (x - 1)^2$, la función $y = x^2$ se desplaza hacia la derecha en una unidad de las coordenadas de *x*, pasando ahora por el punto (1,0).

Ejercitemos lo aprendido

1. Trabaja con un compañero y con ayuda de estos dos programas: Regla y Compás, dibuja nuevamente las siguientes figuras geométricas:

   » Un pentágono

   » Un hexágono

   » Un octágono

2. Ahora, con ayuda del programa Winplot, grafica nuevamente las siguientes funciones:

   $y = 5x$
   $y = -3x + 6$
   $y = x^2 + 4$
   $y = (x - 2)^2 + 2$

   » ¿Consideras de gran ayuda estos dos programas? ¿Por qué?

   » ¿Los resultados obtenidos con ayuda de estos dos programas son parecidos a los obtenidos analíticamente? Justifica.

Apliquemos lo aprendido

- La utilidad diaria de la venta de árboles para el departamento de jardinería de un almacén está dada por $p(x) = -x^2 + 20x + 144$, en donde x es el número de árboles vendidos. Determina el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haz la gráfica de la función en Winplot.

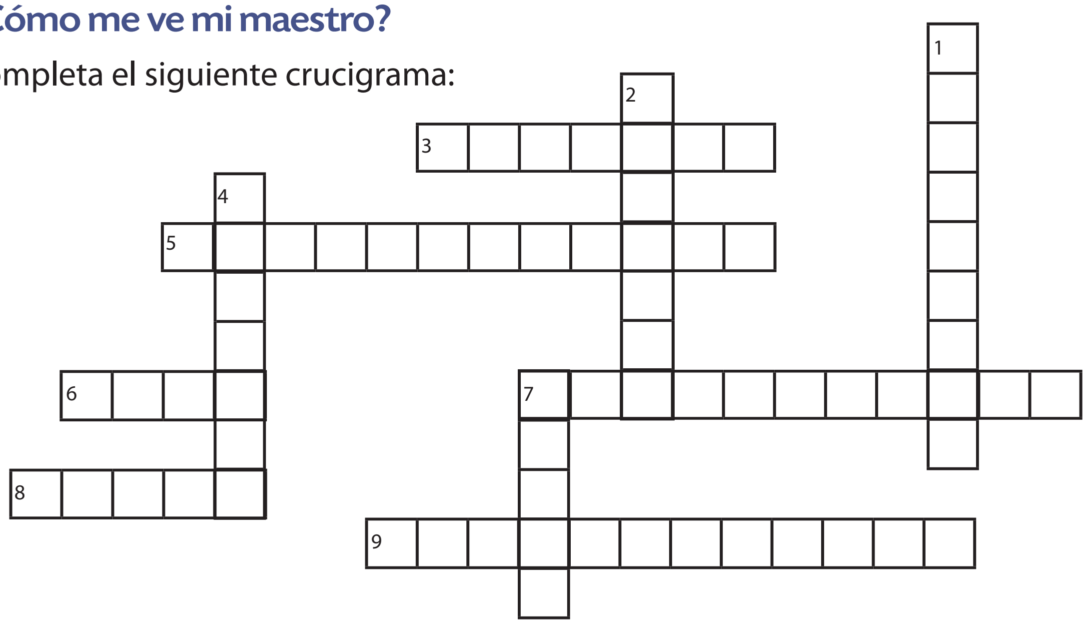
- Un nuevo edificio de apartamentos se vendió por \$ 96’000.000 cinco años después de que se compró. Los propietarios originales calcularon que el edificio se apreciaba \$ 450.000 por año, mientras ellos fuesen los propietarios. Determina una función lineal que describa la apreciación del edificio, si x es el número de años desde la compra original, después haz la gráfica de dicha función en Winplot.

- Una compañía de electricidad cobra a clientes residenciales $125 por kilowatt-hora más un cargo base mensual. La factura mensual de un cliente viene con $ 51.650 por 380 kilowatt-hora. Determina una función lineal que describa el monto total por concepto de electricidad, si *x* es el número de kilowatt-hora utilizados en un mes. Después, dibuja la función en Winplot.

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

Completa el siguiente crucigrama:



Verticales

1. Rama de las matemáticas que se dedica al estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras.
2. Programa que permite graficar de forma sencilla algunas funciones.
4. Es el valor que ocupa el lugar central de todos los datos cuando estos están ordenados de menor a mayor.
7. Programa que nos permitió hallar las medidas de tendencia central de forma rápida.

Horizontales

3. Relación entre dos variables, de forma que a cada valor de la variable independiente, le asocia un único valor de la variable dependiente.
5. Programa que nos permitió dibujar de manera sencilla varios círculos.
6. Es el valor que tiene mayor frecuencia absoluta o que más se repite.
7. Es una ciencia referente a la recolección, análisis e interpretación de datos.
8. Valor que se obtiene al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos.
9. Expresión matemática que incluye dos términos denominados: base y exponente.

¿Cómo me ven los demás?

Formen grupos de dos o tres personas, y lean con atención el siguiente texto:

A continuación se presenta una tabla con el precio promedio en dólares del petróleo y del café en los últimos años.

Año	Precio del petróleo, en dólares	Precio del petróleo, en pesos	Precio del café en dólares	Precio del café, en pesos
1998	14,45		1,46	
1999	19,19		1,19	
2000	30,13		1,02	
2001	26,66		0,71	
2002	25,97		0,64	
2003	31,08		0,65	
2004	22,98		6,80	
2005	22,40		4,34	
2006	21,54		1,94	
2007	21,54		1,94	
2008	23,59		2,07	
2009	23,59		2,07	
2010	23,59		2,07	

Con ayuda de Microsoft Excel:

1. Completen la columna del precio del petróleo en pesos si un dólar es equivalente a 1998 pesos.

2. Completen la columna del precio del café en pesos si un dólar es equivalente a 2050 pesos.

3. Hallen la media, mediana y moda, para las cuatro columnas y analicen estos valores. ¿Qué pueden concluir?

4. Grafiquen por medio de diagramas circulares o de barras, las cuatro variables estudiadas y expliquen la información que da la gráfica.

¿Qué aprendí?

Completa la siguiente tabla, marcando con una X cada uno de los aspectos desarrollados durante el módulo, teniendo en cuenta todo lo que aprendiste. Recuerda justificar tu respuesta

	Sí	A veces	No	Justificación
Hallo por medio de Excel medidas de tendencia central.				
Con ayuda de Excel realizo gráficas de barras o de pastel y entiendo sus resultados.				
Realizo operaciones con la calculadora para hallar raíces, potencias y logaritmos.				
Hago figuras geométricas con el programa Regla y Compás.				
Grafico por medio del programa Winplot, funciones lineales y cuadráticas y entiendo su comportamiento al variar algunos parámetros.				
Realizo mis tareas responsablemente tanto en los trabajos individuales como grupales.				
Me relaciono adecuadamente con mis compañeros y mi maestro.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Soy tolerante con las diferencias de opinión cuando trabajo en grupo.				
Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				

Determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento con tu maestro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá. MEN

Mason, J. et al. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

Ministerio de Educación Nacional (1988). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá. MEN.

Rojas, P. et al. (2002). *La transición de la aritmética – álgebra.* Bogotá: Gaia.

Uribe C., Julio A. & Berrio M., Jose I. (1998). *Elementos de matemáticas: noveno grado*. Medellín: Bedout.

VanCleave, Janice & Clark, Barbara. (2004). *Matemáticas para niños y jóvenes. México*: Limusa.

REFERENCIAS WEB

Instituto de Tecnologías educativas. Jóvenes (documento electrónico). Recuperado el 18 de mayo de 2010 de: http://www.isftic.mepsyd.es.

Pérez Sanz, Antonio. Matemáticas (Documento electrónico). Recuperado el 18 de Mayo de 2010 de: http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/.

Proyecto PUEMAC. Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computador. (Documento electrónico). Recuperado el 18 de Mayo de 2010 de: http://puemac.matem.unam.mx.