8º
Matemáticas

Libertad y Orden
Ministerio de
Educación Nacional
República de Colombia

María Fernanda Campo Saavedra
Ministra de Educación Nacional

Mauricio Perfetti del Corral
Viceministro de Educación
Preescolar, Básica y Media

Mónica López Castro
Directora de Calidad para la
Educación Preescolar, Básica y Media.

Heublyn Castro Valderrama
Subdirectora de Referentes y
Evaluación de la Calidad Educativa

Heublyn Castro Valderrama
Coordinadora del Proyecto

Clara Helena Agudelo Quintero
Gina Graciela Calderón
Luis Alexander Castro
María del Sol Effio J
Omar Hernández Salgado
Edgar Martínez Morales
Jesús Alirio Naspirán
Emilce Prieto Rojas
Equipo Técnico

María Fernanda Dueñas Álvarez
Diego Fernando Pulecio Herrera
Autores de la adaptación

ISBN libro: 978-958-691-421-5
ISBN obra: 978-958-691-411-6

Dirección de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media
Subdirección de Referentes y Evaluación
Bogotá, Colombia, 2010
www.mineducacion.gov.co

Fundación Manuel Mejía
Andrés Casas Moreno
Aura Susana Leal Aponte
Catalina Barreto Garzón
Coordinación del proyecto

Solman Yamile Díaz
Coordinación pedagógica

Erika Mosquera Ortega
Paula Andrea Ospina Patiño
Coordinación editorial

Ángela Duarte Pacheco
Coordinadora del libro

César Andrés Pacheco Chaparro
Ángela Duarte Pacheco
Nelson Rodríguez
Eusebia Vega García
Juan Gabriel Duarte Pacheco
Autores

Marta Osorno Reyes
Edición

Víctor Leonel Gómez Rodríguez
Diseño de arte

Leidy Joanna Sánchez
Víctor Leonel Gómez Rodríguez
Fransue Escamilla Pedraza
Diseño y diagramación

Richard Rivera Ortiz
Ilustración
Shutterstock
Fotografía

Agradecimientos especiales a: Raquel Suárez Díaz, Wilson Giral, Guido Delgado Morejón, Geovana López y Eliana Catalina Cruz, quienes contribuyeron al desarrollo de esta publicación.

Presentación

El Ministerio de Educación Nacional, presenta a la comunidad educativa la nueva versión del modelo **Postprimaria Rural**, en su propósito de disminuir las brechas educativas del país en cuanto a permanencia y calidad en todos los niveles. Este material se presenta como una alternativa que busca dar respuesta, a las necesidades de formación y desarrollo educativo en poblaciones de las zonas rurales y urbano-marginales.

La propuesta pedagógica del modelo Postprimaria, se desarrolla a través de una ruta didáctica que permite a los estudiantes analizar e interpretar diversas situaciones problema, para aproximarse a su cotidianidad, construir saberes y convertir los contenidos en aprendizaje significativo para sus vidas.

Para el logro de este objetivo, se ha diseñado un conjunto de materiales de aprendizaje que abordan las áreas obligatorias y fundamentales, las cuales desarrollan contenidos actualizados que incorporan los referentes de calidad del MEN, especialmente los Estándares Básicos de Competencias. También el modelo brinda material educativo, que permite a los establecimientos educativos implementar proyectos de alimentación, tiempo libre, salud y nutrición. Adicionalmente, teniendo en cuenta la necesidad de las nuevas generaciones de las zonas rurales, se propone el trabajo con Proyectos Pedagógicos Productivos, el cual ofrece un doble beneficio: por un lado, se convierte en la oportunidad de desarrollar aprendizajes prácticos, con lo que se fomenta no solo el saber sino el saber hacer en el contexto del estudiante; y por otro, se promueve el espíritu empresarial, que permite a los jóvenes comprender distintas posibilidades productivas.

Postprimaria rural cuenta con un Manual de implementación en el que se presenta el enfoque pedagógico y alternativas didácticas que se pueden aplicar en cada área curricular. Éstas son una herramienta de apoyo para el docente porque le facilita, con ayuda de su creatividad e iniciativa personal, promover una educación pertinente para el estudiante de la zona rural y urbano marginal, e incrementar el interés por ampliar su escolaridad, hasta alcanzar la culminación del ciclo básico.

Este modelo es una oportunidad para impulsar la participación activa de los estudiantes como ciudadanos colombianos, toda vez que con ello se contribuye a ampliar sus posibilidades de vida digna, productiva y responsable, lo que repercutirá en la construcción de una sociedad colombiana más justa y con mayores posibilidades de desarrollo humano.

Ministerio de Educación Nacional

Así es esta cartilla

Querido estudiante:

Bienvenido a este nuevo curso de **Matemáticas** de la Postprimaria rural. Esperamos que esta experiencia sea enriquecedora tanto para ti, como para todos los integrantes de la comunidad.

Lee con atención el siguiente texto. Te ayudará a entender como están organizadas las cartillas que se utilizarán para el trabajo en las áreas fundamentales, en los proyectos transversales y en los proyectos pedagógicos productivos.

Esta cartilla te acompañará durante todo el curso y orientará tu proceso de enseñanza-aprendizaje. El conocimiento y uso adecuado de ella te permitirá obtener un mejor desempeño, que se verá reflejado en tu formación personal.

En cada una de las guías que componen los módulos, encontrarás unos íconos que indican el tipo de trabajo que vas a realizar:

Las actividades acompañadas por este ícono te permiten indagar los conocimientos que has adquirido en años anteriores y en tu vida diaria. Esta sección te servirá como punto de partida para construir nuevas formas de conocer el mundo.

En esta sección encontrarás información y actividades con las cuáles podrás construir nuevos y retadores aprendizajes. Es importante que hagas tu mejor esfuerzo en su realización, y compartas con tu docente y compañeros las dudas que se te presenten. Recuerda que los nuevos aprendizajes y el uso que hagas de ellos, te permitirán mejorar tus competencias como estudiante y como ciudadano responsable, y comprometido en la comunidad en la que vives.

Ejercitemos lo aprendido

Este ícono identifica las actividades que te permitirán poner en práctica tus aprendizajes y ganar confianza en el uso de los procedimientos propios de cada área.

Apliquemos lo aprendido

Encontrarás identificadas con este ícono las actividades de aplicación a través de las cuales podrás ver cómo lo que has aprendido, te sirve para solucionar situaciones relacionadas con tu vida cotidiana, con el área que estás trabajando y con otros campos del saber.

Evaluemos

En esta sección se te presentarán tres preguntas fundamentales:

- ¿Qué aprendí? Dónde explicarás la forma como vas desarrollando tus competencias.
- ¿Cómo me ven los demás? Esta pregunta la responderás con la ayuda de tus compañeros.
- ¿Cómo me ve mi maestro? Aquí tu maestro te apoyará para establecer tus niveles de desempeño.

El análisis de estas respuestas te ayudará a identificar acciones para superar dificultades y determinar diferentes maneras para mejorar tus competencias y las de tus compañeros.

Trabajo en grupo

Cuando las actividades estén acompañadas de este ícono, debes reunirte con uno o más de tus compañeros. Recuerda respetar sus opiniones, sus ritmos de trabajo y colaborar para que la realización de estas actividades favorezca el desarrollo de competencias en todos los integrantes del grupo.

Te invitamos a hacer un buen uso de esta cartilla y a cuidarla de manera especial, para que pueda ser usada por otros estudiantes en años posteriores.

Contenido

Módulo 4

Módulo 5

Módulo 6

Módulo 1

Los números reales

¿Qué vas a aprender?

Cuando comenzamos a trabajar con los sistemas numéricos, desde primaria nos hacen énfasis en el trabajo con los números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,2,3...\}$, de esta manera en este conjunto, ecuaciones como x + 3 = 0, no tiene solución, ya que podemos decir que no existe un número natural x que sumado con 3 dé como resultado cero. De esta forma es necesario ampliar el conjunto de números.

Los números enteros $\mathbb{Z} = \{..., -3,-2,-1, 0,1,2,3...\}$ o $\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}^- \cup 0 \cup \mathbb{Z}^+\}$, nos permiten dar solución a la ecuación x + 3 = 0, ya que en este conjunto tiene como solución x = -3, pero si trabajamos ecuaciones como 2x = 1, este sistema numérico ya no nos permite dar solución a este tipo de ecuaciones ya que no encontramos ningún número entero que multiplicado por 2 nos de 1 como resultado, es así que tenemos que ampliar el conjunto de números. De esta manera se tiene el conjunto de números racionales, $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \wedge b \in 0\right\}$, de esta manera la ecuación 2x = 1 tiene como resultado $x = \frac{1}{2}$.

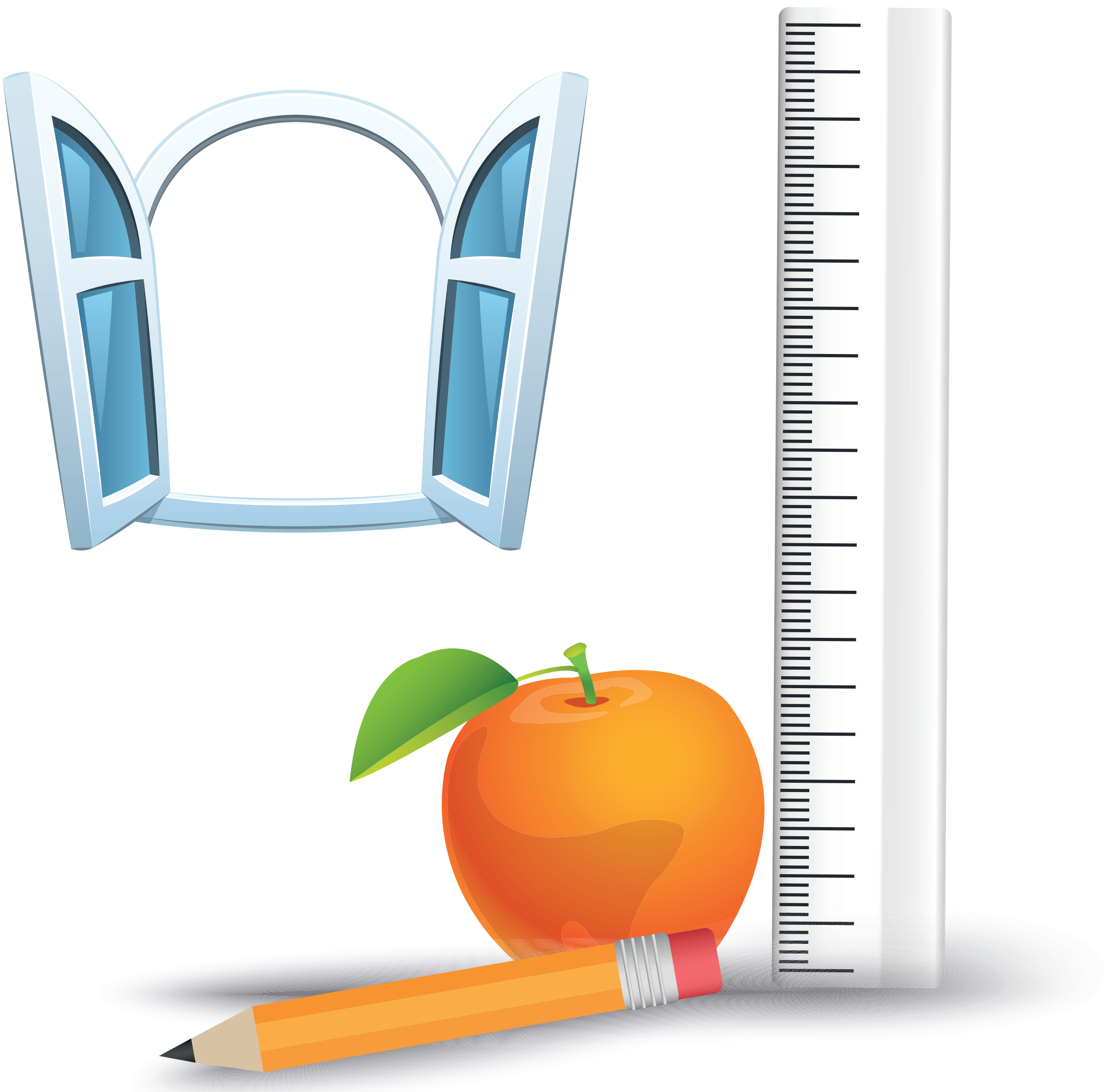
Dentro de los sistemas numérico existen expresiones decimales que son infinitas no periódicas que no se pueden expresar con los números racionales, tenemos el caso del número 0,123456789101112163…,de esta manera encontramos ecuaciones que no tienen solución den los números racionales, tal es el caso de $x \cdot x = 2$, donde su solución es $x^2 = 2$, por tanto la solución es $x = \sqrt{2}$, donde $\sqrt{2}$, no es un número no racional, otros ejemplo de números irracionales son: π, e, $\sqrt{5}$.

Cuando unimos los números racionales y los números irracionales, conforman el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, de esta manera podemos definir $\mathbb{R}=\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Estándares básicos de competencias

Pensamiento Numérico y sistemas numéricos

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.



<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 1.

Números Reales</td><td>Números Irracionales y su representación en la recta numérica.

Propiedades de los números reales.

Solución de problemas.</td><td rowspan="4">• El desarrollo de estos estándares permitirá fortalecer los siguientes procesos:

• La formulación, tratamiento y resolución de problemas: por cuanto se presentan diversas situaciones que pueden ser resueltas mediante su representación como objetos geométricos y las expresiones algebraicas asociadas.

• La modelación: en dos sentidos; el primero relacionado con la representación de objetos reales mediante dibujos o modelos a escala de uno o más sólidos geométricos, con el objeto de permitir un estudio aproximado del objeto real o de proyectar un objeto antes de su construcción y de esta forma obtener información básica como el área y espacio ocupado así como la cantidad de material requerido para su fabricación.

El segundo, relacionado con la representación de figuras y cuerpos geométricos mediante expresiones algebraicas, las cuales permiten realizar cálculos precisos o estimaciones de las dimensiones de los objetos representados.

• La comunicación: se invita al estudiante a interpretar enunciados, así como a proponer soluciones a ejercicios y aplicaciones relacionadas con las áreas y volúmenes de algunos sólidos geométricos, estimulándolo a hacer uso de un lenguaje adecuado para referirse a ellos y a las figuras que los componen.

• El razonamiento: el presente módulo se apoya constantemente en preguntas, trazan un derrotero, para deducir algunas relaciones existentes entre las dimensiones de ciertas figuras y cuerpos geométricos y facilitan el estudio de dichos objetos geométricos, así como de los objetos reales que representan. También se recurre a las analogías, de tal forma que el estudiante pueda abordar el estudio de un objeto geométrico a partir de su similitud con otro ya estudiado.

• La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos: a lo largo del desarrollo de los temas, y en las actividades evaluativas, se presentan ejercicios que ayudarán a ganar destreza en el cálculo de áreas longitudes y volúmenes de algunas figuras y cuerpos geométricos.</td></tr>
<tr><td>Guía 2.

Potenciación de números reales</td><td>Propiedades de la potenciación de números reales.

Solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Guía 3.

Radicación de números reales.</td><td>Propiedades de la radicación de números reales.

Solución de problemas</td></tr>
<tr><td>Guía 4.

Logaritmación de números reales.</td><td>Propiedades de la logaritmación de números reales.

Solución de problemas.</td></tr>
</table>

En la gráfica siguiente observarás la relación existente entre los conceptos que vas a aprender.

$$\text{Reales } (\mathbb{R}) \begin{cases} \text{Racionales } (\mathbb{Q}) \begin{cases} \text{Enteros } (\mathbb{Z}) \begin{cases} \text{Naturales } (\mathbb{N}) \rightarrow 0, 1, \frac{16}{2}, \sqrt{9} \\ \text{Enteros negativos} \rightarrow -1, -\frac{16}{2}, \sqrt{9} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \rightarrow 5.23; \frac{5}{2}; 0.\widehat{54}; -\frac{5}{2} \end{cases} \\ \text{Irracionales } (\mathbb{I}) \rightarrow \pi = 3.141592654..., e = 2.718281..., \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988..., \sqrt{2} = 1.414213 \end{cases}$$

¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Cuando compras un coche, si deseas seguir una receta, o quieres decorar tu casa, si quieres plantar o realizar cultivos, estás utilizando los principios de las matemáticas. Las personas han estado utilizando estos mismos principios desde hace años en diferentes países y continentes. Ya sea que estén navegando en un barco frente a las costas de Europa o construyendo una casa en Canadá, se está usando las matemáticas para poder realizar las diversas actividades.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En cada una de las guías encontrarás la sección *Ejercito lo aprendido*, con la cual podrás evaluar tu destreza en cuanto al trabajo que se realiza con los números Reales y reforzar el desarrollo del contenido de cada guía.

También encontrarás al final del módulo, las secciones *Aplico lo aprendido* donde se proponen aplicaciones en las que combinarás tu habilidad manual y los conocimientos adquiridos y la sección *Evaluación*, en las que se proponen actividades individuales y grupales en las que tú, tus compañeros y el maestro podrán detectar los aspectos que debes reforzar con respecto a los números reales, sus propiedades y operaciones.

Explora tus conocimientos

1. Pitágoras, filósofo y matemático griego, vivió entre los años 582 y 496 a.C.

   a. ¿A qué edad murió?

   b. ¿Cuántos años hace de eso?

2. Si una lámina metálica tiene de espesor $\frac{4}{64}$ de pulgada, ¿cuántas láminas iguales a ésta hay que superponer para obtener una altura de $7\frac{2}{4}$?

3. Una persona compró un automóvil en \$ 33 000 000 y lo vendió ganando $\frac{1}{3}$ del costo. ¿Cuál fue el precio de venta?

4. Encuentra el valor de n sí $\sqrt[n]{\frac{512}{4913}}=\frac{8}{17}$.

Guía 1

Los números reales

Estándares:

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

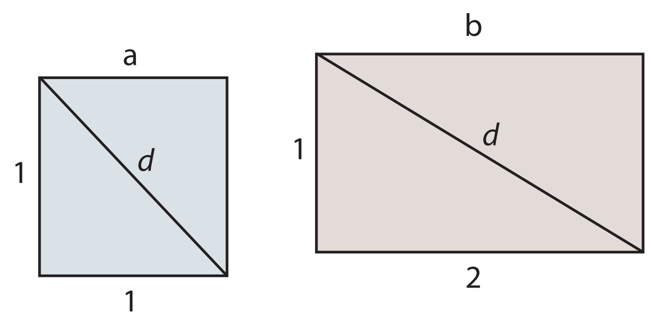
Lo que sabemos

En esta guía se analizarán los procedimientos y posibles problemas que puedo resolver al trabajar con el sistema de los números reales.

El conjunto de números racionales no es suficiente para resolver algunos problemas algebraicos y geométricos. Por ejemplo, hallar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 (Zill y Dewar, 1996). En la antigüedad, Pitágoras y sus seguidores creían que todas las cantidades podían ser expresadas como la razón $\left(\frac{a}{b}\right)$ de dos números enteros, paradójicamente fueron ellos quienes descubrieron los números irracionales. En esta guía se abordaran los números irracionales, los números reales y las propiedades que cumplen las operaciones tanto de adición como multiplicación, de los números reales.

Trabajo en grupo

En grupos de dos estudiantes dibujen un cuadrado de lado 1 cm y un rectángulo cuya altura es 1 cm y base es 2 cm. Como los que se muestran en la siguiente figura:



- ¿Cuál de las dos diagonales es de mayor valor?
- Calculen el valor de las diagonales con ayuda del teorema de Pitágoras.

- Estudien el cálculo del valor de la diagonal del cuadrado:

Con ayuda del teorema de Pitágoras encontramos el valor de *d* tanto del cuadrado, como del rectángulo.

Para la diagonal del cuadrado

De acuerdo con el teorema de Pitágoras $1^2 + 1^2 = d^2$

De donde se tiene $2 = d^2$

$\sqrt{2} = d$

Es decir *d* es un número tal, que al multiplicarlo por sí mismo da como resultado 2.

Al digitar en una calculadora la raíz de 2, observamos que la raíz con 7 decimales es $\sqrt{2} = 1{,}4142135$

Pero al multiplicar este número por él mismo

$1{,}4142135 \times 1{,}4142135 = (1{,}4142135)^2$

El resultado es 1,99999982358225, casi es el valor de 2. El desarrollo de la historia ha encontrado expresiones decimales que son aproximaciones de $\sqrt{2}$ sin que el valor sea exacto y sin encontrar un periodo que permita llevar dicha expresión a encontrarle una forma $\frac{a}{b}$.

- De forma análoga, intenten encontrar el valor de *d* del rectángulo y expresen dicho valor *n* mínimo con cinco cifras decimales. Comprueben su valor.

Aprendamos algo nuevo

Un nuevo sistema numérico: los números irracionales

Lee con atención el siguiente texto, que presenta la demostración de que $\sqrt{2}$ es un número no racional.

Para la demostración se utiliza la metodología conocida como Reducción al absurdo. Este consiste en decir un enunciado de forma contraria para que sea un enunciado opuesto al original. Es decir, si afirmamos que " $\sqrt{2}$ es un número no racional"; de forma contraria dicho enunciado es " $\sqrt{2}$ la raíz cuadrada de 2 es un número racional".

A continuación se muestra dicha demostración:

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ donde p y q son números enteros, $\frac{p}{q}$ es irreductible y $q \neq 0$.

Entonces: $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$

Multiplicando por q a ambos lados de la igualdad: $q\sqrt{2}=p$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad: $q^2(\sqrt{2})^2=p^2$

Aplicando propiedades de la potenciación se tiene: $2q^2=p^2$

Como se observa $2q^2$ es necesariamente un número par, lo cual implica que p^2 es también par y esto a su vez quiere decir que p es necesariamente par. Entonces p se puede escribir como $p = 2n$ ya que esta es la forma de representar cualquier número par.

Reemplazando se tendría que la igualdad quedaría:

$$2q^2=(2n)^2$$

Desarrollando el cuadrado del miembro derecho de la igualdad:

$$2q^2 = 4n^2$$

Dividiendo por 2 ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$q^2 = 2n^2$$

Lo cual implica q^2 que es par y esto a su vez quiere decir que q es necesariamente par. Ahora si q es par se puede escribir como $2m$

Realizando los correspondientes reemplazos, la igualdad quedaría:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2n}{2m}$$

Y esto indicaría que se puede simplificar por 2, contradiciendo la suposición de que $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible.

Al llegar a desarrollar una contradicción con las condiciones iníciales de la demostración, se dice que el enunciado es verdadero.

Es decir, los enunciados contradictorios son que "***$\frac{p}{q}$ es una fracción irreductible***" y "**$\frac{p}{q}$ es una fracción reductible**". Esto se debe a la suposición de que "***raíz cuadrada de 2 es un número racional***". Por tanto, es verdadero que "***raíz cuadrada de 2 no es un número racional***".

- Contesta las siguientes preguntas:
  - » ¿Qué significa que un número sea racional?
  - » ¿Por qué no puede ser 0?
  - » ¿Qué significa que una razón sea una fracción irreductible?
  - » ¿Es verdad que si p^2 es par, p también debe ser par? Justifica tu respuesta.
  - » ¿Qué significa que un número sea no racional?
  - » ¿El texto prueba que hay un número racional $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$? Justifica tu respuesta.
  - » ¿El texto prueba que no hay un número racional $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$? Justifica tu respuesta.

Los números irracionales, son aquellos que no pueden ser representados como la razón de dos números enteros $\frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$. Si no existen dos números naturales p y q tales que $i = \frac{p}{q}$ se dice que ***i*** es un número irracional.

Si se quisiera representar un número irracional en forma decimal, este tendría una parte decimal infinita y sin que se pudiera obtener un periodo. Si se escribe el número con un número finito de decimales entonces se tiene una aproximación del correspondiente número irracional. Algunos de los números irracionales son representados por símbolos especiales.

El conjunto de los números irracionales se representa con la letra *I*.

Números que representan aproximaciones de algunos números irracionales

Los estudios de las tablas babilónicas que datan de 2000 años antes de Cristo, encuentran algunas aproximaciones a raíz cuadrada de 2 ($\sqrt{2}$) como:

$$\sqrt{2} \approx \frac{30547}{21600} \text{ (Robson y Fowler, 1998).}$$

En un antiguo texto Hindú de matemáticas llamado el Sulbasutra que data de 200 años antes de Cristo, propone la aproximación $\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$ (Knudsen, 2005).

Trabajo en grupo

- Utiliza la calculadora y realiza la división de cada una de las aproximaciones dadas de raíz cuadrada de 2 por las tablas babilónicas y el Sulbasutra.
- Compara dichos valores con el que obtiene al calcular $\sqrt{2}$ en la calculadora. ¿Cuál de las dos aproximaciones es más cercana al valor obtenido con calculadora?

El valor de $\sqrt{2}$ ha sido calculado hasta 137.438.953.444 cifras decimales por el matemático japonés Yasumasa Kanada, lo cual ilustra la imposibilidad de expresar un número irracional en forma exacta.

Algunos de los números irracionales que más se usan en las matemáticas escolares se muestran en la tabla a continuación:

Algunos de los números irracionales más usados

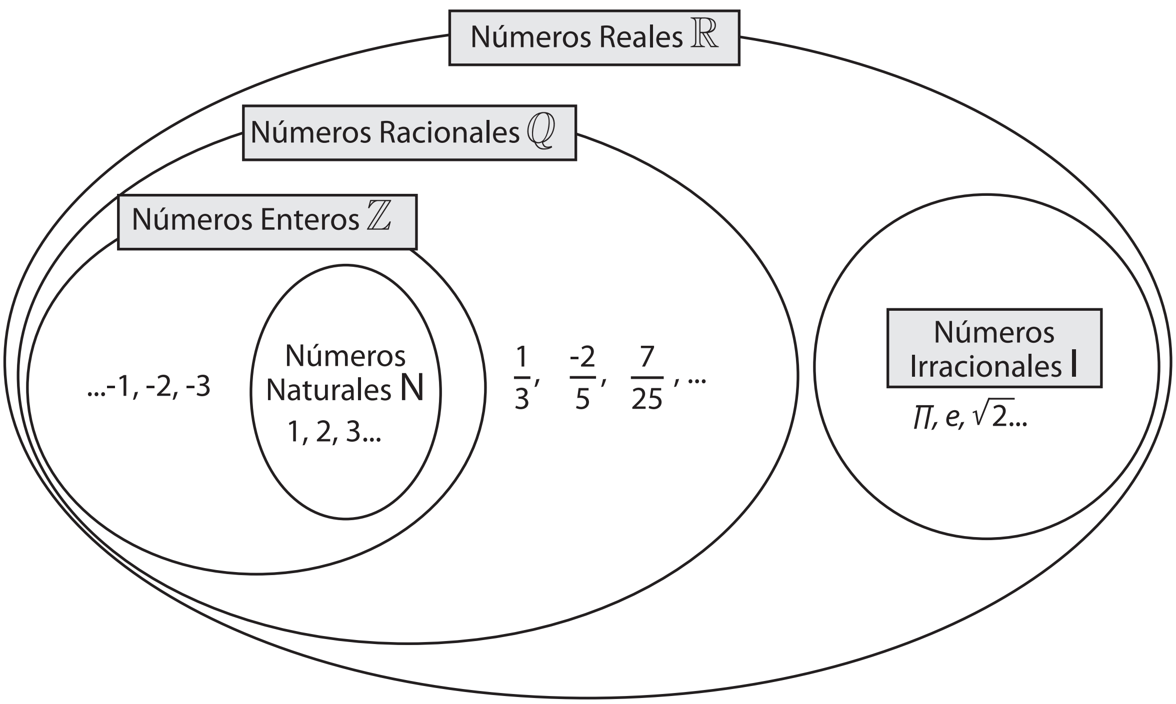
Lectura del número	Símbolo del número	Aproximación decimal con 8 cifras decimales
Raíz cuadrada de 2	$\sqrt{2}$	1,414213562
Pi	π	3,14159265
Raíz cuadrada de 3	$\sqrt{3}$	1,73205081
Número de Euler	e	2,71828183

En la práctica para operar con los números irracionales se dejan indicadas las operaciones o se da una aproximación de sus resultados.

Los números reales: un conjunto de la unión de los números racionales con los números irracionales

Los números reales como sistema, son definidos como el resultado de la unión de los números racionales con los números irracionales. Así como se ilustra en la siguiente figura.

Representación de los conjuntos de números



Las lecturas que se realizan del diagrama son:

- Todo número natural es un número entero pero no todo número entero es un número natural.
- Todo número entero es un número racional pero no todo número racional es un número entero.
- Todo número natural es un número racional.
- Ningún número racional es un número irracional

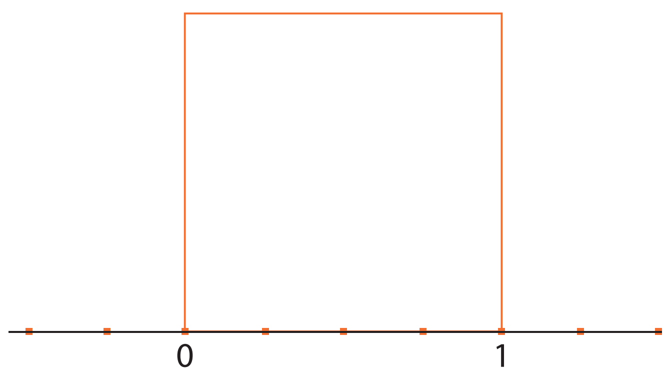
Así mismo, se entiende que:

Los números naturales son un subconjunto de los números enteros ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$), los números enteros son un subconjunto de los números racionales ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$) y los números naturales son un subconjunto de los números racionales ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$). Los números racionales no son subconjunto de los números irracionales ($\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{I}$).

La representación de los Números Irracionales en la recta numérica

Después de ver, la forma en que se presentan los números irracionales, lo más natural es que te preguntes como se pueden ubicar estos números en la recta numérica, la pregunta que un estudiante se haría es ¿cómo hago para representar por ejemplo $\sqrt{2}$?. El siguiente procedimiento te sirve para representar ciertos números irracionales. Comencemos entonces:

En tu cuaderno, dibuja una recta numérica donde se observe claramente el cero y el uno, este segmento puede estar divido por cuartos, como se muestra en la figura. Con el segmento de cero a uno tomado como un lado, construye un cuadrado.



Ahora traza una diagonal del cuadrado que construiste que pase por cero. Observa que el cuadrado se divide en dos triángulos rectángulos. Para calcular la medida de esta diagonal aplicamos el Teorema de Pitágoras, donde a y b corresponden a los catetos del triángulo y c es su hipotenusa (en este caso la diagonal). De esta forma tenemos que:

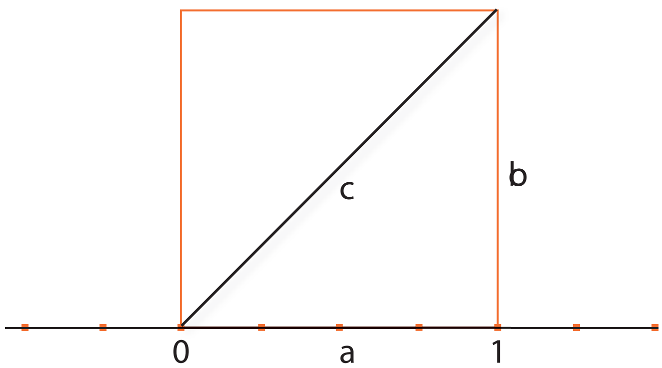
$$1^2 + 1^2 = c^2$$

Resolvemos los cuadrados, despejamos el cuadrado de c hallando la raíz de dos y obtenemos el valor de *c*.

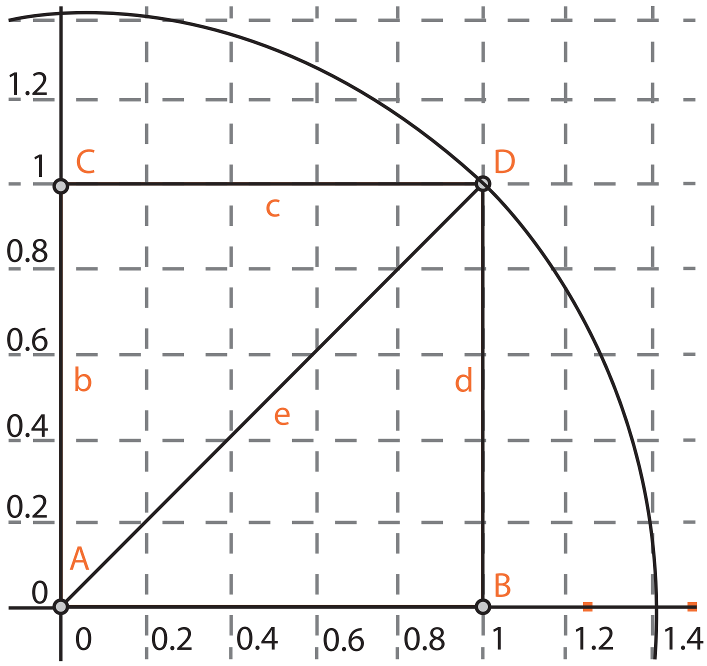
$$1 + 1 = c^2$$

$$2 = c^2$$

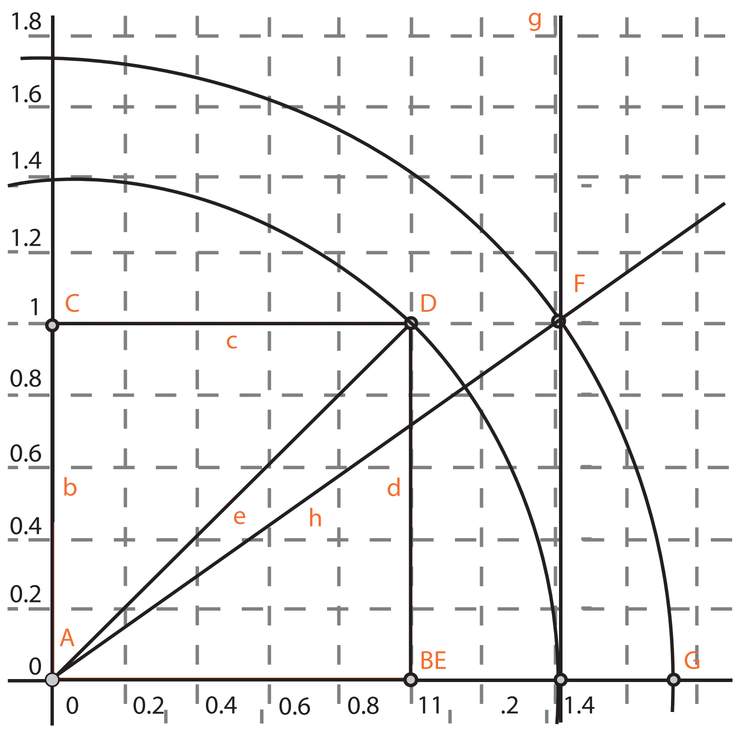
$$\sqrt{2} = c$$



Tomamos el compás y hacemos centro en el punto 0, tomamos la abertura de la diagonal del cuadrado y trasladamos la medida de esta diagonal a la recta numérica dejando fija la punta del compás en cero. Cuando terminados, encontramos que sobre la recta, el compás marco un número, este número es $\sqrt{2}$, que aproximadamente equivale a $\cong$1,4122



Si queremos ubicar en la recta a $\sqrt{3}$, trazamos un segmento que sea perpendicular a la recta que pasa por $\sqrt{2}$, y cuya longitud sea 1, en esta gráfica la recta va hasta el punto F. Con el compás, hacemos centro en 0 y tomamos la abertura hasta el punto F y trazamos la curva hasta que corte con la recta. El punto de corte E, es $\sqrt{3}$.



Ahora si repetimos el procedimiento para ubicar la raíz de 4, y la raíz de 5. ¿Qué sucede?, ¿cómo queda el gráfico?. Realiza esta actividad con tus compañeros y compara las respuestas.

La unión de los conjuntos de números racionales e irracionales forma el conjunto de los números Reales $\mathbb{R}$.

Simbólicamente,

$$\mathrm{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Propiedades de los reales

Propiedad clausurativa

Los números reales, en las operaciones de adición y multiplicación cumplen con una propiedad que llamamos *Clausurativa*:

Propiedad clausurativa o cerradura: si sumamos o multiplicamos dos números reales, el resultado siempre va a ser un número real.

Trabajo en grupo

En las siguientes operaciones puedes utilizar los valores aproximados de π y $\sqrt{2}$ para hallar el resultado.

a. $\frac{3}{4} + \pi$ b. $5 + (-\sqrt{2}\,)$ c. $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

d. $\frac{3}{4} \bullet \pi$ e. $5 \bullet (-\sqrt{2}\,)$ f. $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}$

- Discutan y respondan las siguientes preguntas:
  - » ¿Los resultados de las adiciones que obtuvieron son números reales?
  - » ¿Los valores reales de las adiciones (sin usar aproximaciones) serán números reales?
  - » ¿Los resultados de las multiplicaciones que obtuvieron son números reales?
  - » ¿Los valores reales de las multiplicaciones (sin usar aproximaciones) serán números reales?

Propiedad clausurativa o cerratura de la suma o del producto: Si a y b pertenecen a los números reales entonces: **a + b** y **a • b** son números reales

Propiedad conmutativa

Cuando hablamos de conmutar, nos estamos refiriendo a cambiar de posición, en las operaciones como la suma o la multiplicación de los números reales, podemos cambiar de posición a los números y el resultado no va a variar.

- Utilicen valores aproximados de π y $\sqrt{2}$ para realizar las operaciones que se indican a continuación.

a. $\frac{3}{4} + \pi$ y $\pi + \frac{3}{4}$

b. $5 + (-\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}) + 5$

c. $\frac{3}{4} \bullet \pi$ y $\pi \bullet \frac{3}{4}$

d. $5 \bullet (-\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}) \bullet 5$

Discutan y respondan las siguientes preguntas:

¿El orden de los sumandos altera el resultado de la adición?

Propiedad Conmutativa de la suma o del producto de números reales: si a y b son números reales se cumple: $a + b = b + a$ **y** $a \bullet b = b \bullet a$

Propiedad asociativa

Cuando nombramos asociar, se nos viene a la mente la reunión de algunos objetos. Y cuando trabajamos en matemáticas la propiedad asociativa, pasa algo similar, la característica es que para asociar en matemáticas debemos tener como mínimo tres números, cuando realizamos las operaciones asociando estos tres números, los resultados no nos cambian.

- Utiliza los valores aproximados de (-3), 7 y 12 para realizar las operaciones que se indican a continuación.

  a. ((-3)+8)+7

  b. (-3)+(8+7)

Resuelve con tus compañeros y responde las siguientes preguntas:

¿La forma de asociar los sumandos altera el resultado de la adición?

¿La forma de asociar los factores altera el resultado de la multiplicación?

Propiedad asociativa de la suma o del producto de números reales: si a, b y c son números reales se cumple:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \textbf{y} \qquad a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

Propiedad distributiva

La propiedad distributiva, es la única que relaciona dos operaciones, la multiplicación y la adición.

Como su nombre lo indica, distribuyo un número que se multiplica con la audición de otros dos. Ejemplo:

$$3 \bullet (5 + 4) =$$

$$= (3 \bullet 5) + (3 \bullet 4)$$

$$= 15 + 12$$

$$= 27$$

Teniendo como referencia este ejercicio, realiza los siguientes:

Utilicen valores aproximados de $\sqrt{3}$, 2 y 5 para realizar las operaciones que se indican a continuación.

a. $\sqrt{3} \cdot (2 + 5)$ b. $2 \cdot (5 + \sqrt{3})$

¿En qué se diferencian las dos expresiones del numeral a? ¿En qué se parecen?

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma de números reales: si a, b y c son números reales se cumple:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b + a \cdot b) \quad \textbf{y} \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c + b \cdot c)$$

Propiedad modulativa

Cuando hablamos de un módulo en matemáticas, nos referimos a un número que al ser operado con otro, me dé siempre el mismo resultado, bien sea en la suma o en el producto. En el caso de la multiplicación este número es el 0 (cero) y en la suma es el 1.

Realiza las siguientes operaciones y fíjate bien cuáles son los resultados de acuerdo a los números que se operan. Escribe esto en tu cuaderno y socialízalo con tus compañeros.

a. $\pi + 0$ b. $\frac{3}{5} + 0$ c. $(-\sqrt{5}\ ) + 0$ d. $(-\sqrt{3}\ ) + 0$

e. $\pi \bullet 1$ f. $\frac{3}{4} \bullet 1$ g. $5 \bullet 1$ h. $(-\sqrt{2}\ ) \bullet 1$

Propiedad modulativa del producto o de la suma de números reales o existencia de elementos neutros: si *a* es un número real se cumple:

$a + 0 = a$ y $a \bullet 1 = a$

Propiedad invertiva

- Cuando hablamos de invertiva en matemáticas, estamos hablando de opuestos o contarios. Por ejemplo cuando hablamos del inverso de 8 podemos decir que es -8, pues es su opuesto si lo comparamos en la recta numérica.
- Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál crees que son los resultado de las siguientes operaciones?

a. $\pi + (-\pi)$ b. $\frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)$ c. $(-\sqrt{5}\ ) + \sqrt{5}$ d. $(-\sqrt{3}\ ) + \sqrt{3}$

e. $\pi \bullet \frac{1}{\pi}$ f. $\frac{3}{4} \bullet \frac{1}{\frac{3}{4}}$ g. $5 \bullet \frac{1}{5}$ h. $(-\sqrt{2}\ ) \bullet \frac{1}{(-\sqrt{2}\ )}$

Propiedad invertiva de la adición o existencia del opuesto, también llamado inverso aditivo y **propiedad invertiva** del producto o existencia del recíproco, también llamado inverso multiplicativo: si ***a*** es un número real diferente de **0** existen ***–a*** también llamado **opuesto o inverso aditivo de *a*** y $\frac{1}{a}$ también llamado **recíproco o inverso multiplicativo de *a***, tales que:

$$a + (-a) = 0 \qquad \text{y} \qquad a \cdot \frac{1}{a} = 1 \cdot$$

Restricción: Si a **es 0 es evidente que 0+(-0) = 0, pero no existe** $\frac{1}{0}$

Ejercitemos lo aprendido

1. Ubica en la recta numérica, las siguientes cantidades:

   $\sqrt{5}, \sqrt{9}, -\sqrt{11}, -\sqrt{13}.$

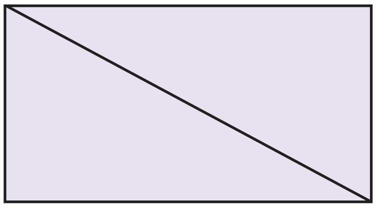
2. Completa los siguientes enunciados para que sean verdaderos:

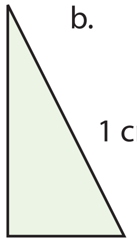
   - 5 y 7 son números naturales y aunque la operación 5 - 7 no es posible dentro de los números naturales, si es posible dentro de los números ______________

   - No es posible repartir equitativamente 5 panes entre 10 personas, de tal forma que les correspondan unidades enteras, porque 5÷10 no tiene respuesta dentro de los números ______________, pero es posible hacerlo dentro del conjunto de los números ______________

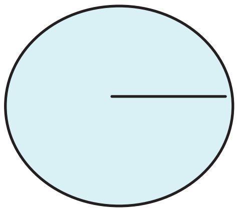
   - Los números __________ y los __________ conforman juntos un nuevo conjunto en donde es posible encontrar solución a ecuaciones como $x = \sqrt{3}$, este conjunto además contiene los números enteros y los naturales.

3. Encuentra el valor de las longitudes *d* y *h* en el rectángulo (a) y el triángulo (b) respectivamente, mostrados en la siguiente figura, utilizando el teorema de Pitágoras.





4. Halla el perímetro de la circunferencia mostrada en la figura (c) con una aproximación a tres cifras decimales. Recuerda que el perímetro del círculo es $p = 2\pi r$



Ejemplos geométricos con alguna medida irracional

Realiza las siguientes operaciones apoyándote en las propiedades de los números reales y utilizando aproximaciones a tres cifras decimales.

a. $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})$ b. $\frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)$ c. $\sqrt{\left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)}$

5. Con $\frac{1}{8}$ del dinero que llevaba, Lorenzo compró una bicicleta que costó $1.600.000. Luego se gastó $\frac{2}{3}$ del dinero que le quedaba. ¿Cuánto dinero llevaba? ¿cuánto dinero se gastó en la segunda compra?

6. En una finca cafetera, 5 de cada 7 empleados cobran cada 15 días; 2 de cada 9, cobran mensualmente y el resto cobra semanalmente. Si en total hay 630 empleados, ¿cuántos empleados hay de cada clase?

7. Un quinto de los ingresos de una familia se invierten en el pago de servicios públicos $\frac{1}{3}$, se emplean en arriendo, $\frac{1}{12}$ alimentación, $\frac{1}{4}$ en educación y el resto es ahorrado. ¿Qué parte de los ingresos es ahorrada?

   - Si los ingresos familiares ascienden a $ 2.700.000, ¿cuánto dinero se invierte en cada aspecto?

8. Un agricultor recolectó 78,7 kg de trigo y 89,5 kg de cebada. Luego vendió la libra de trigo a $ 1.300 y la de cebada a $ 1.250. ¿Cuánto dinero recibió por la venta?

9. Un vehículo A consume 7,5 litros de gasolina por cada 100 kilómetros y otro B consume 8,2 litros de gasolina por cada 100 kilómetros.

   - ¿Qué cantidad de gasolina consume cada vehículo en un kilómetro?
   - ¿Cuál será el costo de la gasolina que consume cada vehículo en un trayecto de 540Km, si el galón de gasolina cuesta $ 6.750?

10. Un litro de aceite pesa 0,92 Kg. ¿Cuál es el peso de ocho canecas de aceite de 10 *l* cada uno? ¿cuántos litros de aceite que contiene una caneca que pesa 23 Kg?

11. Un camión transporta tres bloques de mármol de 1,3 toneladas cada uno y dos vigas de hierro de 0,5 toneladas cada una.

   - ¿Cuántas toneladas transporta el camión?
   - Si una tonelada es igual a 1.000 kg, ¿cuántos kilos transporta el camión?

12. Si un cuadrado tiene una de sus diagonales igual a 1 cm, ¿cuál es la medida de sus lados? Responde las siguientes preguntas:

   - ¿Cuánto miden sus lados? Usa el teorema de Pitágoras para hallar el lado.
   - ¿Cuánto mide el área? recuerda que el área de un cuadrado es la multiplicación de los valores de las longitudes de los lados l^2

Guía 2

Potenciación de números reales

Estándar:

Pensamiento numérico

- Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

En esta guía se analizarán los procedimientos y posibles problemas que se pueden resolver al trabajar con el sistema de los números reales, cuando se requiere trabajar con potenciación.

Lo que sabemos

Una situación donde se puede encontrar la potenciación es cuando doblamos una hoja de papel. Toma una hoja tamaño carta y realza algunos dobleces. En una tabla como la siguiente, podemos escribir la cantidad de partes que obtenemos de acuerdo a los dobleces que hacemos.

Número de dobleces	Partes que se obtienen
1	2
2	4
3	8

La potenciación de números reales es una multiplicación abreviada de factores iguales. Al tener 2 x 2 x 2 x 2, se puede representar por la expresión $2^4 = 16$, donde 2 se llama la base, el 4 se llama exponente y el 16, potencia.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a$$

Donde *a* es un número real y *n* es un entero positivo.

Aprendamos algo nuevo

Propiedades de la potenciación de números reales.

1. **Producto de potencias de igual base:** Si tenemos un producto de bases iguales y cada base tiene su exponente, dejamos la base y sumamos los exponentes. Si $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{Z}^+$, entonces $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

   Ejemplo $(-2)^4 \times (-2)^3 \times (-2)^5$

   $$= (-2)^{4+3+5} = (-2)^{12}$$

2. **Cociente de potencias de igual base:** Si tenemos un cociente de potencias que tiene base igual y el exponente del numerador es mayor al exponente del denominador, dejamos como resultado una sola base y al exponente mayor le restamos el exponente menor. Esto es: Si $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{Z}^+$ entonces $\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m}$ con $a \neq 0$ y $n > m$.

   Ejemplo $\frac{(3)^5}{(3)^3} = (3)^{5-3} = (3)^2$

3. **Potencia de una potencia:** En este caso tenemos una base y la elevamos a un exponente, a esta la volvemos a elevar a otro exponente. Lo que hacemos es que dejamos la misma base y multiplicamos los exponentes. **Si** $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{Z}^+$ entonces $[(a)^m]^n = (a)^{m \times n}$

   Ejemplo $[(-4)^2]^6 = (-4)^{2 \times 6} = (-4)^{12}$

4. **Potencia de un producto:** Tenemos un producto entre paréntesis, y fuera del paréntesis hay un exponente que afecta a este producto, lo que hacemos es aplicar la propiedad distribuir el exponente entre los dos términos de la multiplicación. **Si** $a \in \mathbb{R}$ **y** $n, m \in \mathbb{Z}^+$ y entonces $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

   Ejemplo $(2 \times (-5))^3 = (2)^3 \times (-5)^3$

5. **Potencia de un cociente:** Tenemos un cociente entre dos números que son reales, esto números se afectan por una potencia que se encuetra fuera de un parentesis del cociente, para aplicar la propiedad, lo que se hace es repartir tanto en el numerador como en el denominador, el exponente. **Si** $a \in \mathbb{R}$ **y** $n, m \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejercitemos lo aprendido

1. Representa con potencias las siguientes expresiones:

a. $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) =$

b. $(5) \times (5) \times (5) \times (5) \times (5) =$

c. $(x) \times (x) \times (x) \times (x) \times (x) \times (x) =$

d. $(ab) \times (ab) \times (ab) =$

e. $(c) \times (c)^2 \times (c)^3 \times (c)^4 =$

f. $(-m)^4 \times (-m)^5 \times (-m)^2 =$

g. $(w)^a \times (w)^{2a} \times (w)^{4a} =$

h. $(-ab)^{2n} \times (-ab)^{3n-1} \times (-ab)^{3n-2} =$

i. $\dfrac{(b)^{5a-1}}{(b)^{2a-1}} = \_\_\_\_$

j. $\dfrac{(-x)^3 \times (-x)^5 \times (-x)^2}{(-x)^6 \times (-x)^2} =$

k. $\dfrac{[(-3)^2]^7 \times [(-2) \times 6]^9}{\dfrac{(6)^8}{(6)^3} \times [(-3)^2]^4 \times (-2)^6} =$

l. $\dfrac{\left[\dfrac{(-3)^8 \times (-3)^{11}}{[(-3) \times (-3)]^6}\right]^2 \quad \dfrac{(8)^{16} \times (-4)^{14}}{\dfrac{(-4)^6}{(-4)^2} \times (8)^6 \times (8)^2}}{[(8) \times (8)]^2 \times \dfrac{(-4)^6 \times (-4)^2}{[(-4)^2]^3} \times (-3)} =$

2. Calcula el valor de las expresiones teniendo en cuenta el valor de las variables:

a. $a^2 + 2ab + b^2$, cuando $a = 8$ y $a = -3$.

b. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, cuando $a = 5$ y $b = 2$.

c. $b^2 - 4a^2b^3 + 7b - 8$, cuando $a = 5$ y $b = 7$.

d. $a^7 + 4b^2 + 7ab - 9b^3$, cuando $a = 1$ y $b = 5$.

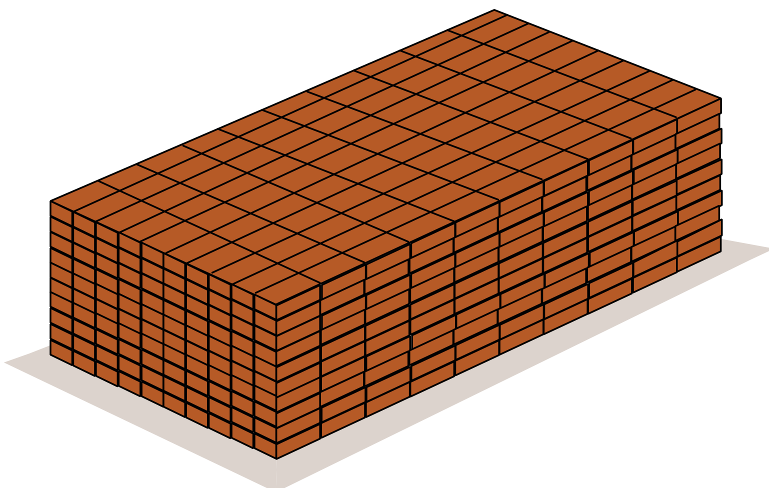
Solución de problemas

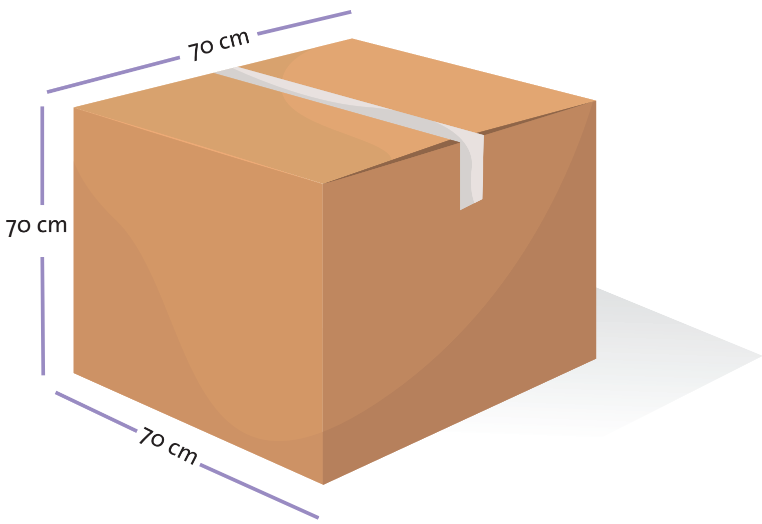
a. Una columna de forma cúbica tiene 10 ladrillos de ancho, 10 ladrillos de largo y 10 ladrillos de alto. ¿Cuántos ladrillos se necesitaron para formar la columna?

b. Si necesitamos armar una caja de cartón de 70 cm de ancho, 70 cm de largo y 70 cm de alto, ¿cuál es el volumen de la caja?

c. Una determinada especie se reproduce dividiéndose en tres cada nuevo día, es decir, en el primer día hay un individuo, en el segundo día serán tres, y en el tercer día serán 9, así sucesivamente. ¿Cuántos individuos habrá al sexto día? ¿Abra una forma generar de expresar el n-ésimo día?

d. En un tren de 10 vagones se transportan 10 cajas en cada vagón. Cada caja contiene 10 bolsas, y cada bolsa pesa 10 kg. ¿Cuál es el peso total de la carga de este tren?





Guía 3

Radicación de números reales

Estándar:

Pensamiento numérico

- Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

En esta guía se analizarán los procedimientos y posibles problemas que se pueden resolver al trabajar con el sistema de los números reales, cuando se requiere trabajar con radicación.

Lo que sabemos

La radicación de números reales es la operación inversa de la potenciación, en la potenciación se pide hallar la potencia, conociendo la base y el exponente, mientras que la radicación permite hallar la base, conociendo el exponente y la potencia. De esta forma se tiene:

$$\text{Si, } 5^2 = 25 \text{ entonces: } \sqrt[2]{25} = 5$$

Es así como se tiene que $\sqrt[n]{a} = b$, donde a es el radicando, n es el índice y b es la raíz.

Dados a y b números reales y n un entero positivo, $\sqrt[n]{a} = b$ sí $b^n = a$. Si n es un entero par, a y b deben ser mayores o iguales que 0.

Aprendamos algo nuevo

Propiedades de la radicación de números reales.

1. **Producto de raíces:** Esta propiedad se aplica solamente cuando se están multiplicando números dentro de las raíces con igual índice radical. De esta manera se tiene: $\sqrt[n]{a \bullet b} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$, para tener una idea clara tenemos como ejemplo: $\sqrt[2]{121 \bullet 49} = \sqrt[2]{121} \bullet \sqrt[2]{49} = 7 \bullet 11 = 77$

2. **Cociente de raíces:** Cuando tenemos un cociente de números con igual índice, podemos aplicar la propiedad. De esta manera tenemos que: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Un ejemplo es: $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$

3. **Adición de raíces:** La propiedad es aplicada solamente a raíces con igual radicando. $\sqrt[n]{a} + ... + \sqrt[n]{a} = s\sqrt[n]{a}$, donde s es la cantidad de veces que se repite la raíz dada. Un ejemplo es: $\sqrt[2]{6} + 2\sqrt[2]{6} + 4\sqrt[2]{6} = 1{+}2{+}4\sqrt[2]{6} = 7\sqrt[2]{6}$

4. **Cambio de una raíz para expresarlo como una potencia:** Esta propiedad permite expresar cualquier raíz como una potencia. De esta manera tenemos que: $\sqrt[b]{a^c} = a^{\frac{c}{b}}$. Un ejemplo es: $\sqrt[4]{8^3} = 8^{\frac{3}{4}}$

5. **Raíz de una raíz:** permite expresar en forma de potencia la raíz de una raíz: $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a^n}} = b^{\frac{n}{b \cdot c}}$ de esta manera tenemos como ejemplo: $\sqrt[5]{\sqrt[2]{5^{15}}} = 5^{\frac{15}{10}} = 5^{\frac{3}{2}}$

Ejercitemos lo aprendido

1. Realiza las siguientes operaciones:

a. $\sqrt{25} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-1} =$

b. $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{64} - (-15) =$

c. $\sqrt{100} + \sqrt{8} - (-8) =$

d. $\sqrt{625} - \sqrt[7]{-128} + \sqrt[7]{-1} =$

e. $\sqrt[4]{16} - (-15) + \sqrt{16} =$

f. $\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{10.000} + \sqrt{16}$

2. Expresa en forma de una sola raíz:

a. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{3}} =$ b. $5\sqrt[2]{5\sqrt[2]{5\sqrt[2]{5}}} =$ c. $\sqrt[n]{x\sqrt[m]{x}} =$

3. Escribe cada radical en forma de potencia

a. $\sqrt[2]{\dfrac{16x^3}{9y^5}} =$ b. $\sqrt[3]{8a^6}$ c. $\sqrt[2n]{\sqrt[n]{3^{n^2}}} =$

4. Efectúa las siguientes operaciones con radicales y simplifica.

a. $\sqrt{25} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-1} =$ b. $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{64} - (-15) =$ c. $\sqrt{100} + \sqrt{8} - (-8) =$

d. $\sqrt{625} - \sqrt[7]{-128} + \sqrt[7]{-1} =$ e. $\sqrt[4]{16} - (-15) + \sqrt{16} =$ f. $\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{10.000} + \sqrt{16}$

5. Simplifica las siguientes expresiones.

a. $\sqrt[n]{a^{4n} + b^{2n} + c^n} =$ b. $\sqrt[2]{\dfrac{18c^5}{16c^3}} =$ c. $\sqrt[3]{\sqrt[6]{512b^9}} =$

d. $\sqrt{\dfrac{45x^5y^3}{48z^7}} =$ e. $\sqrt[3]{(2x+y)^5} =$ f. $\sqrt[3]{8a^6} =$

Solución de problemas

1. Ramón tiene una granja de forma cuadrada, de 225 metros cuadrados de área, que quiere cercar con alambre. Entre una estaca y otra quiere colocar tres filas de alambre. Él tiene 190 metros de alambre.

   a. Si la separación entre dos estacas consecutivas es 1 metro, ¿cuántas estacas necesita colocar?

   b. ¿Le sobra alambre para la cerca o le falta? Explica.

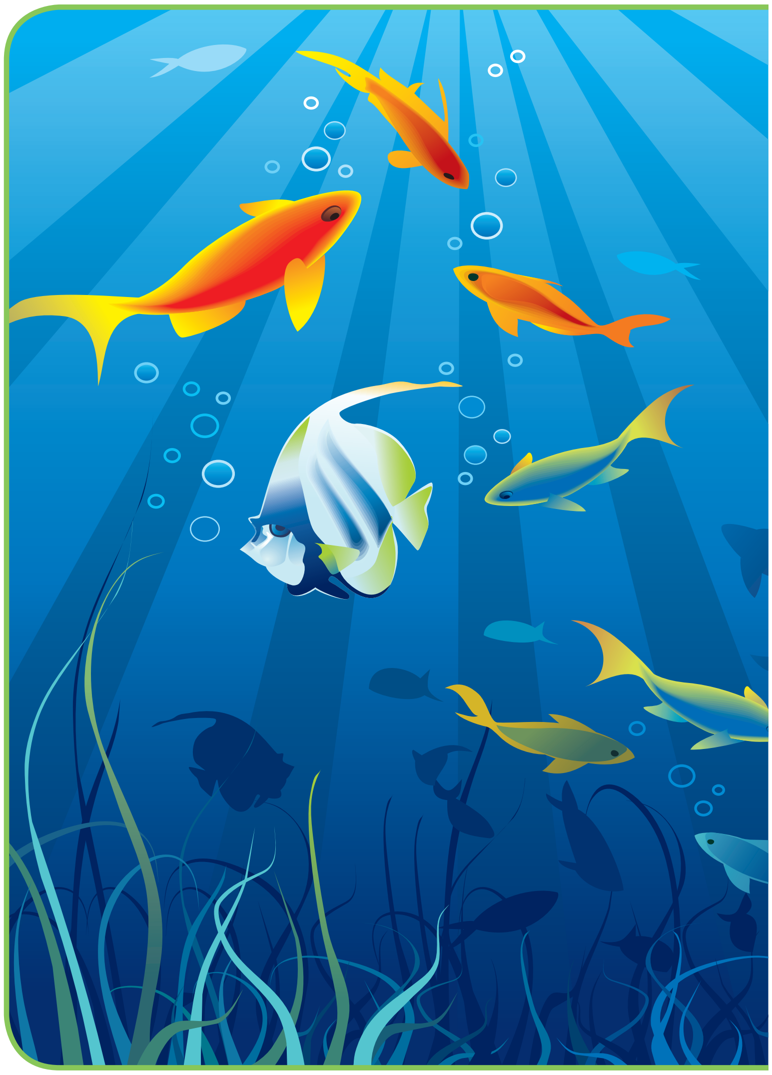
2. Si el área de un terreno cuadrado es de 1.562.500 cm^2, ¿Cuánto mide su perímetro?

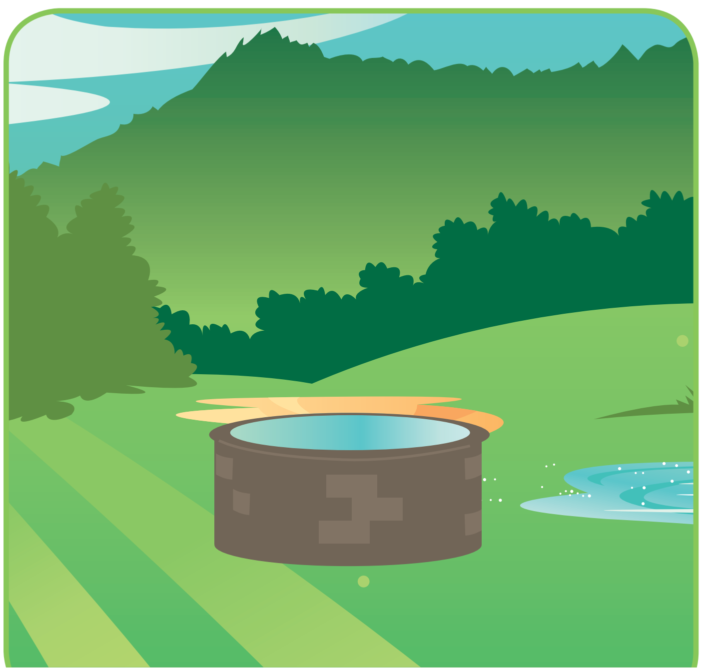
3. El centro acuático nacional de Pekín "Cubo de agua", tiene aproximadamente un volumen de 22.627.417 cm^2. ¿De cuántos metros cuadrados es su superficie?

4. Un depósito en forma cúbica tiene una capacidad de 1,728 m^3. Si el agua contenida en el depósito ocupa un volumen de 1,296 m^3, ¿qué altura alcanza el agua en el depósito?

5. Un terreno tiene 500 metros de largo y 45 de ancho. Si se le diera forma cuadrada, ¿cuáles serían las dimensiones de este cuadrado?

6. En un depósito hay 250.047 dm cúbicos de agua, la cual adopta la forma de un cubo. Si el agua llega a 15 dm del borde, ¿cuáles serán las dimensiones del estanque?





Guía 4

Logaritmación de números reales

Estándar:

Pensamiento numérico

- Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

En esta guía se analizarán los procedimientos y posibles problemas que se pueden resolver al trabajar con el sistema de los números reales, cuando se requiere trabajar con logaritmación.

Lo que sabemos

La logaritmación es la operación que permite conocer el exponente dada la potencia y la base.

Dados dos números reales: *a* (positivo) y b (positivo y diferente de 1), diremos que el logaritmo de *a* en base b es el número real que utilizado como exponente de la base b nos da el número *a*.

Es decir: $log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$ donde *c* y *a* deben ser reales positivos.

La base de un logaritmo siempre debe ser un número real mayor que cero y diferente de 1. Cuando la base no es explícita se está calculado en base 10.

Aprendamos algo nuevo

Propiedades de la logaritmación de números reales.

1. **Logaritmo de un producto:** al aplicar la propiedad, distribuimos el logaritmo como suma en cada uno de los elementos que teníamos al comienzo, $\log_n (a \bullet b \bullet c) = \log_n a + \log_n b + \log_n c$ como un ejemplo tenemos:

$$\log_3 (75 \bullet 26 \bullet 56) = \log_3 75 + \log_3 26 + \log_3 56.$$

2. **Logaritmo de un cociente:** Para aplicar la propiedad, al numerador le restamos el denominador: $\log_n \left(\frac{a}{b}\right) = \log_n a - \log_n b$, un ejemplo es: $\log_3 \left(\frac{52}{623}\right) = \log_3 52 - \log_3 623$.

3. **Logaritmo de una fracción unitaria:** Para aplicar ésta propiedad hacemos los siguiente $\log \frac{1}{b} = -\log b$, de esta forma lo podemos aplicar en ejercicios como: $\log \frac{1}{25} = -\log 25$.

4. **Logaritmo de una potencia:** Para aplicar ésta propiedad, tenemos la siguiente expresión $\log_n a^x = x\log_n a$ es así como podemos simplificar expresiones como $\log_3 81^7 = 7\log_3 81 = 7 \bullet 4 = 28$.

Ejercitemos lo aprendido

1. Calcula el valor de x en las siguientes expresiones:

a. $\log_2 x = 3$	b. $\log_6 x = 3$	c. $\log_2 x = 4$	d. $\log_4 x = 1$
e. $\log_5 x = 0$	f. $\log_{\frac{3}{4}} x = 2$	g. $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$	h. $\log_{\frac{5}{2}} x = 3$
i. $\log_{0.3} x = -2$	j. $\log_x 27 = 3$	k. $\log_x 16 = 4$	l. $\log_x 81 = 2$
m. $\log_x \frac{1}{9} = 2$	n. $\log_x \frac{16}{25} = 2$	o. $\log_x \frac{1}{8} = 3$	p. $\log_x \frac{1}{4} = -2$

2. Simplifica las siguientes expresiones, aplicando las propiedades de los logaritmos.

   a. $\log_b b + \log_a a =$

   b. $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n =$

   c. $\log_b 1 \cdot \log_a a =$

   d. $\log_b \dfrac{b}{c} + \log_b (bc) =$

   e. $3 \log_p p^4 =$

   f. $\log_a a^3 + \log_b b^5 =$

   g. $\log_a (ac) + \log_p p^3 + \log_b b - \log_a c =$

   h. $\log_b \sqrt[3]{b} + \log_c \sqrt[4]{c} =$

Solución de problemas

1. Si una población de gérmenes comienza con 100 gérmenes y se cuadruplican cada cuatro horas, la cantidad de gérmenes al cabo de n horas es de $100 \cdot 4^{n-1}$. ¿Cuándo llegará la población a 102.400 gérmenes?

2. En un gran laboratorio de clonación empezaron un proceso de reproducción de determinado individuo. Se decide que de un individuo original se clonan 3 individuos en primer ciclo, y a su vez de cada individuo del primer ciclo se clonan otros tres individuos en el segundo ciclo, y así sucesivamente.

   a. ¿Cuál será la expresión que te permite determinar el ciclo de donde salieron 81 clones?

   b. ¿En cuál ciclo se clonan 27 individuos?

   c. ¿Cuántos individuos hay en total en el tercer ciclo?

Apliquemos lo aprendido

1. Desarrolla aplicando las propiedades de los logaritmos:

   a. $\log (3ab)$

   b. $\log \left(5\ \dfrac{a}{2}\right)$

   c. $\log \left(4a\ \dfrac{2}{3}\right)$

   d. $\log (a3b5)$

   e. $\log \left(2\ \dfrac{a}{b}\right)$

   f. log

2. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3$; $\log 3 = 0{,}47$; $\log 5 = 0{,}69$ y $\log 7 = 0{,}84$; calcula, sólo utilizando estos valores, los siguientes logaritmos:

   a. $\log 4$

   b. $\log 12$

   c. $\log 81$

   d. $\log 42$

   e. $\log \left(\dfrac{5}{7}\right)$

   f. $\log 3{,}5$

   g. $2\log 250$

   h. $(\log 18) \cdot (\log 16)$

3. Desarrolla, aplicando las propiedades de los logaritmos:

a. $\log(3ab)$ b) $\log\left(5\,\frac{a}{2}\right)$ c) $\log\left(4a\,\frac{2}{3}\right)$

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

1. Indica las afirmaciones que son falsas:

a. Los números naturales cumplen con las propiedades clausurativa, asociativa, conmutativa y modulativa de la adición y con la distributiva del producto con respecto a la adición.

b. Los números enteros cumplen con las propiedades clausurativa, asociativa, conmutativa y modulativa de la multiplicación así como con la distributiva del producto con respecto a la adición.

c. Los números irracionales cumplen con las propiedades para adición y producto: clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa y la distributiva del producto con respecto a la adición.

d. Los números irracionales cumplen con las propiedades para adición y producto: clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa e invertiva así como la distributiva del producto con respecto a la adición.

e. La operación $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ se puede realizar dentro de los números racionales porque el resultado es un racional.

f. La operación $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ se puede realizar dentro de los números reales y el resultado es un real.

g. La operación $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ se puede realizar dentro de los números reales y el resultado es un racional.

h. La operación $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ no se puede realizar dentro de los racionales pero el resultado si es un racional.

2. No se puede afirmar que la operación $(1 + 4) \cdot 3$:

a. Tiene respuesta dentro de los números naturales.

b. Tiene respuesta dentro de los números racionales.

c. Tiene respuesta dentro de los números irracionales

d. Tiene respuesta dentro de los números reales

3. Selecciona la respuesta correcta:

El resultado de la operación $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{-6}{11}\right)$ es:

a. $\frac{-3}{16}$ b. $\frac{-18}{55}$ c. $\frac{5}{17}$ d. -1

¿Cómo me ven los demás?

Realiza en forma individual la siguiente actividad en unas hojas marcadas.

1. Observa la figura a continuación:

Pesos de diferentes bolsas de café

- ¿Cuál es la expresión decimal de cada peso?
- ¿Cuántos kilogramos de café hay en total? Expresa el total como una fracción y con su correspondiente expresión decimal.
- Si un kilogramo equivale a 1.000 g, ¿cuántos gramos de café hay en total?

2. Marquen y reunan las hojas. Formen grupos de dos estudiantes. Cada grupo de recibirá en forma aleatoria dos trabajos de su compañeros, los corregirá y hará las recomendaciones que crean necesarias, luego devolverán los trabajos a quien los realizó inicialmente.
3. En las mismas hojas de los trabajos, discutan las correcciones y recomendaciones de sus compañeros.

¿Qué aprendí?

Responde según la manera en la que te desenvolviste en el desarrollo del módulo. Justifica tu respuesta.

	Sí	No	A veces	Justifico
Represento números irracionales en la recta numérica.				
Identifico y aplico las propiedades de los números reales tanto en algoritmos como en la solución de problemas.				
Identifico las propiedades de la potenciación, radicación y logaritmación de números reales.				
Aplico las propiedades de la potenciación, radicación y logaritmación de números reales en situaciones problema.				
Participo activamente en clase y expreso mis opiniones de manera respetuosa.				
Aporto en las actividades que son trabajo en grupo.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Respeto las opiniones de mis compañeros de curso.				
Me preocupo por preparar sus trabajos y exposiciones.				
Me intereso por aprender de manera significativa.				

Determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento.

Módulo 2

Operando con expresiones algebraicas

¿Qué vas a aprender?

Este módulo te permitirá avanzar en el manejo del lenguaje algebraico con el cual podrás describir, modelar y caracterizar situaciones de manera comprensiva y operar con expresiones que incluyen letras que representan variables que relacionan a muchos, uno o ningún valor correspondiente a los números reales.

Así mismo, se reconoce que las expresiones algebraicas permiten expresar ideas, procesos o generalizar propiedades de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

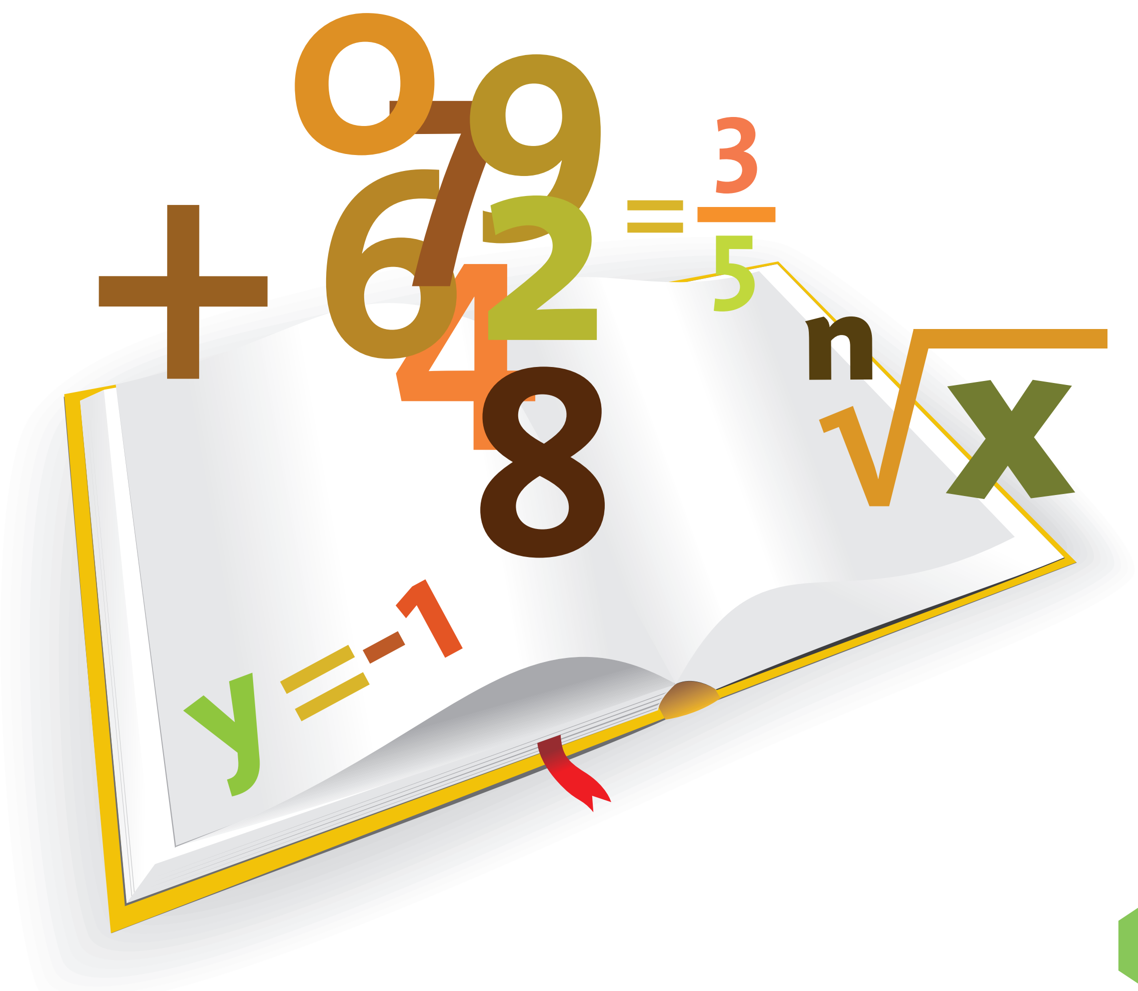
Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Pensamiento espacial

- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

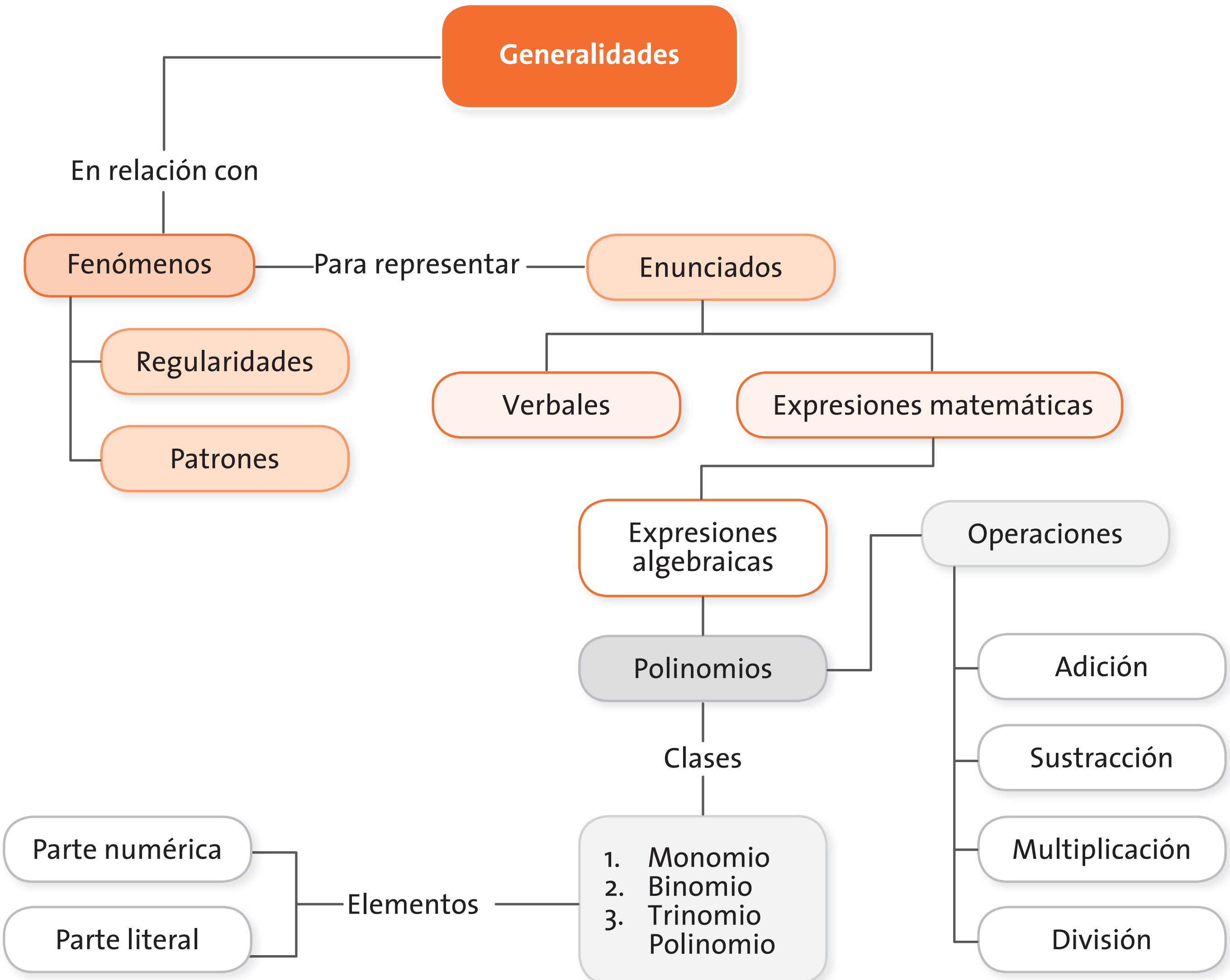
La realización de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo te permitirá alcanzar estándares básicos de competencias en matemáticas que privilegian el desarrollo del pensamiento variacional, numérico y espacial, al comprender las características, propiedades y conceptos de monomio, binomio y polinomio; así como las posibles relaciones entre estos y sus operaciones; esto con el fin de que logres generar y argumentar una conclusión, idea o propuesta, en relación a la interpretación de estas representaciones matemáticas. Las actividades favorecerán el desarrollo de los procesos generales de la actividad matemática: la comunicación, el razonamiento, la ejercitación, la modelación y la resolución de problemas.



En la siguiente tabla se especifican las guías que conforman el módulo.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 5.
Expresiones matemáticas</td><td>Generalizaciones
Enunciados verbales Enunciados simbólicos
Desigualdades
Ecuaciones
Regularidades</td><td rowspan="6">Se favorecen los procesos de:
Comunicación al utilizar símbolos para expresar ideas matemáticas y al evaluar expresiones algebraicas que permitan representar alguna relación entre lo geométrico y lo variacional, así como para expresar ideas matemáticas relacionadas con la utilización de una variable.
Razonamiento cuando se interpretan generalizaciones de propiedades; se aplican las propiedades de la multiplicación y de la potenciación de números reales para multiplicar polinomios y al argumentar con validez los procesos que se aplican en las operaciones básicas entre monomios, binomios y polinomios.
Ejercitación de procedimientos, cuando se ejecutan procedimientos rutinarios que permiten un desarrollo significativo y comprensivo de los conceptos matemáticos relacionados con los polinomios y sus operaciones.
Modelación al utilizar material concreto para representar polinomios, hacer más comprensible su concepto y al escribir la expresión algebraica representada en un modelo geométrico.
Resolución de problemas, al establecer relaciones entre las operaciones algebraicas y perímetros de figuras planas, permitiendo al estudiante desarrollar una actitud mental perseverante que le permita desarrollar estrategias, procedimientos o modelos para solucionar los problemas.</td></tr>
<tr><td>Guía 6.
Polinomios</td><td>Monomios
Grados absoluto y relativos entre monomios
Polinomios
Términos semejantes</td></tr>
<tr><td>Guía 7.
Operaciones aditivas con polinomios</td><td>Monomios
Elementos de un monomio
Grados de un polinomio
Términos semejantes
Adición de polinomios
Sustracción de polinomios
Representaciones geométricas de algunos polinomios</td></tr>
<tr><td>Guía 8.
Multiplicación de polinomios</td><td>Multiplicación de polinomios
Representaciones geométricas de algunas áreas
Multiplicación de polinomios
Productos notables: el cuadrado de un binomio
$(a + b)^2$ y $(a - b)^2$</td></tr>
<tr><td>Guía 9.
División de polinomios</td><td>División de polinomios</td></tr>
<tr><td>Guía 10.
Productos notables</td><td>Cuadrado de la suma o de la diferencia entre de un binomio.
Cubo de un Binomio
Producto de dos binomios de la forma $(x + a)(x + b)$</td></tr>
</table>

El siguiente esquema te muestra la manera como se relacionan los conceptos.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Las expresiones algebraicas sustentan su manera de determinar equivalencia entre ellas, a través de las relaciones y propiedades de los números reales. Las expresiones algebraicas se utilizan para representar ideas científicas que han permitido grandes avances en las ciencias, la tecnología y las relaciones comerciales, entre otras.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

Este módulo pretende que todos los ejercicios, problemas y actividades permitan al estudiante desarrollar procesos de comunicación, modelación, razonamiento, ejercitación de procedimientos y resolución de problemas; así como evaluar constantemente el grado de aprendizaje logrado y evidenciar el entendimiento, manejo, representación y comprensión de conceptos como monomio, binomio y polinomio, sus propiedades y operaciones.

Explora tus conocimientos

1. Escribe la operación que relaciona cada enunciado.

   » La mitad de un número.
   » 120 dividido entre 5.
   » La suma de 7 y un número.
   » Un número dividido entre 32.
   » Un número disminuido en 18.
   » Un número aumentado en 32.
   » Diez veces un número.
   » Cinco más que un número.
   » La diferencia entre un número y 6.
   » 7 menos que un número.
   » El cociente entre dos números.
   » El producto entre dos números.
   » Un número restado de 78.

2. Escribe cada enunciado como una expresión matemática. Reemplaza los nombres por letras.

   » Alejandro mide 18 centímetros más que Sandra.
   » Doris tiene 29 años menos que su papá.
   » Hace 3 años la edad de Juan era el triple de la de Mónica.

Guía 5

Expresiones matemáticas

Estándares

Pensamiento variacional

- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

Lo que sabemos

Una de las finalidades del lenguaje matemático es poder generalizar algunas reglas o propiedades que se cumplen en ciertos sistemas.

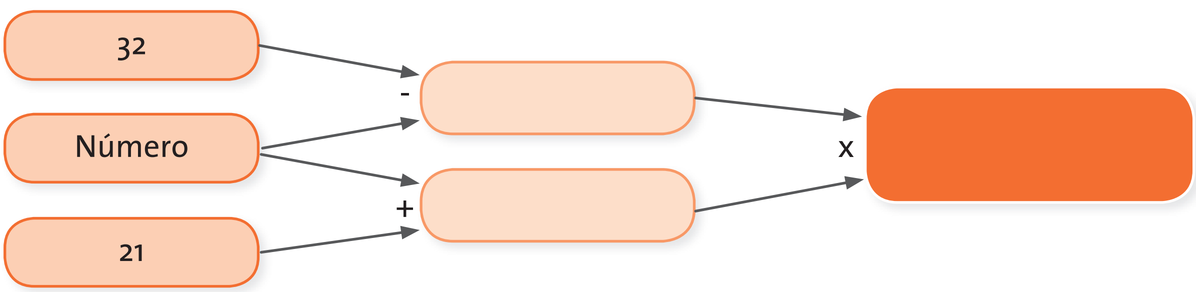
Esta guía te brinda herramientas para llegar a expresar generalizaciones o regularidades empleando letras, las cuales se pueden evaluar en algunos valores específicos.

Trabajo en grupo

Reúnete con dos compañeros y realicen las siguientes actividades.

1. Para cada uno de los siguientes números, sigan las instrucciones que se indican en el esquema, remplazando la palabra número por las siguientes cantidades:

   » 14 » 18 » 6



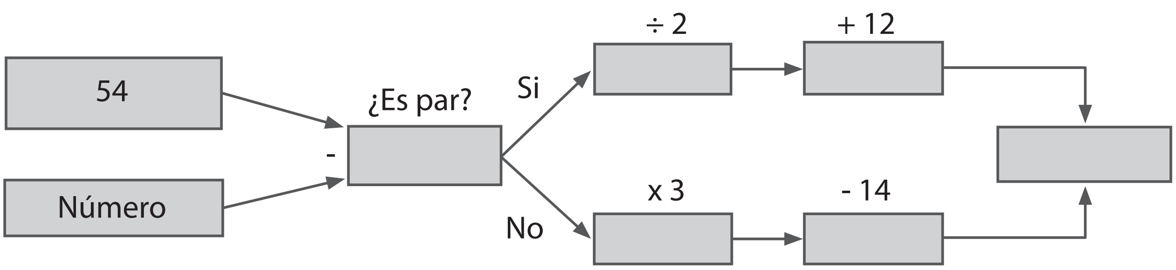
2. Apliquen las anteriores instrucciones a los siguientes números:

   » -8 » $\frac{3}{-4}$

3. Para cada número, sigan las instrucciones que se dan a continuación en el orden de las flechas dadas. En cada caso escriban el resultado final.

   » 24 » 13

4. Escriban con sus palabras, el significado de cada una de las siguientes expresiones matemáticas.



   » $x + y = y + x$

   » $(m \cdot n) \cdot z = m \cdot (n \cdot z)$

   » $a + b = 7$

Aprendamos algo nuevo

Las matemáticas pueden comunicarse a través de diferentes lenguajes. Por ejemplo, con una representación gráfica, con una expresión general, con una tabla, con un enunciado verbal, entre otros.

Algunas veces, para poder comunicar una afirmación o un proceso, es necesario utilizar letras para referirse a los números o los enunciados que en algunos casos son constantes o variables como estudiamos en algún módulo de las cartillas de posprimaria.

Esas letras, en algunos casos, tienen como finalidad, representar a todos los elementos que cumplen esa característica o a un elemento en particular.

Por ejemplo: si se sabe que $x + y = y + x$, siendo $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ perteneciente a los números racionales, las letras $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ representan a todos los números racionales.

Así mismo hay enunciados como "la edad de María es el doble de la de Juan", que se representa $M = 2 \cdot J$ y significa que la edad de J y M tienen un valor numérico indeterminado que pertenece a los números naturales.

Si se tiene la expresión verbal " *Si A es el conjunto de los números naturales menores que cinco*", dicha expresión se refiere a que se tienen los siguientes números naturales 0, 1, 2, 3, y 4. Para representar esta idea, usamos la letra x, que representa cualquier elemento de ese conjunto. En ese caso se escribe la expresión matemática correspondiente así : $x < 5$, para $x \in N$.

Al utilizar letras para indicar una propiedad o relación para más de un elemento, se está realizando una generalización.

No siempre es posible hacer generalizaciones; para hacerlo, se debe tener la certeza que la propiedad o el enunciado se cumple para todos los elementos del conjunto que se tome como referencia.

Estas situaciones son ejemplos particulares.

- ¿Qué es lo que encuentras en común en esas tres expresiones?
  - » $12 \div 4 = 3$
  - » $(-18) \div 9 = -2$
  - » $144 \div (-6) = -24$
- Contesta las siguientes preguntas:
  - » ¿Son divisiones? ¿De qué clase de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales?
  - » ¿Qué relación presenta el dividendo y el divisor?
  - » ¿Qué propiedad o relación cumple el cociente con el dividendo?

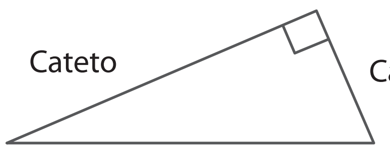
Todo este tipo de observaciones nos permiten establecer la siguiente afirmación:

"Cuando se dividen enteros cuyo dividendo es múltiplo del divisor, el cociente es un número entero".

La anterior expresión verbal es una generalización.

- Nombra dos ejemplos más que apoyen la expresión verbal dada.
- ¿Será posible encontrar un ejemplo que vaya en contra del enunciado? Escríbelo.
- En otra guía de las cartillas anteriores, estudiaste y aplicaste el teorema de Pitágoras. ¿Recuerdas en qué consiste? Si no tienes claridad, busca o consulta.

Triangulo rectángulo



Si ***a*** representa el valor de la longitud de la hipotenusa, ***b*** el valor de la longitud de uno de los catetos y ***c*** el valor de la longitud del otro cateto, en los triángulos rectángulos se encuentra que el valor de la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al valor de la longitud de la hipotenusa al cuadrado. Esta relación es conocida como **Teorema de Pitágoras** y se generaliza con la siguiente expresión:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Siendo las letras ***a, b*** y ***c***, cualquier número real.

Otro de los casos del empleo de las letras es cuando solo se refiere al valor de un elemento de un conjunto. Normalmente, dichas expresiones se refieren a lo que se conoce como ecuación.

Entonces, las letras se utilizan para indicar valores desconocidos en enunciados como:

¿qué número adicionado con –5 es igual a $\frac{5}{7}$?

Para representar dicho enunciado en forma matemática se establece que el número desconocido se representa con una letra, por ejemplo ***t***; el enunciado se traduce simbólicamente así:

$$t + (-5) = \frac{5}{7}$$

- Encuentra el valor de ***t***.

Los esquemas se presentan como una forma de seguir ordenadamente un proceso.

- ¿Por qué crees que es importante seguir, en un esquema, el orden indicado por las flechas?

- Si en el primer esquema, primero se multiplica por 5 y luego se adiciona -4, ¿se obtendrá el mismo resultado si cambio el orden de la indicación?

- Compruébalo.

Generalmente, los esquemas se utilizan para indicar procedimientos en determinadas situaciones en las cuales se involucran varias operaciones, aunque en algunas ocasiones aparecen en orden las indicaciones para realizarlas paso a paso.

Trabajo en grupo

Sigan las indicaciones en el orden en el que se presentan:

1. Piensen un número.

2. Al número pensado, réstenle 3.

3. Multipliquen por – 6 el resultado de esa resta.

4. Eleven al cuadrado el resultado de esa multiplicación.

5. Finalmente, dividan por 2 el resultado de la potencia.

6. Escriban el resultado.

Contesten:

- ¿Qué número pensaron?
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar el número?
- Construyan un esquema que corresponda a las indicaciones dadas.
- Llamen el número desconocido x.
- Luego, reemplacen el valor de x por -5 y hallen el resultado.

Las anteriores indicaciones las podemos escribir en la siguiente expresión matemática:

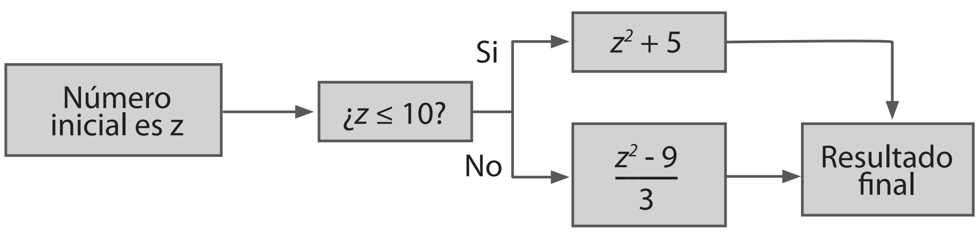
$$\frac{[(x - 3)(-6)]^2}{2}$$

Cuando se está reemplazando la letra x por un número específico se dice que la expresión matemática se está evaluando.

- Evalúen la expresión $\frac{[(x - 3)(-6)]^2}{2}$ para los siguientes valores de x, $x = -6$, $x = 18$ y $x = \frac{1}{2}$.
- Evalúen la expresión $7k + 10$, para $k = 8$ y $k = -10$.

Existen expresiones matemáticas que representan relaciones de orden. Cuando se expresa en uno de los miembros de la relación una letra se denominan desigualdades.

Sigan las indicaciones que se dan en el siguiente esquema. Realicen las indicaciones con los valores $z = 12$ y $z = 7$.



En este caso, es necesario tomar una decisión acerca del camino que se debe tomar para obtener una respuesta. Situación que se ha presentado anteriormente en otro esquema.

Hasta ahora se han trabajado expresiones que al ser evaluadas, dan como resultado una única respuesta; pero en ocasiones los valores que hacen verdadera una expresión matemática son varios números y en ese caso, se llama conjunto solución.

Observen:

- ¿Qué valores del conjunto P = {2, 4, 6, 8}, satisfacen la expresión $2 \cdot x - 5 > -1$?

Así mismo, la expresión $2 \cdot x - 5 > -1$ se puede escribir sin el punto; pero se debe entender que hay una multiplicación entre el 2 y el valor de x. Por lo tanto, la expresión puede escribirse como:

$$2x - 5 > -1$$

Para conocer qué valores de los dados en el conjunto P satisfacen dicha desigualdad; es necesario evaluarla para cada uno de los valores.

Si $x = 2$, entonces, $2(2) - 5 = 4 - 5 = -1$

- -1 no es mayor que -1. Es decir que 2, no satisface la desigualdad.

- Continúen evaluando la expresión. ¿Qué valores, del conjunto P, la satisfacen?

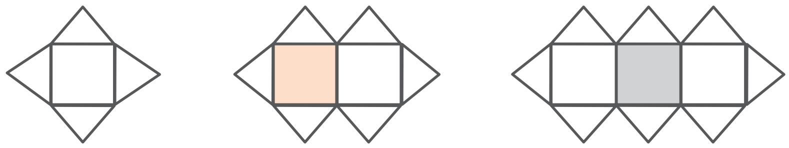
Las letras se utilizan para formar parte de representaciones de enunciados o procesos. Se analizan casos particulares o, son evaluadas por números específicos, a través de la sustitución o el reemplazo de la letra por cada uno de esos números.

Hay situaciones que son casos ordenados y particulares que analizando el cambio de uno a otro, se puede identificar un patrón o arreglo.

Cuando ya se piensa en muchos casos o en el último posible, se puede dar una generalización.

Observen el siguiente arreglo:

Organización de baldosas



1 2 3

Una baldosa cuadrada, necesita de cuatro baldosas triangulares para rodearla completamente.

Dos baldosas cuadradas requieren seis baldosas triangulares para rodearlas completamente.

- ¿Cuántas baldosas triangulares se requieren para rodear completamente tres baldosas cuadradas ubicadas como lo indica la figura 3?
- ¿Y para rodear completamente cuatro baldosas cuadradas?
- ¿Cuántas baldosas triangulares se necesitan para rodear cinco baldosas cuadradas? ¿Cuántas para rodear ocho baldosas cuadradas?
- ¿Cuántas baldosas triangulares se necesitan para rodear 15 baldosas cuadradas?
- Completa la siguiente tabla:

Cantidad de baldosas

Baldosas cuadradas	Baldosas triangulares
1	4
2	6
3	
4	
5	
6	
7	

Analiza cada arreglo buscando una relación en el orden en que aparecen. Es decir, partiríamos de 1, 2, 3, 4,… que corresponden a los números naturales.

Para el primer arreglo se requieren 4 baldosas.

El segundo arreglo cuenta con 6 baldosas.

Para el tercer arreglo se necesitan 8 y para el cuarto, 10.

Observa que los números de baldosas triangulares son pares y que el cambio de un caso a otro implica sumar 2.

Los números pares se reconocen como los números que encontramos al *multiplicar dos por un número natural*. Este enunciado en expresión matemática es:

$2 \cdot n$ siendo n un número natural.

Las operaciones de multiplicación en el sistema algebraico se representan con un punto o sin ningún signo. Por esta razón, de ahora en adelante representaremos dicha operación sin signo.

Entonces la expresión de los números pares quedaría:

$2n$ siendo n un número natural.

Ya encontrando la expresión del número par sabemos que se le agrega dos a cada caso. Entonces la expresión que modela la situación del número de baldosas triangulares que rodean baldosas cuadradas, sería:

$$2n + 2.$$

Para comprobar si dicha expresión general me permite calcular el número de baldosas triangulares, se verifica para algunos casos.

Para $n = 1$

Se reemplaza n por ese valor. Al realizar los cálculos:

$$2(1) + 2 = 2 + 2 = 4$$

Este valor es cierto para una baldosa cuadrada: se necesitan cuatro baldosas triangulares.

Para $n = 2$, al reemplazar se tiene:

$$2(2) + 2 = 4 + 2 = 6$$

Este valor es cierto para dos baldosas cuadradas: se necesitan seis baldosas triangulares.

Para $n = 3$, al reemplazar se tiene:

$$2(3) + 2 = 6 + 2 = 8$$

Este valor es cierto para tres baldosas cuadradas: se necesitan ocho baldosas triangulares.

- Comprueba para $n = 4$, $n = 5$ y $n = 15$.

La expresión $2(n) + 2 = \mathbf{2\boldsymbol{n} + 2}$ es la generalización o fórmula algebraica que nos permite calcular la cantidad de baldosas triangulares, que hay alrededor de cierta cantidad de baldosas cuadradas.

Ejercitemos lo aprendido

1. Sean a y b cualquier par de números. Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados.

   - El área de un rectángulo de largo a y ancho b.
   - La suma de a y b.
   - El triple de a disminuido en su cuadrado.
   - El doble de la suma de a y b.
   - b disminuido en 1.
   - a es un número mayor que b.
   - b está entre a y su opuesto.

2. Si a representa cualquier número, escribe en cada caso, un enunciado que pueda estar representado con las siguientes expresiones matemáticas.

   a. $a - 5$

   b. $2(a + 1)$

   c. $a + 3$

   d. $2a + 1$

   e. $\frac{1}{2}a$

   f. $(a - 1)^2$

   g. $a^3 + 4$

Trabajo en grupo

Reúnete con dos compañeros más y realiza los siguientes ejercicios.

3. Escriban, para cada expresión matemática, tres ejemplos numéricos que cumplan una igualdad.

   Para todos los números a y b se cumple que:

   a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   b. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

   c. $a + (-b) = a - b$

   d. $(-a)(-b) = ab$

4. Observen la siguiente secuencia de números: 1, 2, 4, 8, 16, 32,…

   • Llenen la siguiente tabla para determinar el orden en que aparecen los números:

Posición del número en la secuencia	Número que aparece
1º	1
2º	2
3º	
4º	
5º	
6º	
7º	

- Encuentren los números de la secuencia que van en las siguientes posiciones:

  a. posición 8 b. posición 10

- Determinen el patrón de regularidad entre cada término a través de una expresión matemática.

- Verifiquen la expresión matemática para los cinco primeros casos.

5. Evalúen o encuentren los valores que se obtienen de la expresión $4h + \frac{3}{5}$, para $h = 2$, $h = -9$, $h = -\frac{6}{7}$.

6. Evalúen las expresiones matemáticas dadas para $x = 3$, $y = -2$ y $z = 1$.

   a. $x + y - z$ b. $2x - y + 3z$ c. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}y + \frac{3}{4}z$

7. Encuentren la expresión matemática al reemplazar cada número en el diagrama.

- Evalúen la expresión matemática que obtienen para

h: número dado → Multiplicar por 0,8 → Se optiene el resultado final

a. $h = -4$ b. $h = \frac{1}{7}$ c. $h = 11$

8. Escriban el diagrama correspondiente para las siguientes condiciones:

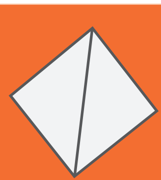
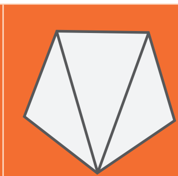
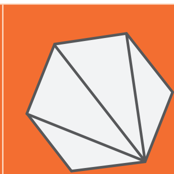
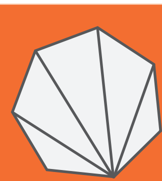
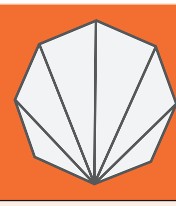
- Escriban un número, adiciónenle 20, el resultado multiplíquenlo por 3.

- Escriban la correspondiente expresión matemática.

- Ensayen el diagrama con los valores 5 y 28.
- Socialicen los diagramas ante el curso. ¿Todos los diagramas tienen los mismos pasos? ¿Qué operaciones se utilizaron? ¿Todos los diagramas son válidos?

9. En la siguiente tabla se muestran algunos polígonos y las diagonales que se pueden trazar desde uno de sus vértices.

Diagonales de polígonos

					
Lados del polígono	4				
Diagonales desde un vértice	1				

- Completen la tabla.
- Usen una letra para representar el número de lados del polígono.
- Teniendo en cuenta los datos de la tabla, escriban una relación entre el número de lados del polígono y el número de diagonales que se pueden trazar desde uno de sus vértices.
- Utilicen la relación obtenida en el paso anterior, e indiquen: ¿cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un polígono de ocho lados?, ¿de uno de diez lados?, ¿y de 15 lados?

Guía 6

Polinomios

Estándares

Pensamiento variacional

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

Lo que sabemos

En esta guía conocerás unas expresiones algebraicas especiales llamadas polinomios. Generalmente, el estudio de los polinomios se asocia a la resolución de ecuaciones y al estudio de las funciones polinómicas.

Trabajo en grupo

Forma grupo con dos compañeros más.

- Lean la siguiente situación:

  Gabriel camina todas las mañanas desde su casa hasta la escuela, una distancia de 3 km. Para llegar más rápido, él quiere comprar una bicicleta usada que le vende su vecino por un precio superior a $ 50.000, pero inferior a $80.000. Su papá prometió

  ayudarle dándole la mitad del costo de la bicicleta. Gabriel tiene ahorrada la tercera parte; si la abuela le regala $ 10.000, ¿cuánto dinero reúne Gabriel?

- Respondan las siguientes preguntas.

  » ¿Qué información se da en la situación de Gabriel?

  » ¿Cuál es el dato que se debe deducir con la información dada?

  » Si llaman *x*, al valor desconocido de la bicicleta, ¿es posible representar con un esquema la información que se da en el problema?

- ¿Es posible escribir una expresión matemática que represente las relaciones involucradas dadas por el problema?
- Escriban una expresión matemática distinta para representar:
  - » El costo de la bicicleta.
  - » El dinero que le da el papá.
  - » El dinero que le da la abuela.
  - » El dinero que reúne Gabriel.
- ¿Cuál de esas expresiones matemáticas contiene una desigualdad?
- Evalúen la expresión que representa el total de dinero que reúne Gabriel si el vecino le da $60.000.

Aprendamos algo nuevo

Las expresiones matemáticas que involucran letras son llamadas expresiones variables. En el caso de la situación de los aportes que Gabriel recibe para comprar la bicicleta, y lo que él ha reunido, se conocen también como **expresiones algebraicas**.

Una **expresión variable**, a las letras se les llama variables, (es decir que pueden tomar varios valores) y los números son llamados los coeficientes que pueden estar multiplicando una variable o no. También podemos encontrar un número que no tiene variable y lo llamamos término independiente.

Una **expresión algebraica** es la combinación de números y letras utilizando las diferentes operaciones como la suma, la resta, la multiplicación, la división y la potenciación. A cada expresión que se encuentra separada por un signo + o un signo – la podemos llamar **término** de la expresión algebraica.

Ejemplos de expresiones algebraicas:

$2x + y$ $\qquad$ $3m^2$ $\qquad$ $(4m - 2)(3y - 5\sqrt{3})$

En las expresiones algebraicas se identifican:

- Números acompañados con letras o letras solas.
- Operaciones

Para poder entender mejor las expresiones algebraicas, te presentamos el siguiente cuadro que te mostrara algunas expresiones que utilizas en la cotidianidad y que hacen parte de un leguaje algebraico.

Leguaje cotidiano	Expresión cotidiana
El doble de un número	$2x$
Un número aumentado en cuatro	$x + 4$
Un número disminuido en cinco	$x - 5$
Dos veces un número aumentado en seis	$2x + 6$
Un tercio de un número aumentado en dos	$\frac{1}{3}x + 2$

Una expresión algebraica que tiene un solo término que es una constante o el producto de una constante y potencias enteras positivas de las variables, se llama monomio. De esta manera las expresiones como 2,3x, $3a^2$, son monomios.

Las expresiones algebraicas que se denominan monomios son expresiones que muestran una multiplicación entre números reales.

Expresiones como $\frac{1}{2}x$, $2z^2$, $2x$ o $\frac{1}{3}x$ son expresiones que representan una multiplicación entre números reales.

¿Cuáles son los factores en esas multiplicaciones?

Los números $2, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ que acompañan a la letra *x*, se conocen como **coeficientes**.

Las letras x, y z^2 se identifican como la **parte literal** de esas expresiones.

La parte numérica o el coeficiente de un monomio, es la parte numérica de la expresión y **la parte literal** de un monomio, está conformada por las letras, con sus respectivos exponentes, que representan cualquier número real.

Estos son ejemplos de monomios:

a. $3yz$	b. $\sqrt{2}x^3y$	c. $6s^3p^2$
d. $-9x^2y^3z^2$	e. $\frac{7}{8}mn^4$	f. $-12m^3n^2$

En el monomio, $-12m^3n^2$, el número -12 es el coeficiente y las letras con sus respectivos exponentes m^3 y n^2, son la parte literal.

- Hallen el coeficiente y la parte literal de los otros monomios.

Como observamos los monomios son expresiones que tienen parte numérica y parte literal pero la parte literal muestra potencias cuya base son letras y los exponentes todos son números enteros positivos. Pero existen dos monomios especiales:

1. Los que son sólo un número, ya que la parte literal es una letra que tiene exponente cero. Ejemplo:

   $$3 = 3x^0$$

   3 es un monomio que puede tener como parte literal x^0 ya que el valor de la letra puede ser cualquiera aunque a veces la letra la da el mismo contexto de la expresión algebraica. Es decir, es el monomio $3x^0$.

   ¿Por qué podemos afirmar que x^0 es 1?

   ¿Podemos afirmar que la multiplicación que se refiere el monomio 3 es la de factores 3 y 1?

2. Los que son solo una letra, o una o varias potencias cuya base es una letra, o varias letras. Ejemplo:

   m es un monomio así $1m$.

En ese caso, la parte literal es m, pero por la propiedad modulativa de los números reales:

$$m = 1m$$

y^3 es el monomio $1y^3$

$x^2y^3z^5$ es el monomio $1x^2y^3z^5$.

Las siguientes expresiones algebraicas no son monomios:

$$-2u^{\frac{1}{2}}, \qquad 18c^{-2}, \qquad \frac{1}{x}$$

debido a que en la parte literal los exponentes no son enteros positivos y en una expresión de división no puede estar como denominador.

Para tener más claridad sobre los términos de las expresiones algebraicas, expresemos los diferentes términos de:

a. $\frac{2}{3}x^4y^2 - 7x^3y$ b. $5x + 6$ c. $4a^3b - 3ab + 2$

Expresión	Términos	Coeficientes	Término independiente
$\frac{2}{3}x^4y^2 - 7x^3y$	$\frac{2}{3}x^4y^2; - 7x^3y$	$\frac{2}{3}$ y - 7	No tiene
$5x + 6$	$5x; 6$	5 y 6	6
$4a^3b - 3ab + 2$	$4a^3b; - 3ab; 2$	4; -3 y 2	2

Los monomios que coinciden exactamente en la misma parte literal se denominan monomios semejantes o términos semejantes.

Por ejemplo, $-3x^2$ y $8x^2$ son monomios semejantes ya que tiene la misma parte literal x^2.

Mientras que $8xy^3$ y $-6x^3y$, no son términos semejantes, ya que cada monomio tiene distinta la parte literal.

Las expresiones algebraicas que se obtienen de sumar o restar monomios se denominan polinomios.

Si un polinomio tiene dos monomios se denomina binomio; si tiene tres términos se conoce como trinomio.

Por ejemplo:

$4x - 3xy^2$ es un binomio.

$2x^5 - 3y + 9$ es un trinomio.

$4z^4 - 2z^3 - 15z^2 + z - 7$ es un polinomio de cinco monomios o términos.

Cuando se tienen monomios semejantes se suman de la siguiente forma:

- Se adiciona la parte numérica como los números reales y se escribe la misma parte literal.

La expresión $6x^3 + 2x^3 - \frac{2}{3}x^3$ está mostrando una suma de monomios semejantes que se desarrolla sumando solo la parte numérica y dejando la parte literal:

En $6x^3 + 2x^3 - \frac{2}{3}x^3$ se ha indicado una suma algebraica de términos semejantes.

$$\left(6 + 2 - \frac{2}{3}\right)x^3 = \left(\frac{18 + 6 - 2}{3}\right)x^3 = \frac{22}{3}x^3$$

Otro ejemplo:

$3x^5 - 14x^5 + 2x^5$ es una expresión que se puede reducir a un solo monomio ya que todos sus términos tienen la misma parte literal. Así:

$$\begin{aligned} 3x^5 - 14x^5 + 2x^5 &= (3 - 14 + 2)x^5 \\ &= -9\,x^5 \end{aligned}$$

Este proceso se conoce como simplificación o reducción.

Grados relativos y absolutos de un polinomio

Todos los polinomios tienen un grado que se determina por los exponentes que están en la parte literal.

- Analiza los siguientes monomios.

a. $3x^2y$ b. $-4xy^3$ c. $5x^4y^3$ d. $-6x^3y^2$

» Identifica el exponente de *x* en cada caso.

» Identifica el exponente de *y* en cada caso.

» ¿Cuál es el resultado de la adición de los exponentes de la parte literal en cada uno de los casos?

El exponente de cada una de las letras de la parte literal del monomio, representa el **grado relativo** del monomio respecto a esa letra.

Por ejemplo,

En el monomio $3x^2y$, el grado relativo respecto a *x* es 2, y respecto a *y*, es 1.

- ¿Cuál es el grado relativo respecto a *x* o respecto a y, en el monomio $5x^4y^3$?

Se llama grado relativo de un monomio, respecto a una de las letras de la parte literal, al exponente que tenga dicha letra.

El **grado absoluto de un monomio** es el resultado de la suma de los exponentes de los términos de la parte literal del monomio.

Por ejemplo, el grado absoluto del monomio $5x^4y^3$, es 7.

- Halla el grado absoluto de los monomios anteriores.

El grado absoluto de un polinomio es el mayor grado de los monomios que conforman el polinomio.

Estudia los ejemplos para determinar el grado de un polinomio.

El polinomio: $3x^5 + 2x^3 - 3x^2 - x + 5$ tiene grado 5.

La expresión $\frac{5}{8}m^6n^5 + 7m^5n^4 - 8m^4n^3$ tiene grado 11.

La operación $\sqrt{5}\,a^3b^2 - \sqrt{15}\,a^2b^3 + 5ab^4$ tiene grado 5.

Ejercitemos lo aprendido

Trabajo en grupo

Forman grupo con dos compañeros más.

1. Resuelvan las siguientes preguntas:

   » ¿Por qué no son semejantes los monomios $8xy^3$ y $-6x^3y$? Expliquen.

   » Den dos ejemplos más de monomios semejantes y un ejemplo de monomios que no sean semejantes.

2. Si el ahorro de Gabriel para comprar la bicicleta se determina por la expresión: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 10.000$, evalúen para x = \$58.000.

3. Escriban una expresión algebraica que represente cada situación.

   » La vereda Los Cauchos tiene 120 km^2 más que la vereda Timbayá.

   » El área que ocupa la caseta de los comestibles, en la escuela tiene forma de triángulo rectángulo. La base y la altura de ese triángulo difieren entre sí en 5 metros. Si la altura mide *h* unidades, ¿cuál es la base?

   » En un puesto de frutas, una mandarina cuesta el doble de una naranja y una manzana el triple de una mandarina. Si *x* es el precio de las naranjas, ¿Cuál es el precio de la mandarina y de la manzana?

4. En $4x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 7x + 3$, indiquen:

   » El primer término o monomio.

   » El segundo término o monomio.

   » El tercer término.

   » El cuarto término.

» El grado relativo de cada monomio.

» El grado absoluto de cada monomio.

» El grado del polinomio.

» ¿Cuál es el coeficiente del segundo término?

» ¿Cuál el del cuarto término?

» ¿Qué término tiene x^2 en su parte literal?

» ¿Qué término tiene x^0 en su parte literal?

5. Escriban en cada caso, los exponentes que hacen falta para tener términos semejantes en cada una de las parejas de monomios dados.

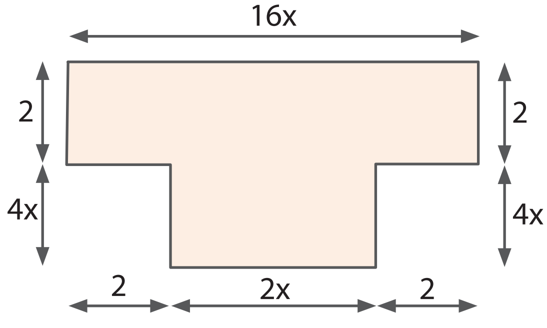
a. $7x^2, -9x$ b. $\frac{12}{17}xy^6, \frac{8}{9}y^4$ c. $-11w^6z^2, 4w^2z^2$

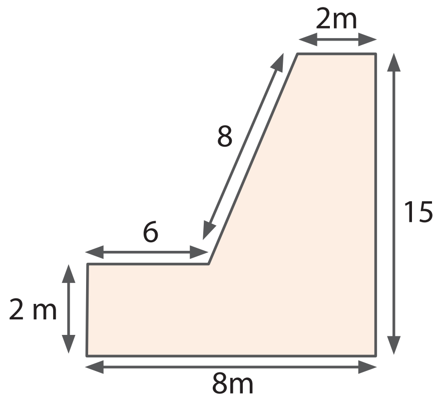
6. Reduzcan o simplifiquen, en cada caso, los términos semejantes.

a. $\frac{4}{5}a^3b^2 + \frac{7}{2}a^2b^3 - \frac{1}{4}a^3b^2 + \frac{5}{3}a^2b^3$

b. $-7m^2n^2 - \frac{4}{3}m^2n^2 + 8m^2n^2 + 8m^2n^2$

7. El perímetro de una figura es la suma de la longitud de los lados. Encuentren el perímetro de cada figura, reduciendo términos semejantes.





Guía 7

Operaciones aditivas con polinomios

Estándares

Pensamiento variacional

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Pensamiento espacial

- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Lo que sabemos

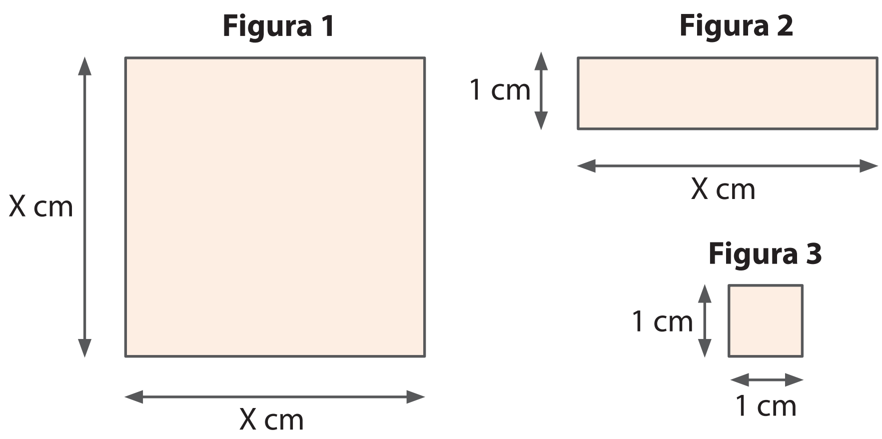
En esta guía aprenderás a representar polinomios empleando figuras geométricas, a partir de las cuales es posible deducir la simplificación de una expresión o calcular la adición de dos o más polinomios. Así mismo aprenderás a operar con los polinomios de forma aditiva. Es decir, conocerás las reglas para realizar las operaciones adición y sustracción con polinomios.

Trabajo en grupo

Forma pareja con otro compañero.

- Consigan los siguientes materiales: Cartón paja, tijeras y cinta
- Elaboren cuatro cuadrados de 10 cm de lado, 18 cuadrados de 1 cm de lado, y 18 rectángulos de 10 cm por 1 cm.
- A los lados de las figuras que miden 10 cm colóquele la letra x y a los otros lados las medidas dadas.

Rectángulos distintos



- Completen la tabla, expresen el área y el perímetro de las figuras obtenidas.

Perímetro y área de rectángulos

Figura	Perímetro	Área
Figura 1	$x + x + x + x = 4x$	$x \bullet x = x^2$
Figura 2		
Figura 3		

Aprendamos algo nuevo

Trabajo en grupo

Respondan las siguientes preguntas:

- Realicen la representación del modelo que le corresponde a esta adición:

  - $x + x + x + 1 + 1 =$

La expresión: $x + x + x + 1 + 1$ es equivalente a $3x + 2$.

- ¿Cómo se establece esa equivalencia? Expliquen.

Sofía, una estudiante de noveno grado de una escuela de postprimaria, escribió la siguiente expresión para representar el perímetro de un rectángulo:

$$3x + 2 + x + 3x + 2 + x.$$

» ¿Esa expresión se puede simplificar? ¿Cómo?

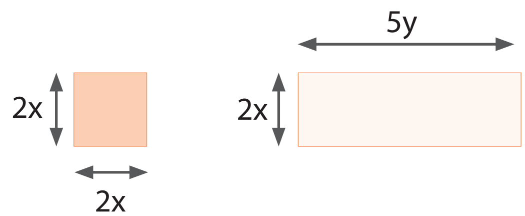
» ¿Cuáles son los coeficientes de cada término?

» Escriban los términos semejantes de esa expresión.

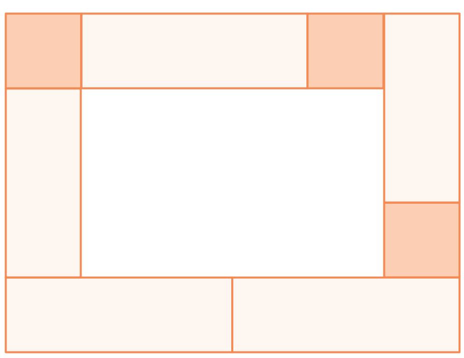
» Reduzcan los términos semejantes.

» Escriban el nuevo polinomio como resultado de la reducción de esa pareja de términos semejantes.

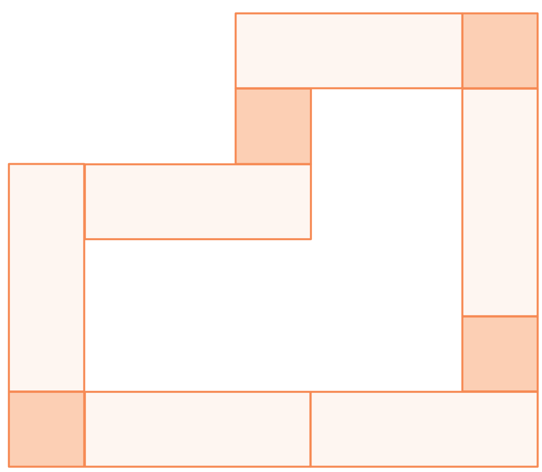
- Con dos figuras como las siguientes:



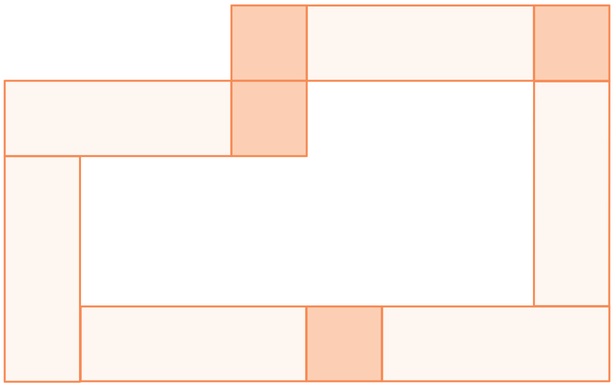
» Construyan los siguientes modelos:



Modelo 1



Modelo 2



Modelo 3

- Calculen el perímetro cada uno de los tres modelos, hallando un polinomio que lo represente.
- ¿Cuál modelo tiene el mayor perímetro? ¿Por qué?

Las situaciones presentadas con las fichas para determinar el valor del perímetro de los modelos, desarrollan las ideas que se necesitan para la operación adición entre polinomios.

Adición de polinomios

La operación adición de dos o más polinomios es otro polinomio. El resultado se calcula aplicando la reducción de términos semejantes o en el caso de que no exista dejar indicada dicha operación.

Estudia los siguientes ejemplos:

Ejemplo1:

Suma los siguientes polinomios $3x$ y $-4y$. Como no son monomios semejantes se deja indicada la adición así:

$$3x + (-4y) = 3x - 4y$$

Ejemplo 2:

Suma los siguientes polinomios $4x + 9$, $3x - 4y$.

$$(4x + 9) + (3x - 4y)$$

Los términos semejantes son $4x$ y $3x$ ya que tienen la misma parte literal.

Lo que hace que se reduzcan así: $4x + 3x = 7x$

Entonces el resultado de la adición es:

$$7x - 4y + 9$$

Ejemplo 3:

Adiciona los polinomios $32xy + 2x^2$; $24xy + 4x^2 + 6y^2$ y $8xy + 4x^2 + 16y^2$.

Se pueden escribir cada sumando en forma vertical como se realiza con la adición de los números naturales.

Se ubica cada polinomio de tal forma que queden alineados los monomios semejantes

$$\begin{array}{rrrr} & 32xy & + 2x^2 & \\ & 24xy & + 4x^2 & + \ \ 6y^2 \\ + & 8xy & + 4x^2 & + 16y^2 \\ \hline & 64xy & + 10x^2 & + 22y^2 \end{array}$$

Luego, se suman los coeficientes de cada monomio y se le agrega la parte literal. En este caso, el resultado de la adición es $64xy + 10x^2 + 22y^2$

Ejemplo 4:

Adiciona los polinomios: $6a$ y $(-12a)$

$$6a + (-12a) = 6a - 12a = -6a$$

Ejemplo 5:

Adiciona los siguientes monomios: $3x^2y$, x^2y, $-2x^2y$

$$3x^2y + x^2y - 2x^2y = 2x^2y$$

Ejemplo 6:

Cuando en una expresión algebraica aparecen diferentes términos semejantes, éstos se pueden conmutar y reducir.

Observen:

$$-3a + 8b - 7a + 2b = (-3a - 7a) + (8b + 2b) = -10a + 10b$$

$-10a + 10b$, es un polinomio irreducible. Es decir está escrito en su mínima expresión.

Sustracción de polinomios

Como los polinomios son expresiones que representan números reales, la sustracción se define como la operación sustracción de los números reales. En el caso de polinomios, se aplica la regla: **al minuendo se le suma el opuesto aditivo del sustraendo**.

Si en una expresión algebraica se encuentran términos semejantes, estos se pueden sumar algebraicamente, para reducirlos a un sólo término. Esta reducción se hace sumando o restando los respectivos coeficientes numéricos.

El **opuesto de un polinomio** es el polinomio formado por coeficientes opuestos a los coeficientes del polinomio dado y conservan su misma parte literal.

Ejemplo 1:

El opuesto aditivo del polinomio $3x^2y^5$ es $-3x^2y^5$.

Ejemplo 2:

El opuesto aditivo del binomio $-3xy^4 + 7\ xz^2$ es $3xy^4 - 7\ xz^2$.

Ejemplos relacionados con la resta o sustracción de polinomios

Ejemplo 1:

$\underbrace{(12xy + 2x^2 + 3y^2)}_{\text{minuendo}} - \underbrace{(4xy + 2x^2 + 8y^2)}_{\text{sustraendo}}$ para resolverse se debe expresar una adición así:

$$(12xy + 2x^2 + 3y^2) + \underbrace{(-4xy - 2x^2 - 8y^2)}_{\text{opuesto del sustraendo}}$$

Puede expresarse como

$12xy + 2x^2 + 3y^2 - 4xy - 2x^2 - 8y^2$, que al reducir sus términos semejantes se simplifica a $8xy - 5y^2$.

La sustracción, al igual que la adición, también se puede escribir de forma vertical estableciendo una adición del polinomio minuendo con el opuesto aditivo del polinomio sustraendo:

$$\begin{array}{r} 12xy + \cancel{2x^2} + 3y^2 \\ -4xy - \cancel{2x^2} - 8y^2 \\ \hline 8xy \qquad\quad -5y^2 \end{array} \longleftarrow \text{opuesto aditivo del sustraendo}$$

Ejercitemos lo aprendido

Trabajo en grupo

En grupos de dos, realicen los ejercicios que se proponen a continuación:

1. Determinen el grado absoluto y relativo de cada polinomio.

   a. $2x^3y + 4xy^7$ b. $3x^2 + 4x - 7$ c. $a^4 + 4a^3b - 3a^2b + ab^2 + b^4$

2. Escriban cuáles parejas de monomios tienen términos semejantes.

   a. $3x^2y, -xy^2$ b. $2z^2y, 3z^2m$ c. $4x^5y^3, 5x^5y^3$ d. $\sqrt{5x}, \frac{1}{2}x$

3. Reduzcan en cada caso los términos semejantes.

   a. $4x - 2y - 3x$

   b. $4xy - 2x^2 + 6xy - 7x^2$

   c. $2m^2n + 2n - 5m^2n + 6n$

   d. $-3ab^2 + 6a - 7b - 8a + 9ab^2$

4. Encuentren el inverso aditivo de cada una de las siguientes expresiones.

a. -8	d. $(5 + 4)$	g. $-(m + n)$
b. $-a$	e. $(x + y)$	h. $-(m - n)$
c. $5b$	f. $(x - y)$	i. $-(-8 - u)$

5. Simplifiquen cada una de las siguientes expresiones:

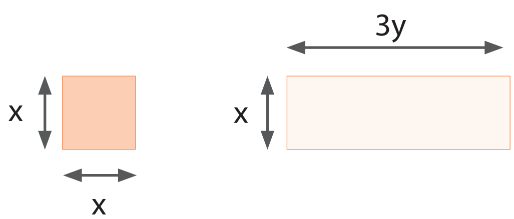
a. $(4x + 3x - 8x) + (5y - 2y)$

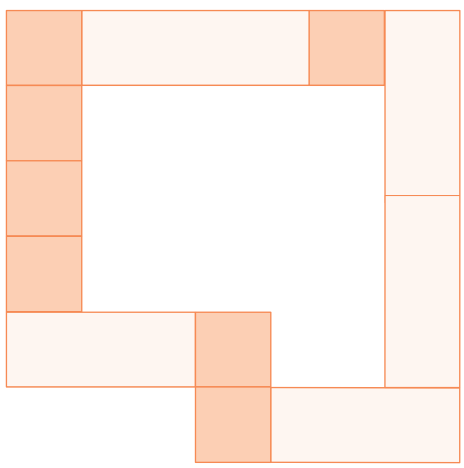
c $5mn - (8mn - 3m) - 2m$

b. $(5x^2 - 2x^2y) - (8xy^2 + 3xy^2)$

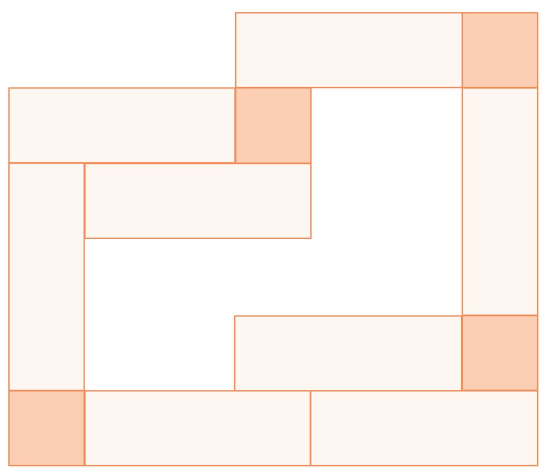
d. $-(-x^2 - 2x + 1) + (-3 + 2x + x^2)$

6. Con las fichas, construyan los modelos y determinen el perímetro de cada una de las figuras dadas:

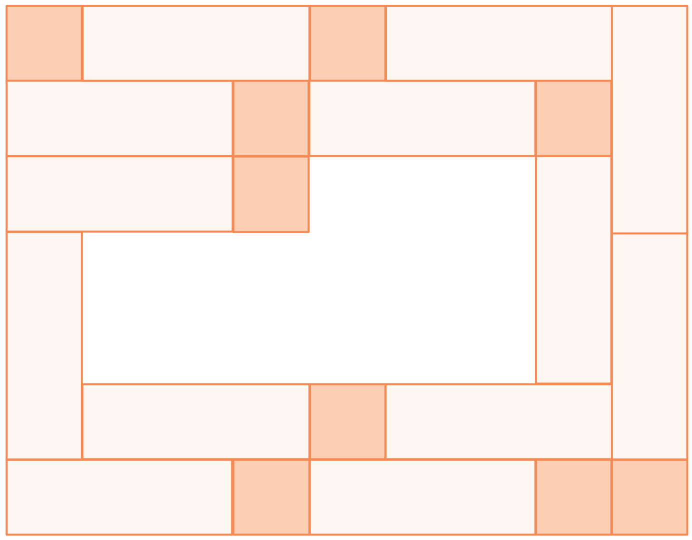




Modelo 1



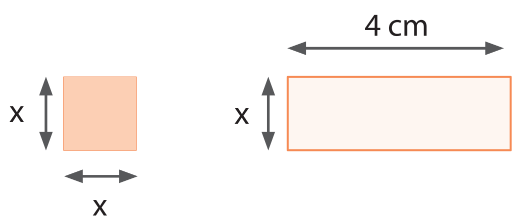
Modelo 2



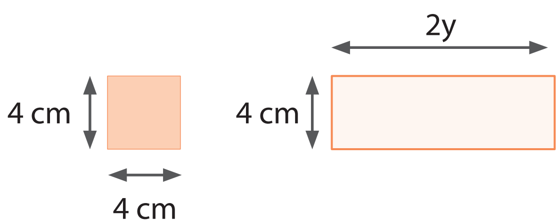
Modelo 3

7. Calculen el perímetro de las siguientes figuras teniendo en cuenta que los lados pueden tener asignada una variable o incógnita (x o y), o pueden tener un valor asignado en centímetros (cm) como se muestra a continuación:

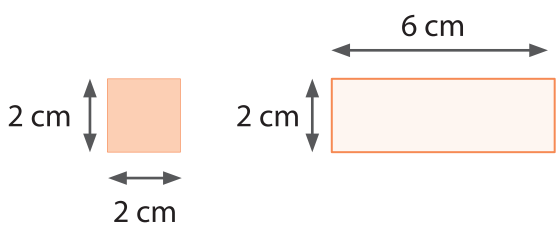
a.



b.



c.



Guía 8

Multiplicación de polinomios

Estándares

Pensamiento variacional

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

Pensamiento espacial

- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Lo que sabemos

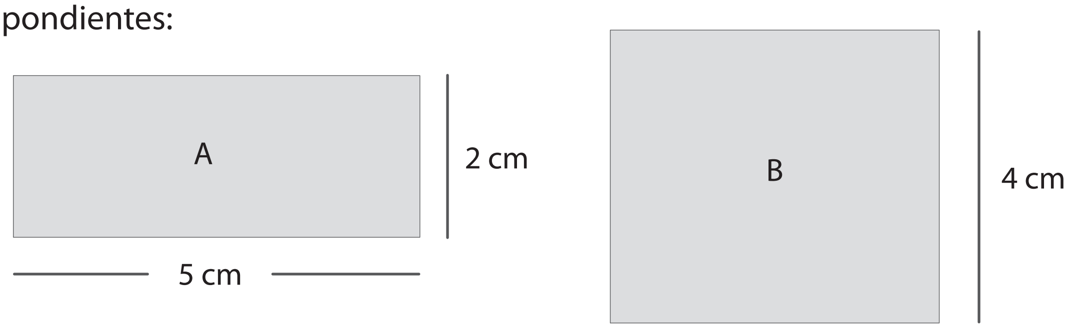
En esta guía aprenderás a resolver multiplicaciones entre polinomios. Sus reglas se basan en las propiedades de la operación multiplicación de los números reales tales como conmutativa, asociativa, modulativa, distributiva con respecto a la adición; y, las propiedades de la potenciación.

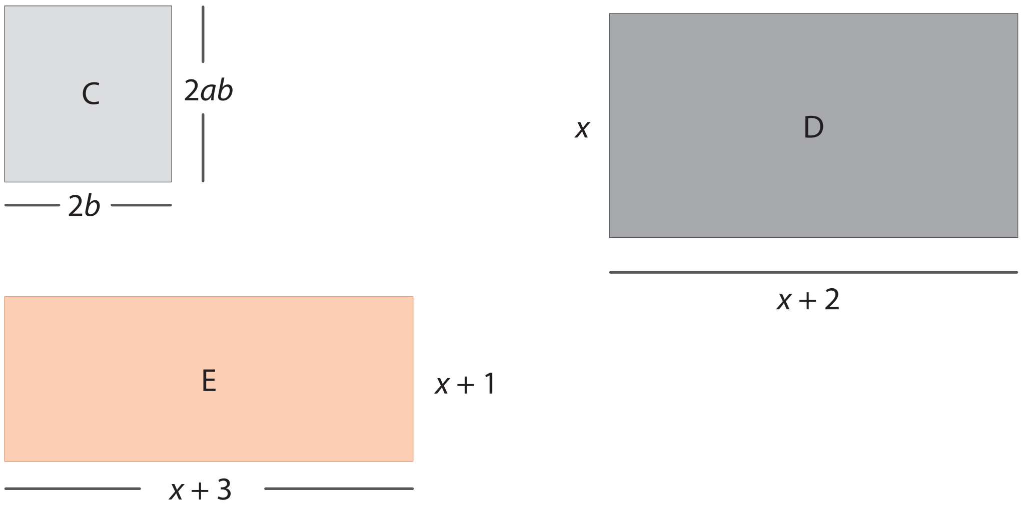
Así mismo, los productos de polinomios que aquí se abordan se relacionan con el cálculo de áreas de figuras rectangulares cuyas longitudes están dadas en términos de expresiones algebraicas.

Trabajo en grupo

Trabaja con dos compañeros de la clase.

Calculen las áreas de las siguientes figuras y escriban las expresiones algebraicas correspondientes:





Completen la siguiente tabla.

Registro de área y perímetro de figuras

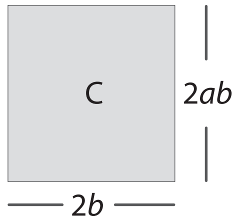
Figura	Perímetro	Área
A		
B		
C		
D		
E		

Aprendamos algo nuevo

Para hallar el área de las figuras anteriores se debe aplicar la fórmula del área de un rectángulo.

Cuando las dimensiones del rectángulo están dadas por expresiones algebraicas, se aplican las propiedades estudiadas en los distintos sistemas numéricos con relación a la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y las propiedades que se les atribuye a la potenciación.

Observa:



El área de la figura **C** es $(2ab)(2b)$.

La expresión $(2ab)$ representa el producto de 2 por a por b,

luego $(2ab)(2b)$ es equivalente a $(2 \times 2)(a)(b \times b)$.

Como los polinomios representan relaciones que se encuentran en los números reales, las propiedades de la multiplicación de los números reales se aplican todas; pero, las más que se utilizan son la conmutativa y la asociativa.

En este caso, multiplicamos la parte numérica de los monomios y da $2 \times 2 = 4$

En la parte literal de los monomios tenemos los factores (a) y $(b \times b)$, donde observamos que b se repite dos veces y se puede expresar como una potencia, por lo tanto, obtenemos ab^2.

Simbólicamente:

$$4(a)(b \times b) = 4ab^2$$

- ¿Qué clase de expresión algebraica es $4ab^2$?

El **producto de dos monomios** es otro monomio. Dicho monomio se obtiene de la siguiente manera:

1. La parte numérica es el producto de los coeficientes de los factores.

2. La parte literal corresponde al producto de las variables o letras que aparecen en los monomios. En el caso de tener variables iguales se suman los exponentes.

Ejemplo:

¿Cuál es el producto de los monomios, $-3xy$ y $-8xy^3$?

Veamos:

1. Se multiplican los coeficientes -3 y -8, obteniéndose 24 positivo.

2. La parte literal de cada monomio es xy y xy^3. Indicamos el producto $(xy)\ (xy^3)$.

- Aplicando la propiedad conmutativa se tiene que $(x \cdot x)(y \cdot y^3)$.

- Aplicando la propiedad de la potenciación de la suma de exponentes cuando las bases son iguales, se tiene $(x \cdot x)(y \cdot y^3) = x^2\, y^4$.

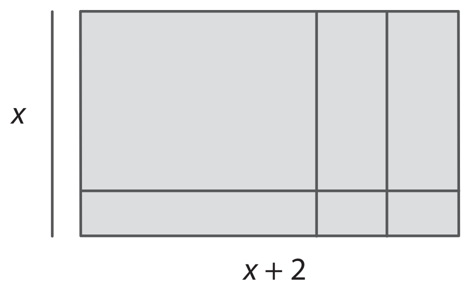
- Resumiendo todos los pasos se tiene:

$$(-3xy)(-8xy^3) = (-3) \cdot (-8)(x \cdot x)(y \cdot y^3) = 24x^2y^4$$

Trabajo en grupo

El producto de un monomio por un polinomio

Construyan, el siguiente modelo:

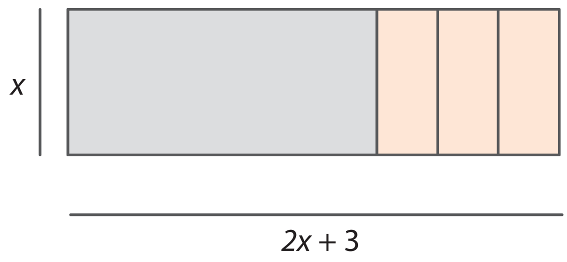


- ¿Cuántas unidades de área x^2, se observan en la figura?

- ¿Cuál es el área total?

- $x^2 + 2x$ es el producto de $(x + 2)(x)$. Expliquen esa equivalencia.

- Observen la siguiente representación:



- Hallen el área, multiplicando el binomio por el monomio.
- Apliquen la propiedad distributiva de la multiplicación y la propiedad del producto de potencias de bases iguales.

La multiplicación de un polinomio por un monomio da como resultado un polinomio.

Para calcular dicho producto:

1. Se aplica la propiedad distributiva así, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.
2. Luego, se realiza el procedimiento descrito de multiplicar un monomio por otro monomio.

Ejemplo 1:

Multiplicar $3x$ por $(4x^2 + 5xy)$.

1. Se aplica la propiedad distributiva, entonces se tiene:

$$3x\,(4x^2 + 5xy) = 3x \cdot 4x^2 + 3x \cdot 5xy$$

2. Se realizan los procedimientos para multiplicar monomios.

$$\begin{aligned} 3x \cdot 4x^2 + 3x \cdot 5xy &= (3 \cdot 4 \cdot x \cdot x^2) + (3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y) \\ &= 12x^3 + 15\,x^2y \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Multiplicar $4xy$ por $(5x - 2y)$

1. Se aplica la propiedad distributiva, entonces se tiene:

$$4xy(5x - 2y) = (4xy \cdot 5x) - (4xy \cdot 2y)$$

2. Se realizan los procedimientos para multiplicar monomios.

$$(4xy \cdot 5x) - (4xy \cdot 2y) = (4 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y) - (4 \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot y)$$

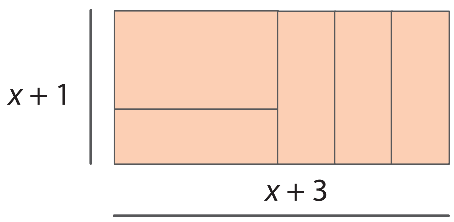
$$= (20x^2y) - (8xy^2)$$

Ejemplo 3:

$$(6m^3n)(-2m^2 - 4n^3) = (6m^3n)(-2m^2) - (6m^3n)(4n^3)$$

$$= - 12m^5n - 24m^3n^4$$

Observen el siguiente modelo:



- Contesten:
  - » ¿Cuántas fichas tienen de área x^2?
  - » ¿Cuántas tienen de área x?
  - » ¿Cuántas de área 1?

El área del rectángulo del modelo anterior es igual al producto de la base por altura cuyos valores corresponden a $(x + 1)$ y $(x + 3)$.

Aplicando la propiedad distributiva se obtiene:

$$\begin{aligned}(x+1)(x+3) &= x(x+3) + 1(x+3)\\ &= x \cdot x + x \cdot 3 + 1 \cdot x + 1 \cdot 3\\ &= x^2 + 3x + x + 3\\ &= x^2 + 4x + 3\end{aligned}$$

Es decir, que el resultado de esa multiplicación es.

$$(x+1)(x+3) = \underbrace{1x^2}_{\text{Una unidad de área } x^2} + \underbrace{4x}_{\text{Cuatro unidades de área } x} + \underbrace{3}_{\text{Tres unidades de área } 1}$$

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada uno de los términos de uno de ellos, por cada uno de los términos del otro polinomio. Se reducen términos semejantes.

La multiplicación de un polinomio por otro polinomio da como resultado otro polinomio.

Para calcular dicho producto:

1. Se aplica la propiedad distributiva; así, se multiplica cada monomio de un polinomio por cada uno de los términos del otro polinomio.

2. Luego, se suman los monomios que son semejantes para determinar el polinomio producto.

Ejemplo 1:

$$(3x^2 + 5x - 1)(x + 6)$$

Este tipo de operaciones se pueden resolver de forma horizontal, así:

$$\begin{aligned}(3x^2 + 5x - 1)(x + 6) &= 3x^2(x + 6) + 5x(x + 6) + (-1)(x + 6)\\ &= 3x^2 \cdot x + 3x^2 \cdot 6 + 5x \cdot x + 5x \cdot 6 + (-1)x + (-1)(6)\\ &= 3x^3 + 18x^2 + 5x^2 + 30x - x - 6\\ &= 3x^3 + 23x^2 + 29x - 6\end{aligned}$$

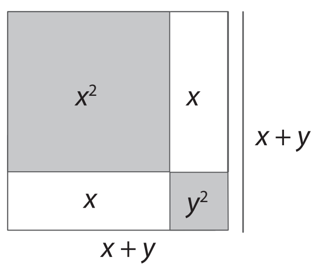
Este tipo de operaciones se pueden resolver de forma vertical así:

$$\begin{array}{r} (3x^2 + 5x - 1)\\ \times\ (x + 6)\\ \hline 3x^3 + 5x^2 - x \\ 18x^2 + 30x - 6\\ \hline 3x^3 + 23x^2 + 29x - 6 \end{array}$$

Algunas formas de multiplicar binomios rápidamente

Observen el siguiente modelo:

Analicen y respondan.



- ¿Cuántas fichas del modelo tienen de área x^2?
- ¿Cuántas tienen de área y^2?
- ¿Cuántas fichas tienen de área xy?
- ¿Cuáles son las medidas del largo y ancho del modelo?
- Hallen el total de área del modelo.

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) \quad = x^2 + xy + xy + y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

Es decir,

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Ejemplo 2:

Si se sabe que el área de un cuadrado es equivalente al cuadrado de la longitud del lado y se tiene un cuadrado de lado $(m + 2n)$, su área es:

$$(m+2n)^2 = (m+2n)(m+2n) = mm + (m)(2n) + 2mn + (2n)(2n)$$

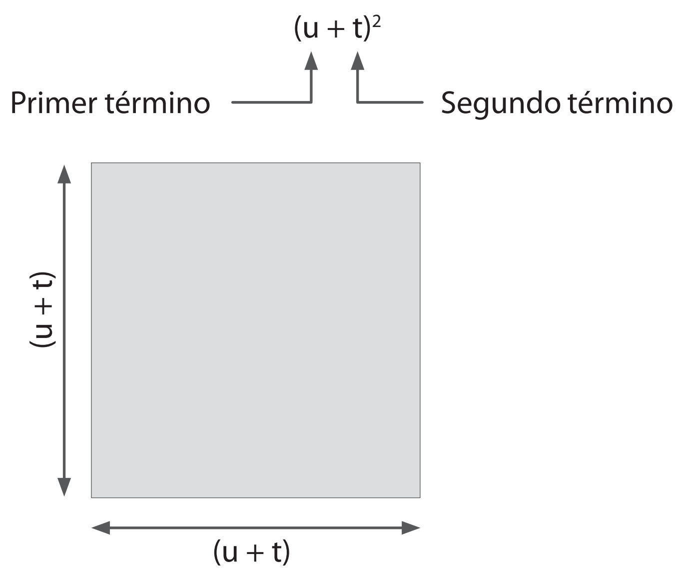
$$(m+2n)^2 = m^2 + 2mn + 2mn + (2n)^2 =$$

$$(m+2n)^2 = \mathrm{m}^2 + 4mn + 4n^2$$

Las situaciones anteriores tienen las siguientes características:

- Se refieren a un binomio elevado al cuadrado que representa el cálculo de área de un cuadrado.

Para calcular su resultado de una forma rápida, sin realizar la multiplicación término a



término, se aplican las siguientes reglas:

1. Se eleva al cuadrado el primer término del binomio.

2. Se duplica el producto del primer y segundo término del binomio.

3. Se eleva al cuadrado el segundo término del binomio.

Es decir que,

$$(u + t)^2 = u^2 + 2ut + t^2$$

Observen los siguientes ejemplos de cálculos rápidos:

- $(3 + n)(3 + n) = 3^2 + (2)(3)(n) + n^2$

  $= 9 + 6n + n^2$

- $(6t^2 + 4m)(6t^2 + 4m) = (6t^2)^2 + (2)(6t^2)(4m) + (4m)^2$

  $= 36t^4 + 48mt^2 + 16m^2$

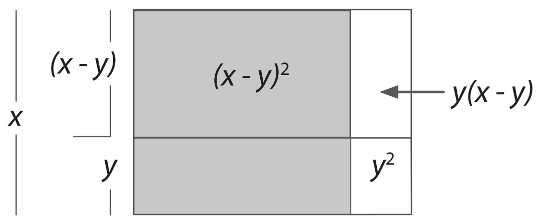
- $(\sqrt{2}m + y)^2 = (\sqrt{2}m)^2 + (2)(\sqrt{2}m)(y) + y^2$

  $= 2m^2 + 2\sqrt{2}my + y^2$

- $(7a + 6m)^2 = (7a)^2 + (2)(7a)(6m) + (6m)^2$

  $= 49a^2 + 84am + 36m^2$

Analicen, en otro cuadrado, qué sucede cuando la longitud de sus lados es una diferencia de dos términos.



Analicen y respondan.

- ¿Cuántas partes del modelo tienen de área $(x - y)^2$?
- ¿Cuántas partes del modelo tienen de área y^2?
- ¿Cuántas partes del modelo tienen de área $y(x - y)$?

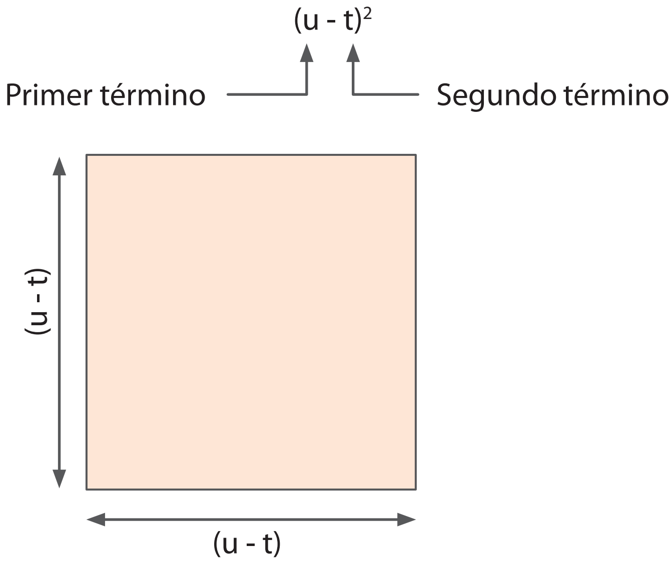
Para hallar el área del cuadrado de longitud $(x - y)$, se tiene que hallar el área del cuadrado grande y restar las áreas de lo que sobra para que solo quede el cuadrado de lado $(x - y)$.

$$
\begin{aligned}
(x - y)^2 &= x^2 - y(x - y) - y(x - y) - y^2 \\
&= x^2 - 2y(x - y) - y^2 \\
&= x^2 - 2xy + 2y^2 - y^2 \\
&= x^2 - 2xy + y^2
\end{aligned}
$$

- Expliquen paso a paso cómo se consiguió ese resultado.

La situación anterior, permite estudiar el cuadrado de binomios que son la diferencia de dos longitudes. Es decir, el cuadrado de la diferencia de dos monomios o términos.

Se refieren a un binomio que es la diferencia de dos términos, que es elevado al cuadrado que representa el cálculo de área de un cuadrado.



Para calcular su resultado de una forma rápida, sin realizar la multiplicación de término a término se aplican las siguientes reglas:

1. Se eleva al cuadrado el primer término del binomio.

2. Se multiplica por (-2) el producto del primer y segundo término del binomio.

3. Se eleva al cuadrado el segundo término del binomio.

Es decir,

$$(u - t)^2 = u^2 - 2ut + t^2$$

Observen los siguientes ejemplos de cálculos rápidos;

$$(a - 5n)(a - 5n) = a^2 + (-2)(a)(5n) + (-5n)^2$$

$$= a^2 - 10an + 25n^2$$

$$(\sqrt{7}s - 3)^2 = (\sqrt{7}s)^2 + (-2)(\sqrt{7}s)(3) + (-3)^2$$

$$= 7s^2 - 6\sqrt{7}s + 9$$

$$(a - 2b)^2 = (a)^2 + (-2)(a)(2b) + (-2b)^2$$

$$= a^2 - 4ab + 4b^2$$

Ejercitemos lo aprendido

1. Multiplica los siguientes polinomios.

   a. $(-3a^2)(-5a^4)$

   b. $(2x^2) \cdot x^3$

   c. $-3a^2 \cdot x(2x^3) \cdot (x^{-4})$

   d. $-3a^2 \cdot (2 + a^3)$

   e. $4n^3 \cdot (n^2 + m + a)$

   f. $a^2 \cdot a^{-5}$

   g. $(a^5b)^4$

   h. $(a^nb^n)5^2$

   i. $(3x^2 + 5y)(2x^3 + 8m)$

   j. $(4x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x - 9)(x^2 + 5x)$

   k. $(x + 6)(x - 9)$

2. Estudia el siguiente ejemplo:

$$(2a - b^2)(a^2 - 3b^3 + 8)$$

$$= (2a)(a^2) + (2a)(-3b^3) + (2a)8 + (-b^2)(a^2) + (-b^2)(-3b^3) + (-b^2)(8)$$

$$= 2a^3 + (2)(-3)\,(ab^3) + (2)(8)a + (-1)(b^2a^2) + (-1)(-3)b^2b^3 + (-1)(8)b^2$$

$$= 2a^3 - 6ab^3 + 16a - b^2a^2 + 3b^5 - 8b^2$$

   - Describe el procedimiento que se realiza en él.

3. Efectúa los productos indicados:

   a. $(a + b)(a - b)$

   b. $(x + 2y)(x^2 + 3y + 5)$

   c. $(a - b)(a^2 - b^2)$

   d. $(4x - 3y^2)(-2x^2 - 5y^2 + 6)$

4. Resuelve el cuadrado de cada binomio realizando la multiplicación y luego comprueba su resultado con la forma rápida:

a. $(a + b)^2$

b. $(x - 2b)^2$

c. $(3m + n)^2$

d. $(a^2 - b^2)^2$

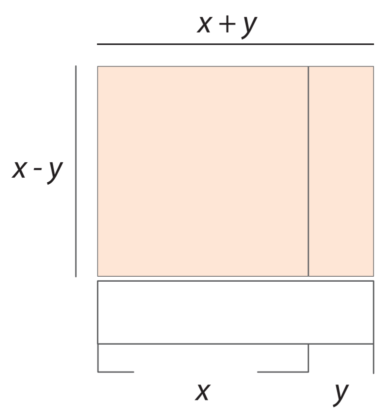
e. $(4x + 2y)^2$

Trabajo en grupo

Forma grupo con tres compañeros.

5. Hallen el valor del área sombreada.

$(x - y)(x + y)$



6. Realicen los modelos correspondientes a los valores de las siguientes áreas:

a. $(x + 1)(x + 1)$

b. $(x + 2)(x + 2)$

c. $(x - 1)(x - 1)$

d. $(x - 3)(x - 3)$

e. $(a + b)^2$

f. $(y^2 - 4)^2$

- Calculen de forma rápida el valor de cada una de ellas.

Guía 9

División de polinomios

Estándares

Pensamiento variacional

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Lo que sabemos

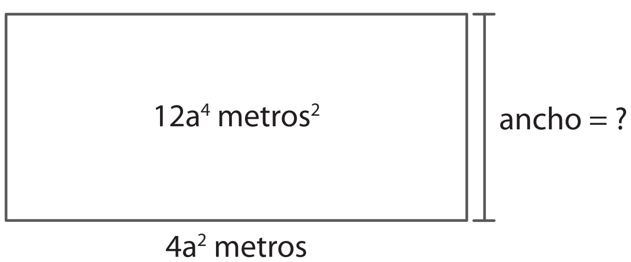
Las actividades que se proponen en esta guía te indicarán el procedimiento para realizar divisiones entre monomios, divisiones entre un polinomio y un monomio y divisiones entre polinomios. Para ello es importante que recuerdes las propiedades de las operaciones entre números reales y cómo se aplican los pasos aprendidos de las divisiones entre números enteros.

Trabajo en grupo

Forma pareja con otro compañero.

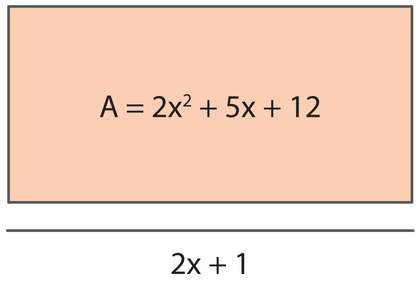
1. Lean y resuelvan la siguiente situación.

   Un terreno rectangular tiene un área de $12a^4$ metros cuadrados. Su largo es de $4a^4$ metros. ¿Cuál es el ancho de ese terreno?



2. El área del rectángulo está dada por la expresión algebraica:

$$2x^2 + 5x + 12.$$



Su base está representada por la expresión algebraica $2x + 1$. Determinen la expresión algebraica que representa su altura.

3. El producto de dos expresiones algebraicas es $5x^2 + x + x^3 - 10$. Si uno de los dos factores es $x + 2$, ¿cuál es el otro factor?

Aprendamos algo nuevo

La división entre polinomios sigue un proceso similar al empleado en la división de números reales, especialmente de los números enteros y naturales.

Estudiaremos las divisiones de polinomios de tres casos: entre monomios, entre un polinomio y un monomio y entre polinomios.

División entre monomios

Para hallar el cociente entre la división de monomios:

1. La parte numérica se calcula dividiendo los coeficientes de los monomios.
2. La parte literal se deja indicada si no se tienen variables comunes. En el caso que exista una variable común, se escribe una sola vez y se restan los exponentes del numerador con los del denominador.

Estudiemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Observen cómo se realiza la división $12x^2y^3$ entre $-4xy^2$.

1. Se dividen los coeficientes así:

$$12 \div (-4) = -\frac{3}{1} = -3$$

2. Se dividen las partes literales, aplicando las propiedades de la potenciación.

$$x^2y^3 \div xy^2 = \frac{x^2y^3}{xy^2} = x^{2-1}y^{3-2} = xy$$

3. El cociente de la división es $-3xy$.

Ejemplo 2:

$$\frac{-7x^5y^2}{14x^3y^3}$$

1. Al dividir los coeficientes se tiene -7 /14 = -1/2

2. La parte literal de los monomios se divide:

$\frac{x^5y^2}{x^3y^3}$ tomamos las bases iguales y restamos exponentes

$X^{5-3} = x^2$ $\qquad$ $y^{2-3} = y^{-1}$

Entonces el cociente es $\left(-\frac{1}{2}\right) x^2 \cdot y^{-1}$

Es común representar la parte literal de las expresiones algebraicas con exponentes positivos, por tanto, el cociente se puede escribir como:

$$\frac{-7x^5y^2}{14x^3y^3} = \frac{-x^2}{2y}$$

Ejemplo 3:

A continuación se realiza la división con la aplicación de todas las reglas dadas:

$$\frac{15m^2n^5}{18m^8n^4} = \frac{5n}{6m^6}$$

- Expliquen cómo se obtuvo el cociente en el ejemplo 3.

División entre un polinomio y un monomio

Para efectuar la división entre un polinomio y un monomio, se procede así:

1. Se ordena el polinomio de acuerdo a las potencias de una de las variables de forma ascendente o descendente.
2. Luego, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio dado.
3. Se escribe el cociente de la división como la adición de cada uno de los cocientes parciales obtenidos.

Ejemplo 4:

La división de $8a^5b^4 - 4a^4b^3 + 6a^7b^5$ entre $2a^2$.

1. Se ordenan los términos del polinomio por la variable representada con la letra *a* de forma descendente: $6a^7b^5 + 8a^5b^4 - 4a^4b^3$
2. Se divide cada término del polinomio entre el monomio $2a^2$.

$$\frac{6a^7b^5}{2a^2} + \frac{8a^5b^4}{2a^2} - \frac{4a^4b^3}{2a^2}$$

3. Se calculan los cocientes parciales así:

$$\frac{(6a^7b^5)}{(2a^2)} = 3a^5b^5; \quad \frac{(8a^5b^4)}{(2a^2)} = 4a^3b^4; \quad \frac{(-4a^4b^3)}{(2a^2)} = -2a^2b^3$$

Luego el cociente de la división es :

$$(6a^7b^5 + 8a^5b^4 - 4a^4b^3) \div 2a^2 = 3a^5b^5 + 4a^3b^4 - 2a^2b^3$$

Ejemplo 5:

$$(4x^3 - 2x^2 + 4x - 1) \div 2x$$

Como el dividendo el polinomio está ordenado de forma descendente, se divide cada uno de los términos por el monomio $2x$.

$$4x^3 \div 2x = 2x^2 \qquad - 2x^2 \div 2x = -x$$

$$4x \div 2x = 2 \qquad - 1 \div 2x = - 1/2x$$

Luego, el cociente es la adición de los cocientes parciales:

$$4x^3 - 2x^2 + 4x - 1 \div 2x = 2x^2 - x + 2 - 1/2x$$

División entre polinomios

1. Se ordena el polinomio dividendo y el polinomio divisor, en forma descendente respecto a la misma letra. Se debe tener cuidado en el dividendo ya que exige que se tengan en cuenta todos los términos que deben existir por la variable seleccionada, en caso de que no exista uno o varios términos, se dejan espacios o se asignan ceros a los lugares en los que debía estar el término.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + 11x + 12 & 2x + 3 \\ \hline \end{array}$$

   En este caso, ambos polinomios están ordenados.

2. Se divide el primer término del polinomio dividendo, entre el primer término del polinomio divisor y se escribe este resultado en el cociente.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + 11x + 12 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} & x \end{array}$$

3. El resultado, escrito en el cociente, se multiplica por cada uno de los términos del polinomio divisor y el producto se va restando del polinomio dividendo. Recuerden que para sustraer enteros se suma el opuesto aditivo del producto.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^2} + 11x + 12 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} -\cancel{2x^2} - \quad 3x \qquad\quad & x \\ \cline{1-1} 0 + \quad 8x \qquad\quad & \end{array}$$

4. Se baja el siguiente término del polinomio divisor y se repite el proceso hasta obtener cero en la resta.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^2} + 11x + 12 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} \cancel{2x^2} \qquad\qquad\quad & x + 4 \\ \cline{1-1} 0 + \cancel{8x} + \cancel{12} & \\ - \cancel{8x} - \cancel{12} & \\ \cline{1-1} 0 + 0 \quad & \end{array}$$

Entonces: $(2x^2 + 11x + 12) \div (2x + 3) = x + 4$ el número 4, en el cociente, resulta de dividir $8x$ entre $2x$.

Nota: En este caso, los valores que representa x, deben ser diferentes de $\frac{3}{2}$. ¿Por qué?

Ejemplo 6:

De las situaciones dadas en la sección "lo que sé" de esta guía para hallar el otro factor, se realiza la división:

$$5x^2 + x + x^3 + 10 \text{ entre } x - 2$$

1. Se ordena el dividendo con respecto a x, de forma descendente

$$x^3 + 5x^2 + x + 10$$

Calculamos $\frac{x^3}{x} = x^2$, y lo ubicamos en el cociente.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 5x^2 + x + 10 & x - 2 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

Calculamos el producto de $x^2\ (x - 2) = x^3 - 2x^2$

Restamos este producto $(x^3 - 2x^2)$ a $x^3 + 5x^2$

Para ello, se suma el opuesto al minuendo, colocamos dicho producto con signos distintos.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 5x^2 + x + 10 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 + 2x^2} & x^2 \end{array}$$

El resultado de la sustracción es:

$$(x^3 + 5x^2) - (x^3 - 2x^2) = x^3 + 5x^2 - x^3 + 2x^2 = 7x^2$$

Luego, bajamos el término $(+x)$ y se forma el polinomio $7x^2 + x$.

Repetimos de nuevo, todo el proceso anterior:

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{x^3} + 5x^2 + x + 10 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3} + 2x^2 \phantom{{}+ x + 10} & x^2 + 7x \\ \cline{1-1}
+ \cancel{7x^2} + x \phantom{{}+ 10} & \\
- \cancel{7x^2} + 14x \phantom{{}+ 10} & \\ \cline{1-1}
+ 15x \phantom{{}+ 10} &
\end{array}
$$

Repetimos el proceso, bajando (+10) y formando el polinomio 15x +10

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{x^3} + 5x^2 + x + 10 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3} + 2x^2 \phantom{{}+ x + 10} & x^2 + 7x + 15 \\ \cline{1-1}
+ \cancel{7x^2} + x \phantom{{}+ 10} & \\
- \cancel{7x^2} + 14x \phantom{{}+ 10} & \\ \cline{1-1}
+ \cancel{15x} + 10 & \\
- \cancel{15x} + 30 & \\ \cline{1-1}
40 &
\end{array}
$$

- ¿Cuál es cociente de la división?
- ¿Cuál es el residuo?

Trabajo en grupo

Formen grupos de tres estudiantes.

1. Busquen el factor, que multiplicado en cada caso por el monomio dado, dé como resultado $15x^2y$.

a. $5x$ b. 1 c. $\frac{15}{4}x$ d. xy

2. Realicen las siguientes divisiones.

a. $3a^2b^2 + 5a^3b^3$ entre $-2a$

b. $18x^4y^2 - 6x^2y^4$ entre $-3x^2y^2$

c. $2x^3 - 7x^2 + 5x - 3$ entre $x^2 - 2x$

d. $x^4 - 5x^3 + 3x - 2$ *entre* $x - 1$

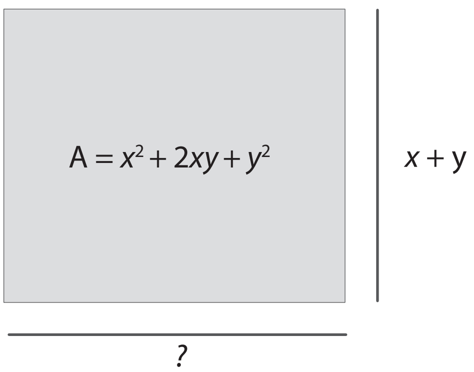
3. El terreno de una casa es de forma rectangular y tiene $18x^2 + 9x - 20$ metros cuadrados de área. Si uno de los lados mide $6x - 5$ metros, ¿cuánto mide el otro lado?

   En este problema x representa un entero mayor o igual que 1.

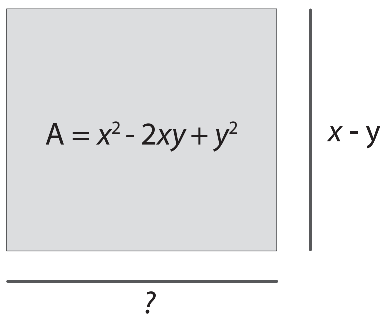
4. ¿Cuál es el área del terreno del ejercicio anterior, si x toma el valor de 3?

5. Calculen el lado desconocido en cada una de las figuras.

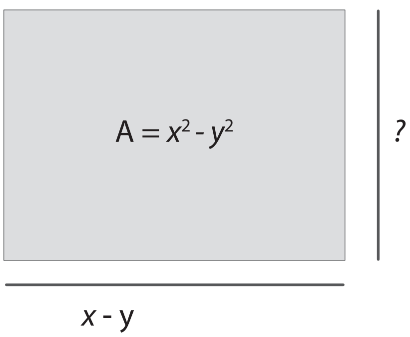
a.



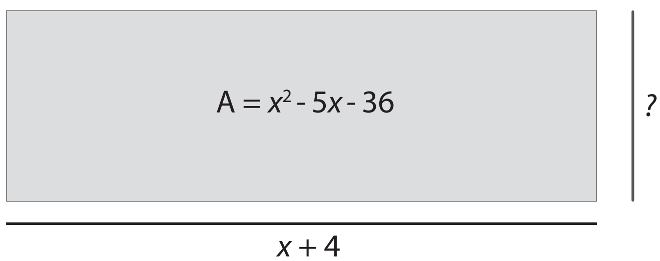
c.



b.



d.



Ejercitemos lo aprendido

1. Determina una expresión matemática para cada caso. Supón que tienes dos montones de naranjas. Un montón tiene *A* naranjas. Expresa el número de naranjas que hay en el segundo montón si en él hay:

   - Doce naranjas menos que en el primero.
   - Siete veces lo que tiene el primero.
   - La sexta parte de las naranjas que hay en el primer montón.

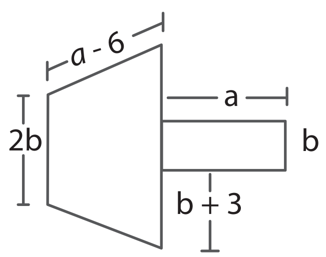
2. Escribe la igualdad de dos expresiones que representen el número de cabezas de ganado que hay en tres manadas. La primera tiene el doble que la segunda, la tercera tiene el doble de cabezas que la primera. En total hay 63 reses ¿Cuántas cabezas hay en cada manada?

Trabajo en grupo

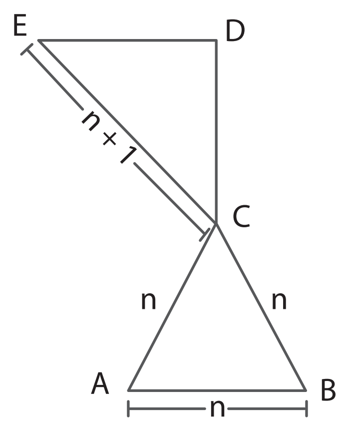
Reúnete con tres compañeros y realicen los siguientes ejercicios.

3. Hallen el perímetro de las siguientes figuras:

   a.



   b.



   En la figura el ΔABC es equilátero de lado n, y ΔCDE es isósceles de catetos iguales a la altura del ΔABC. Hallen el perímetro de toda la figura.

   (Sugerencia: usen el teorema de Pitágoras).

4. Encuentren el valor de los lados congruentes de un triángulo isósceles, sabiendo que ellos son respectivamente 3 centímetros más pequeños que el tercer lado y su perímetro es de 18 centímetros.

5. Efectúen las multiplicaciones:

   a. $2x^2 - 3y^2 + 4xy - 5$ por $-3xy$

   b. $ab - 3a^3b^2 + 6^2b^3 - a^2$ por $(2a - b)$

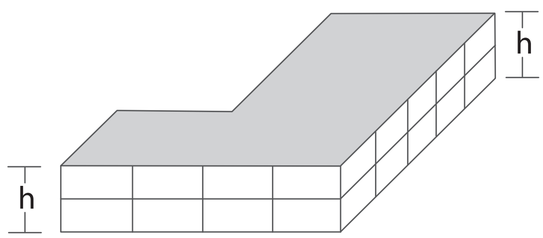
6. Si $A_1 = 2ab$; $A_2 = -3a^2b$; $A_3 = (-2a + 3b)$

   Calculen los productos:

   » $A_1 \cdot A_2$ » $A_3 \cdot A_1$ » $A_2 \cdot (A_1 + A_3)$

7. La suma de tres números enteros consecutivos es 57. Hallen la ecuación que representa esta situación. Resuelvan e indiquen cuál es el menor de los números desconocidos.

8. En una finca cercana a la escuela de la vereda, tienen almacenadas cierto número de cajas de tomate para recolectar la cosecha, en la forma que se ve en la siguiente gráfica.



Los señores de la finca saben que el volumen apilado es exactamente de $8x^3 + 6x^2$ metros cúbicos (x un entero mayor que 1) y que la base es la misma área de la parte superior; ellos necesitaban hallar el área de esa región, pero no podían medirla, la única medida disponible era la de la altura que es h.

Si se sabe que el volumen de esa figura es igual al área de la base por la altura,

$V = A \times h$, y que la altura $h = 2x$,

» ¿Es posible hallar el área deseada?

» ¿Cuál sería el procedimiento que permite calcular ese dato?

» Discutan sus respuestas. Presenten sus conclusiones al resto del grupo y saquen una conclusión.

Guía 10

Productos notables

Estándares

Pensamiento variacional

- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

Pensamiento numérico

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

Lo que sabemos

1. A partir de los polinomios

$$P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1$$

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$$

$$R(x) = 2x^4 - 2x - 2$$

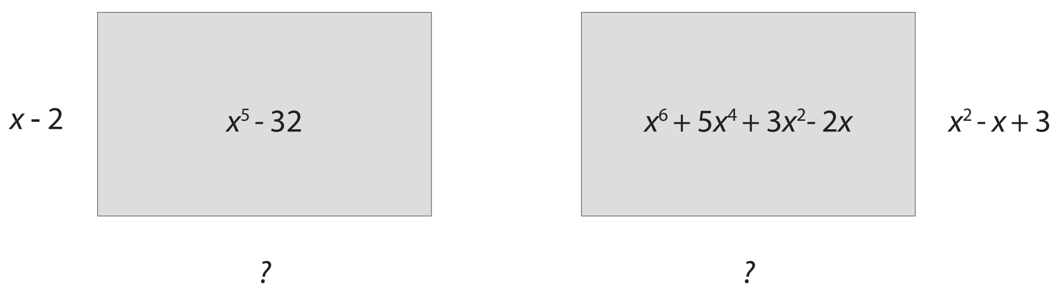
Calcula:

a. $P(x) + Q(x) - R(x)$

b. $P(x) + 2Q(x) - R(x) \quad Q(x) - R(x) + 3P(x)$

2. Analiza las siguientes situaciones

Si el área de los siguientes rectángulos es $x^5 - 32$ y $x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x$, con la longitud de sus lados como se muestra en la gráfica; hallar la longitud del lado faltante.



Aprendamos algo nuevo

Si bien la palabra *álgebra* viene del vocablo árabe (al-Jabr), sus orígenes se remontan a los antiguos babilonios, que habían desarrollado un avanzado sistema aritmético con el que fueron capaces de hacer cálculos en una forma algebraica. Con el uso de este sistema fueron capaces de aplicar las fórmulas y soluciones para calcular valores desconocidos. Este tipo de problemas suelen resolverse hoy mediante ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado y ecuaciones indefinidas.

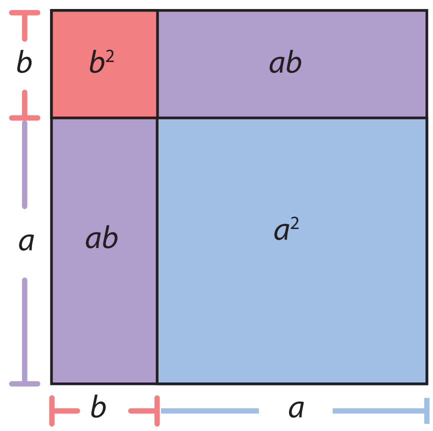
Por el contrario, la mayoría de los egipcios de esta época, y la mayoría de la India, griegos y matemáticos chinos en el primer milenio antes de Cristo, normalmente resolvían tales ecuaciones por métodos geométricos, tales como los descritos en la matemática Rhind Papyrus, Sulba Sutras, *Elementos* de Euclides, y los *Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas*. El trabajo geométrico de los griegos, centrado en las formas, dio el marco para la generalización de las fórmulas más allá de la solución de los problemas particulares de carácter más general, y en la forma de presentar y resolver ecuaciones.

Cuadrado de la suma o de la diferencia entre de un binomio.

Una de las características que tiene el álgebra es el poder simplificar los productos de dos binomios y esto nos permite agilizar los cálculos, de esta manera se tiene que:

Cuando tenemos un cuadrado y determinamos ciertas longitudes, podemos encontrar áreas que al sumarse nos permitirán encontrar el área total del cuadrado, de esta manera tenemos:

$$
\begin{aligned}
&(a + b) \\
&= (a + b)(a + b) \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$



que es el área total del cuadrado.

Cuando expandimos un binomio, estamos haciendo un ejercicio similar, veamos algunos ejemplos de diferente complejidad:

Ejemplo 1:

Tenemos el binomio $(6a + b)^2$

Descomponemos en factores $(6a + b)(6a + b)$

Realizamos el producto $36a^2 + 6ab + 6ab + b^2$

Simplificamos términos $36a^2 + 12ab + b^2$

Ejemplo 2:

Tenemos el binomio $(a^2x + by^2)^2$

Descomponemos en factores $= (a^2x + by^2)(a^2x + by^2)$

Realizamos el producto $= a^4x^2 + a^2xby^2 + a^2xby^2 + b^2y^4$

(recordar la propiedad de las potencias)

Simplificamos términos $= a^4x^2 + 2a^2xby^2 + b^2y^4$

Ejemplo 3:

Tenemos el binomio $(x^5 - 3ay^2)^2$

Descomponemos en factores $= (x^5 - 3ay^2)(x^5 - 3ay^2)$

Realizamos el producto $= x^{10} - 3x^5y^2a - 3x^5y^2a + 9a^2y^4$

(Recordar la propiedad de las potencias)

Simplificamos términos $= x^{10} - 6x^5y^2a + 9a^2y^4$

Trabajo en grupo

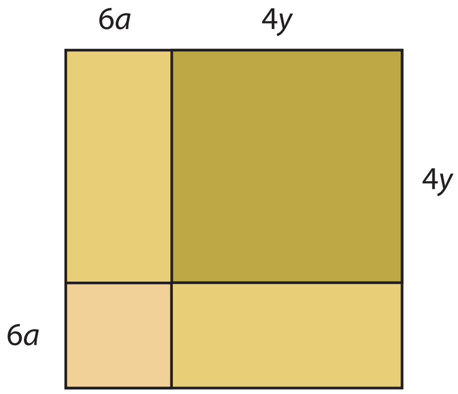
1. Reúnete con dos compañeros y desarrollen en sus cuadernos, los siguientes binomios mostrando cada paso para su solución.

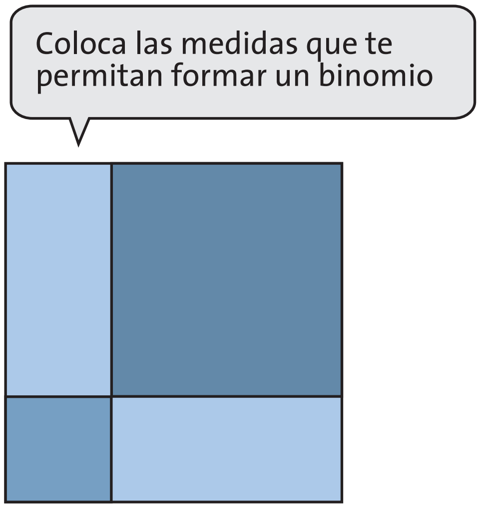
a. $(7a + b)^2$ b. $(4ab^2 + 6xy^3)^2$ c. $(8 - a)^2$ d. $(3x^4 - 5y^2)^2$

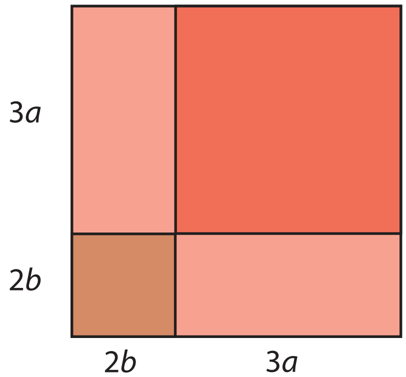
e. $(2x^2y + 4m)^2$ f. $(\sqrt{49}\, x^3 + 12)(\sqrt{49}\, x^3 + 12)$ g. $(mx^2 - 12y^3)(mx^2 + 12y^3)$

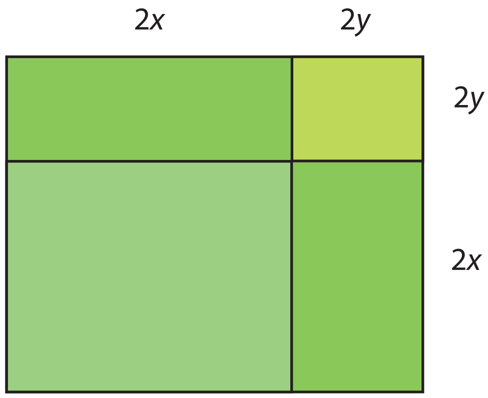
h. $(3a^2 + 8b^4)$ i. $(7a^2b^3 + 5x^4)^2$ j. $(8x^2y + 9m^3)^2$

2. A partir de las siguientes figuras: hallar en la expresión que representa el área. Recuerda desarrollar todo el procedimiento para su solución.





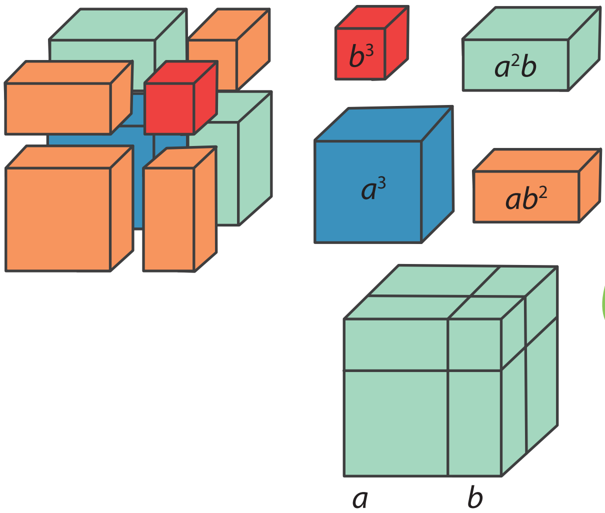




Cubo de un Binomio

Para calcular el cubo de un binomio, se suma: el cubo del primer término, con el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término. De esta forma tenemos que:

El cubo de un binomio $(a + b)^3$



Lo podemos expresar como $= (a + b)(a + b)(a + b)$

Resolvemos 2 términos $= (a^2 + ab + ab + b^2)(a + b)$

Simplificamos $= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$

Multiplicamos con el término que falta $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

Simplificamos $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Cuando resolvemos un cubo de binomio, utilizamos los pasos anteriores, para poderlo resolver, veamos algunos ejemplos de diferente complejidad:

Ejemplo 1:

Tenemos el cubo de un binomio $(2x + 1)^3$

Lo podemos expresar como $= (2x + 1)(2x + 1)(2x + 1)$

Resolvemos 2 términos $= (4x^2 + 2x + 2x + 1)(2x + 1)$

Simplificamos $= (4x^2 + 4x + 1)(2x + 1)$

Multiplicamos con el término que falta $= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1$

Simplificamos $= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

Ejemplo 2:

Otra forma de solucionar el cubo de un binomio, es utilizar la estructura $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, esto es: el primer término al cubo, más tres veces el primero al cuadrado por el segundo, más tres veces el primero por el segundo al cuadrado, más el segundo término al cubo. Para trabajar con un ejemplo remplazar por los términos que nos den en el ejercicio, de esta manera se tiene que:

$$\begin{aligned} &(4x + 5)^3 \\ &= (4x)^3 + 3(4x)^2(5) + 3(4x)(5)^2 + (5)^3 \\ &= 64x^3 + 240x^2 + 300x + 125 \end{aligned}$$

Cuando el cubo está expresado con una resta el procedimiento es el mismo, de esta manera tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& (a - b)^3 \\
&= (a - b)\ (a - b)\ (a - b) \\
&= (a^2 - ab - ab + b^2)\ (a - b) \\
&= (a^2 - 2ab + b^2)\ (a - b) \\
&= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 \\
&= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3

Desarrollar $(x^2 - 3y)^3$ utilizando la estructura del cubo de un binomio.

$$
\begin{aligned}
& (x^2 - 3y)^3 \\
&= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(3y) + 3(x^2)(3y)^2 - (3y)^3 \\
&= x^6 - 9x^4y + 27x^2y^2 - 27y^3
\end{aligned}
$$

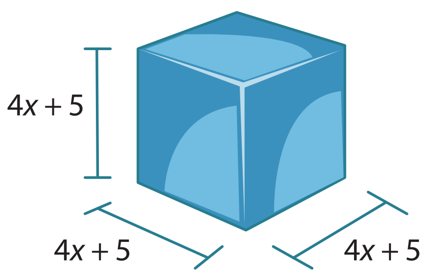
Ejercitemos lo aprendido

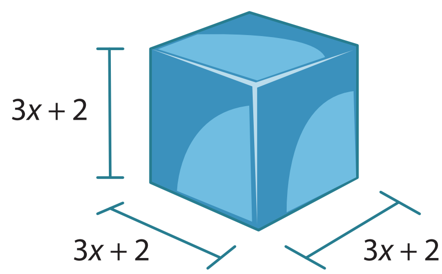
1. Desarrollen los siguientes cubos de un binomio.

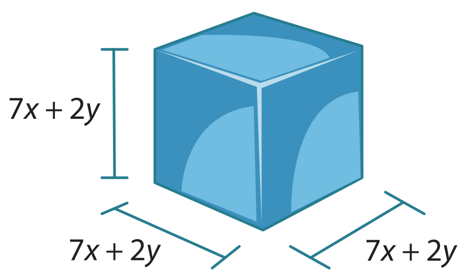
a. $(a + 2)^3$ b. $(x - 1)^3$ c. $(n - 4)^3$ d. $(1 - 2n)^3$ e. $(a^2 - 2b)^3$

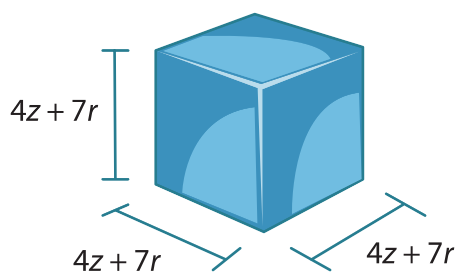
f. $(2x + 3y)^3$ g. $(1 - a^2)^3$ h. $(2x + 1)^3$ i. $(2 + y^2)^3$ j. $(a^2 - 2b)^3$

2. Halla una expresión para el volumen de cada uno de los siguientes cubos.







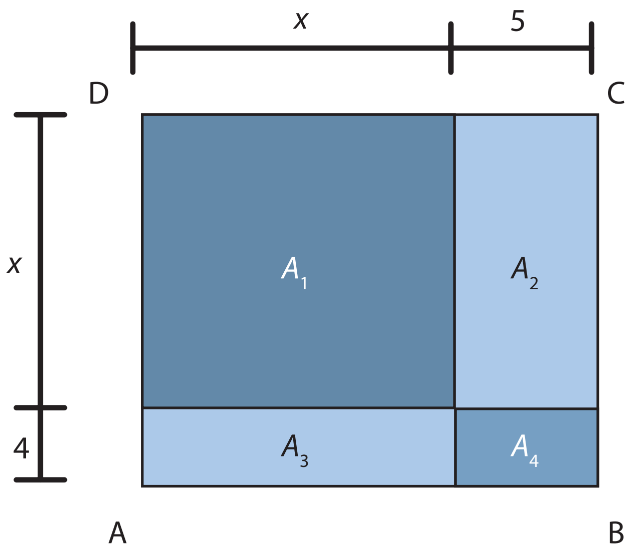


Producto de dos binomios de la forma *(x + a) (x + b)*

Si tenemos un rectángulo ABCD, como se muestra en la figura, se puede observar que está compuesto por un cuadrado y tres rectángulos, de esta manera si queremos expresar las áreas tendíamos entonces lo siguiente:

La sumatoria de cada una de las áreas, me permite hallar el área total del rectángulo: $A_{Total} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, donde $A_1 = x^2$, $A_2 = 5x$, $A_3 = 4x$, $A_4 = 20$, de esta forma se tiene que el área total es el producto de $(x + 4)(x + 5)$, por tanto:

$$\begin{aligned}(x + 4)(x + 5) &= x^2 + 5x + 4x + 20\\ &= x^2 + (5 + 4)x + 20\\ &= x^2 + 9x + 20\end{aligned}$$



El producto de las expresiones de la forma $(x + a)(x + b)$, es igual al cuadrado del primer término, más la suma de los segundos términos $(a + b)$, multiplicado por el primer término (x), más el producto de los segundos términos. Como expresión tenemos que

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Ejemplo 1

Desarrollar $(x + 5)(x + 7)$

$$\begin{aligned}(x + 5)(x + 7) &= x^2 + (5 + 7)x + (5)(7)\\ &= x^2 + 12x + 35\end{aligned}$$

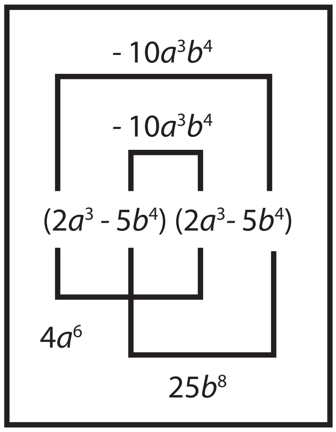
Ejemplo 2

Otra forma de desarrollar los binomios es aplicar la propiedad distributiva de manera organizada.

Desarrollar $(2a^3 - 5b^4)\ (2a^3 - 5b^4)$

$= 4a^6 - 10a^3b^4 - 10a^3b^4 + 25b^8$

$= 4a^6 - 20a^3b^4 + 25b^8$



Ejemplo 3

Multiplicar $(x + 7)\ (x - 2)$

Para desarrollar este producto debemos tener en cuenta los coeficientes del binomio.

Tomamos los coeficientes 7 y -2 y los operamos $7 - 2 = 5$

Multiplicamos ahora los mismos términos $(7) \cdot (-2) = 14$

Luego armamos el trinomio $(x + 7)\ (x - 2) = x^2 + 5x - 14$

Apliquemos lo aprendido

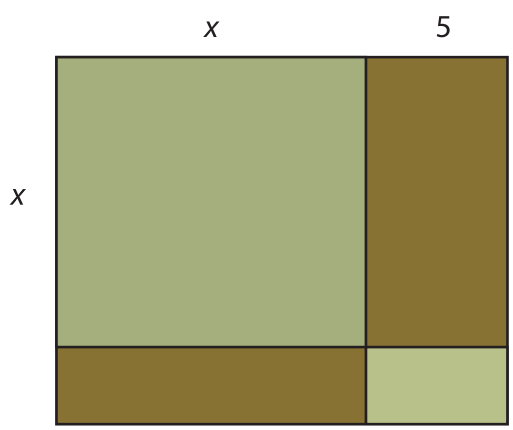
1. Desarrolla los siguientes binomios de la forma $(x + a)(x + b)$:

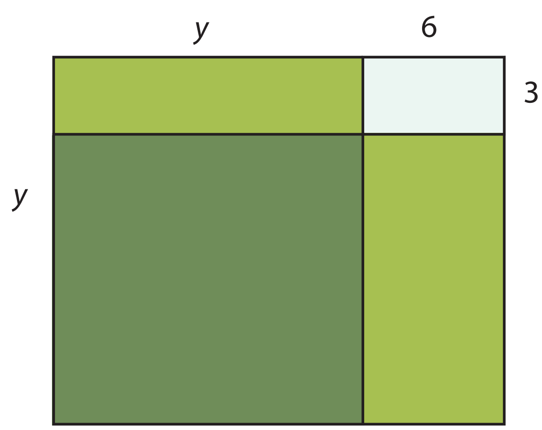
a. $(a + 1)(a + 2)$ b. $(x + 2)(x + 4)$ c. $(x + 7)(x - 3)$

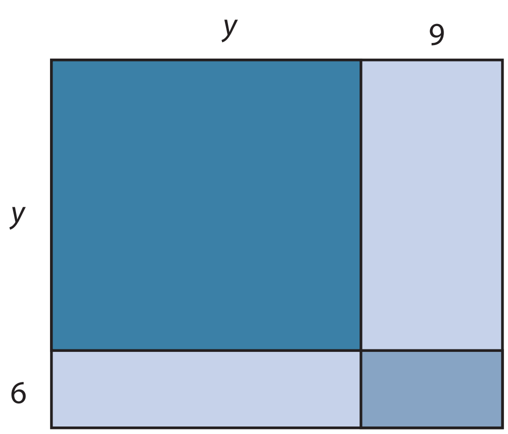
d. $(a^2 + 5)(a^2 - 9)$ e. $(x^2 - 1)(x^2 - 7)$ f. $(n^2 - 1)(n^2 + 20)$

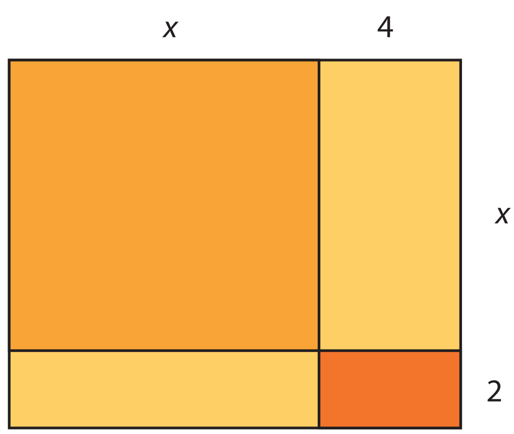
g. $(x^2 y^2 - 6)(x^2 y^2 + 8)$ h. $(a^5 - 2)(a^5 + 7)$

2. Halla una expresión para el área de cada uno de los siguientes rectángulos









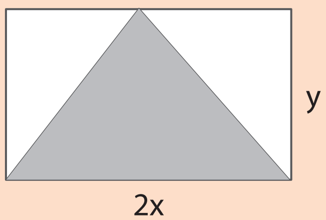
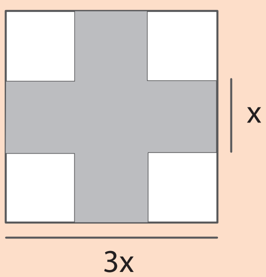
Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

1. Colorea con el mismo color las expresiones equivalentes.

$(3x^2 - 6x + 7)(4ax^2)$	$3x - 4$
$(4x - 3y + z) - (2x + 5z - 6)$	$x^2 + 2xy + y^2$
$(3x^2 + 2x - 8) \div (x + 2)$	$(x + y)(x - y)$
$(x + y)^2$	$12ax^4 - 24ax^3 + 28ax^2$
$x^2 - 7x + 12$	$(x - 3)(x - 4)$
$x^2 - y^2$	$2x - 3y - 4z + 6$

2. Observa las figuras y realiza lo que se pide.

	• El perímetro del rectángulo es: • El área de la región sombreada es:
	• ¿Cuál es el proceso para hallar el área sombreada? • Escribe el perímetro del cuadrado. • Indica el área del cuadrado. • Expresa el perímetro de la región sombreada. • Expresa el área de la región sombreada.

3. Plantea una expresión algebraica para la siguiente situación y resuélvela.

La edad de A es el triple de la de B y la de B es 5 veces la de C. B tiene 12 años más que C. ¿Qué edad tiene cada uno?

4. ¿Cuál de los conceptos que se trataron en este módulo fue el que más te gustó?

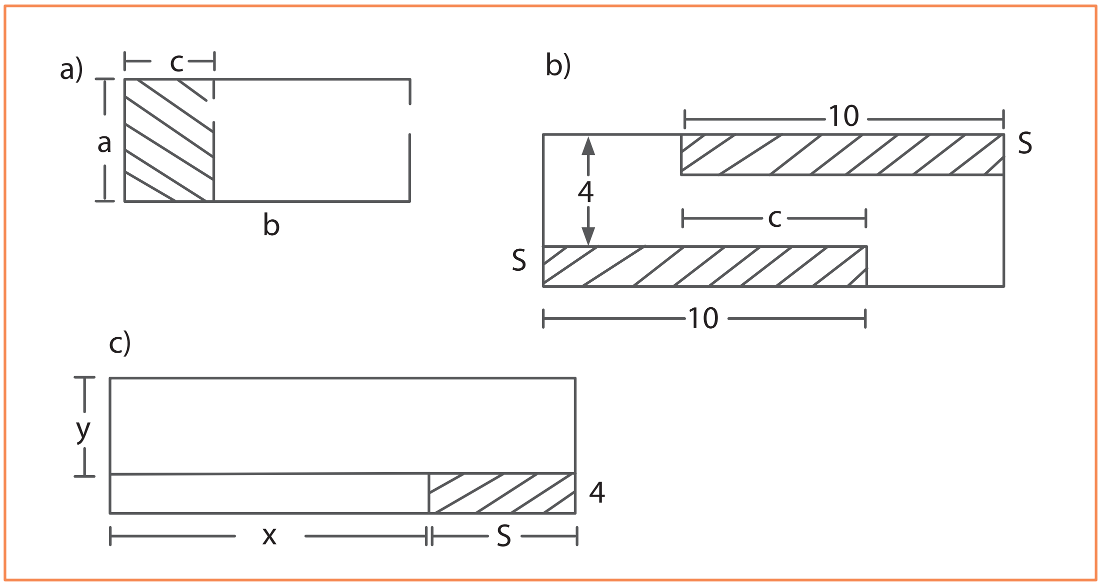
5. ¿Cuál de los conceptos que se desarrollaron en este módulo se te dificultó más?

6. De las actividades planteadas a lo largo del módulo, ¿cuál fue la que más te gustó? ¿Por qué?

¿Cómo me ven los demás?

Reúnete con dos compañeros más y realicen lo que se indica a continuación.

- Calculen el perímetro y el área de la zona no sombreada que aparece en cada una de las figuras.



1. Cada uno de los integrantes del grupo explica a los otros la forma de resolver el ejercicio aplicando lo aprendido en el módulo.
2. Discutan si se encuentran opiniones diferentes. Den argumentos para defender sus respuestas y contra- argumentos para refutar lo que expone otro compañero, siempre y cuando no se esté de acuerdo.
3. Compartan las respuestas con sus compañeros de grupo y elaboren un mapa conceptual que relacione cada uno de los conceptos tratados.
4. Escriban algunas conclusiones acerca de la forma de resolver la actividad, luego compártanla con el resto del grupo.

5. Evalúen el desempeño de cada uno de los integrantes del grupo en la actividad realizada, teniendo presente si manejan los conceptos tratados. Luego compartan esa evaluación con el maestro y el resto de la clase. Propongan estrategias para reforzar los aspectos que consideren deben mejorar.

¿Qué aprendí?

	Sí	No	A veces	Justifico
Reconozco cierta clase de generalización y doy una fórmula general para ellas.				
Identifico la diferencia entre expresión, término, coeficiente y término independiente.				
Reconozco la diferencia entre monomios, binomios y polinomios.				
Identifico el grado de un polinomio.				
Evalúo expresiones algebraicas.				
Opero polinomios con sumas y restas en contextos geométricos a partir de perímetros.				
Multiplico diferentes clases de polinomios en contextos geométricos a partir de áreas.				
Utilizo las propiedades de los números reales para aplicarlas en la división de polinomios.				
Modelo con representaciones geométricas polinomios.				
Identifico y opero los productos notables.				
Resuelvo situaciones que requieren del planteamiento de expresiones algebraicas.				
Aporto en las actividades grupales.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Participo activamente en clase, expresando mis opiniones de manera clara y respetuosa.				
Respeto las opiniones de mis compañeros de curso.				
Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				
Me intereso por aprender de manera significativa.				

Con tu maestro, determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento.

Algunas equivalencias entre polinomios y productos de expresiones algebraicas

¿Qué vas a aprender?

Las matemáticas comenzaron su razón de ser, como respuesta a preguntas del estilo: ¿cuántos somos?, ¿cuantos animales hay?, ¿cuál es la distancia que existe de un lugar a otro? Algunos cálculos son muy sencillos y ya habrás tenido tiempo para aplicarlos en tu vida diaria, por otro lado a medida que vamos avanzando en los grados, también aumenta la posibilidad de realizar cálculos mucho más complejos que permiten cuantificar de manera más generalizada: ¿cuántas hectáreas tiene una finca?, o ¿cuánto terreno está destinado para el cultivo de un producto particular?.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento Variacional

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

La realización de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo te permitirá alcanzar estándares básicos de competencias que privilegian el desarrollo del pensamiento matemático a través de los conceptos asociados a la factorización y manejo algebraico de diversas expresiones que permiten hablar de equivalencias entre ellas. En la tabla que se presenta a continuación se muestran los conceptos que aprenderás.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 11.

Factorización de Monomios</td><td>Factor común de monomio</td><td rowspan="4">El desarrollo de estos estándares permitirá fortalecer los siguientes procesos:

• La formulación, tratamiento y resolución de problemas: Por cuanto se presentan diversas situaciones que pueden ser resueltas mediante su representación geométrica y algebraica para ser factorizadas.

• La comunicación: Se invita al estudiante a interpretar enunciados, así como a proponer soluciones a ejercicios y aplicaciones relacionados con los diversos casos de factorización.

• El razonamiento: En tanto es necesario que el estudiante establezca las relaciones entre las diversas expresiones algebraicas que más adelante le permitirán identificar que procedimientos de la factorización se pueden desarrollar.

• La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos: A lo largo del desarrollo de los temas, al finalizar el desarrollo de cada tema y en las actividades evaluativas, se presentan ejercicios que ayudarán a ganar destreza en el cálculo de factores de expresiones algebraicas.</td></tr>
<tr><td>Guía 12.

Factorización de Binomios</td><td>Diferencia de Cuadrados

• Cubo perfecto de un binomio

• Suma o diferencia de Cubos</td></tr>
<tr><td>Guía 13.

Factorización de Trinomios</td><td>Trinomio cuadrado perfecto

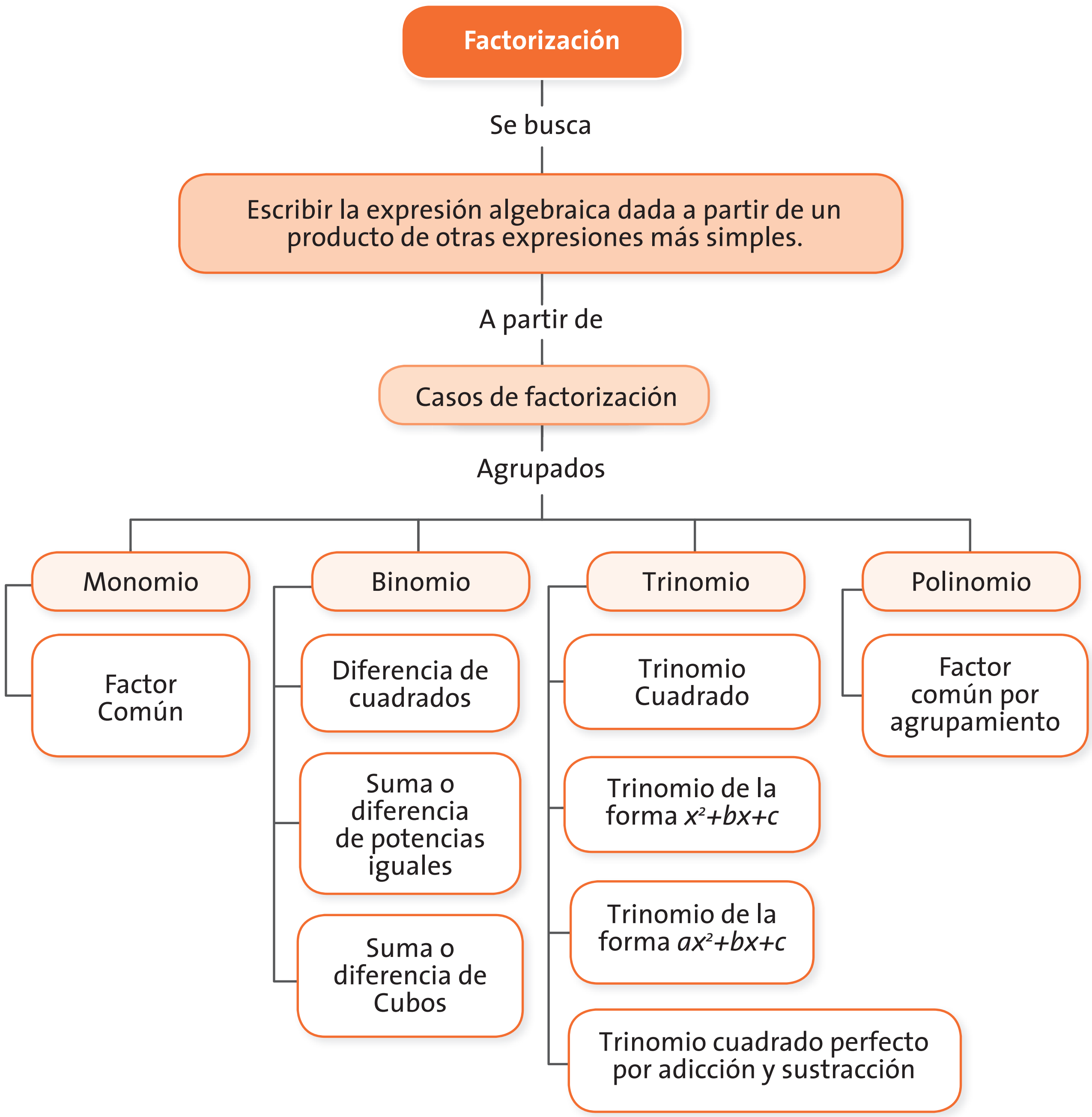
• Trinomio cuadrado perfecto

• Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

• Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

• Trinomio por adición y sustracción</td></tr>
<tr><td>Guía 14.

Factorización de Polinomios</td><td>• Factor común por agrupamiento</td></tr>
</table>



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Los seres humanos han desarrollado muchas fórmulas para tratar de establecer comportamientos de los fenómenos que se presentan en la vida cotidiana, tal y como el lanzamiento de un objeto vertical, a partir de la matemática como herramienta para desarrollar una expresión que permita caracterizar los sucesos que ocurren bajo situaciones particulares. Desde este tipo de construcciones, se puede determinar la posición inicial del objeto que será lanzado, la altura máxima en la cual cae y la posición final que alcanza a recorrer.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En cada una de las guías encontrarás la sección *Ejercito lo aprendido*, con la cual podrás evaluar tu destreza en cuanto a la factorización de cada tipo de expresión algebraica.

También encontrarás al final del módulo, las secciones *Aplico lo aprendido* donde se proponen aplicaciones en las que combinarás tu habilidad manual y los conocimientos adquiridos y la sección *Evaluación*, en las que se proponen actividades individuales y grupales en las que tú y tus compañeros y el maestro podrán detectar los aspectos que debes reforzar con respecto a la factorización de expresiones algebraicas.

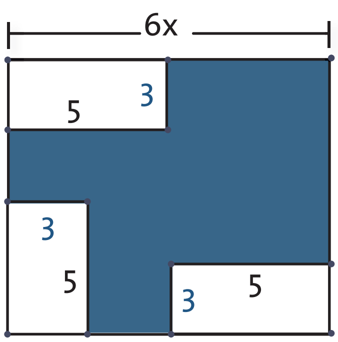
Explora tus conocimientos

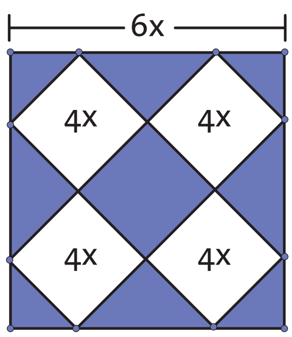
1. Halla el valor de los lados de cada uno de los cuadrados, teniendo en cuenta las expresiones algebraicas que se encuentran dentro de cada uno.

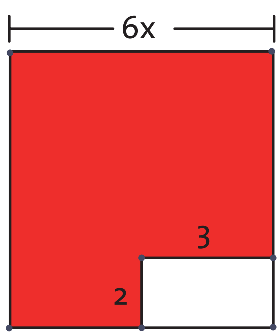
$x^2 - 4$ $\quad$ $m^2 - 16$ $\quad$ $z^2 - 9$

$a^2 - 49$ $\quad$ $b^2 + 25$

2. Reúnete con dos compañeros más, y dibuja en una hoja cuadriculada las siguientes imágenes, escribe una expresión que permita determinar el área de las figuras que se muestran a continuación.







Guía 11

Factorización de monomios

Estándar:

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

En esta guía se analizará el procedimiento que es aplicable a una expresión algebraica como los monomios, para ser factorizados.

Lo que sabemos

Para desarrollar la factorización de expresiones algebraicas, necesitamos establecer el máximo común divisor de las diversas expresiones entregadas.

Hallemos el máximo común divisor de $36x^4y^2z^2$, y $72x^5y^3z^4$

a. Hallo el máximo común divisor de los coeficientes MCD (36,72)= 36

b. Hallo el máximo común divisor de la parte literal MCD $(x^4y^2z^2, x^5y^3z^4) = x^4y^2z^2$

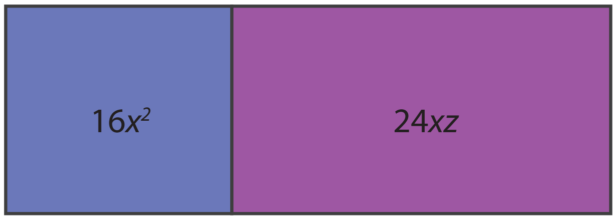
c. Reúno los dos resultados anteriores y obtengo que el MCD de las dos expresiones son: $36x^4y^2z^2$

Para obtener el máximo común divisor de dos monomios, se hallan los términos comunes tanto en los coeficientes, como en la parte literal.

Aprendamos algo nuevo

Factor común por monomio

Carlos observa un cartel, en este se ve:



Cada uno de los anteriores es el dibujo de un terreno. Si en la parte inferior del cartel, se pregunta: ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo resultante al unir los dos terrenos anteriores?

El área del rectángulo final se obtiene de la suma de $16x^2 + 24xz$. Como $8x$ es el máximo común divisor de $16x^2$ y $24xz$, entonces $8x$ es la longitud del lado que comparten ambos rectángulos. Eso significa, que podemos expresar estas medidas de la siguiente manera:

$$16x^2 = (8x)\,(2x)$$

$$24xz = (8x)\,(4z)$$

Por lo anterior, el área del rectángulo está dada por:

$16x^2 + 24xz = (8x)(2x) + (8x)(4z)$

Y aplicando propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, se obtiene:

$(8x)(2x) + (8x)(4z) = 8x\,(2x+4z)$

De esta manera, la longitud del otro lado se puede expresar como $(2x+4z)$.

Es decir que, el monomio $8x$ es el lado común del rectángulo y recibe el nombre de **factor común de monomio.**

Para hallar el factor común de monomio se establece el máximo común divisor de los términos, comenzando por los coeficientes y luego en su parte literal, y aplicamos la propiedad distributiva.

Factor común de polinomio

Factoriza $15x^4$-$5x^3$+$25x^2$

Paso 1: Halla el máximo común divisor MCD (15, 5, 25) = 5

Paso 2: Halla el máximo común divisor de la parte literal MCD (x^4, x^3, x^2)= x^2

Paso 3: Escribir cada término utilizando el factor común obtenido

$$15x^4 = (5x^2)(3x^2)$$

$$-5x^3 = -(5x^2)(x)$$

$$25x^2 = (5x^2)(5)$$

Paso 4: $15x^4 - 5x^3 + 25x^2 = 5x^2\,(3x^2 - x + 5)$

Factor común polinomio

1. Halla el máximo común divisor de los términos del polinomio.
2. Cada término se debe escribir como producto del factor común por cualquier otro término.
3. Aplica la propiedad distributiva.

Ejercitemos lo aprendido

1. Desarrolla los siguientes ejercicios, aplicando el procedimiento anterior.

   a. $7n+14$

   b. $15p + 25$

   c. $2x^2 - 4x +10$

   d. $24x^2y^2+16xy^4+72xy^3$

   e. $-15y^3z - 28$

5. Relaciona con una flecha la expresión algebraica con su respectiva factorización:

Polinomio	Factorización
$24axy^2 - 12bxy^2$	$6n(5a - 7b)$
$22axy + 33bxy$	$3x(4a+5b)$
$35ab - 21ac$	$7a(5b - 3c)$
$30an - 42bn$	$11xy(2a + 3b)$
$12ax^2y + 12bx^2y$	$8c(4b + 3x)$
$20my - 10ny$	$12xy^2(2a - b)$
$12ax + 15bx$	$10y(2m - n)$
$32bc + 24cx$	$8c(4b + 3x)$

Guía 12

Factorización de binomios

Estándar:

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Lo que sabemos

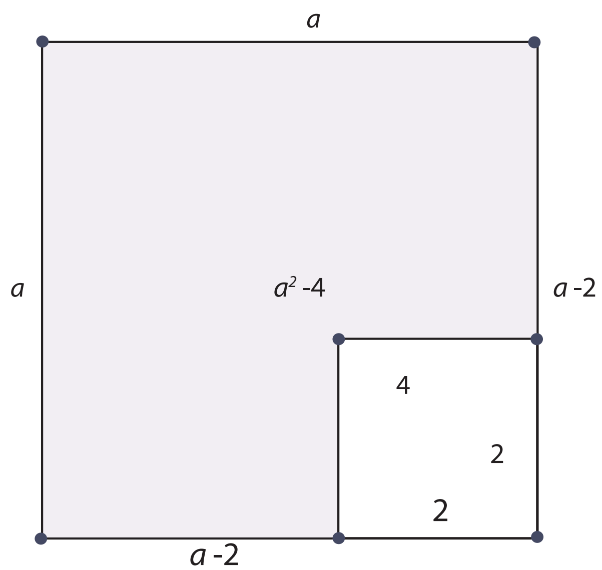
En esta guía se analizarán los procedimientos, que se pueden usar con un binomio para ser factorizado, tales como la diferencia de cuadrados, suma o diferencia de potencias iguales y suma o diferencia de cubos.

Aprendamos algo nuevo

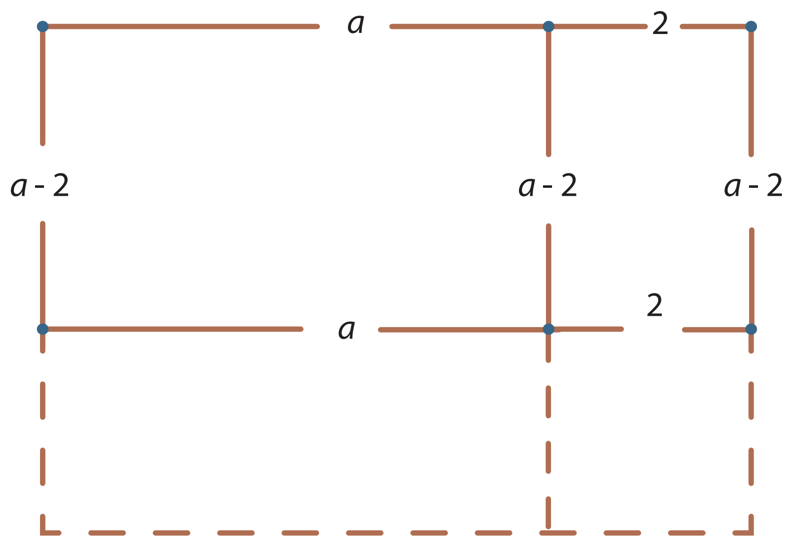
Diferencia de cuadrados

Factorizar a^2-4

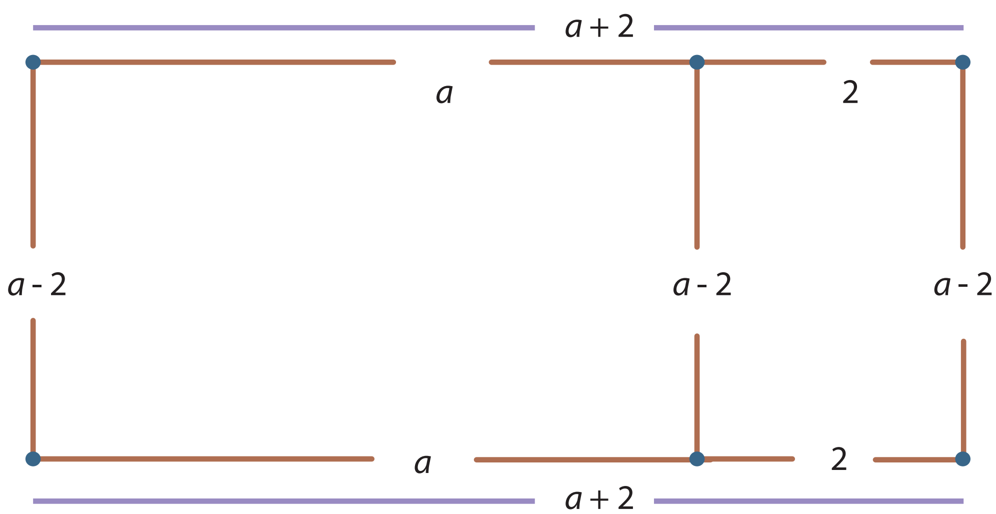
1. Lo representaremos gráficamente para ver el proceso que se realiza desde el trabajo con áreas, es decir, representamos un cuadrado de lado a, en el cual dividimos un cuadrado de lado 2.



2. Reorganizamos las áreas de la gráfica anterior, duplicando el área que tiene el cuadrado de lado 2, obteniendo esta figura:



3. Pero nuestro problema radica en la factorización de la expresión algebraica a^2-4, por tanto tenemos que el resultado es:



Entonces $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$

Ahora realizaremos el procedimiento, en términos algebraicos:

Paso1: Hallamos la raíz cuadrada de cada uno de los términos dados en la expresión algebraica:

$$a^2 - 4$$

$$\sqrt[2]{a^2} = a \qquad \sqrt[2]{4} = 2$$

Paso 2: Con las raíces obtenidas, construimos el producto de la adición y sustracción de los términos obtenidos:

$$(a + 2)\,(a - 2)$$

Paso 3: Entonces $a^2 - 4 = (a + 2)\,(a - 2)$

Diferencia de cuadrados perfectos

1. Hallo las raíces de los cuadrados perfectos.
2. Construyo el producto de la adición y sustracción de las raíces obtenidas.

Trabajo en grupo

Factoriza los siguientes ejercicios, con la ayuda de un compañero:

a. $x^2 - y^2$ b. $100 - x^2y^6$ c. $1 - 9a^2b^4c^6d^8$

d. $a^{10} - 49b^6$ e. $25x^2y^4 - 121$ f. $(x - y)^2 - a^2$

g. $4 - (a - 1)^2$ h. $9 - (m - n)^2$ i. $(x + y)^2 - 9x^2$

j. $(2a - c)^2 - (a + c)^2$

Cubo perfecto de binomio

Factorizar $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

Paso1: Verificar si esta expresión cumple con las condiciones para ser considerada como cubo de un binomio.

a. Tiene cuatro términos

b. Dos términos (el primero y el último) son cubos perfectos, es decir existe su raíz cubica dentro del conjunto de los Enteros.

c. El segundo término es tres veces el producto de la primera raíz elevada al cuadrado por la segunda raíz elevada a la potencia uno.

d. El tercer término es tres veces el producto de la primera raíz elevada a la potencia de uno por la segunda raíz elevada al cuadrado.

1. Tiene cuatro términos algebraicos $8x^3$; $12x^2$; $6x$; 1

2. Dos términos que son cubos perfectos (el primero y el último) $8x^3$ y 1, pues: $\sqrt[3]{8x^3} = 2x$

   $\sqrt[3]{1} = 1$

3. El término $12x^2$ se pueden obtener de la siguiente manera: $12x^2 = 3\ (2x)^2(1)^1$

Es decir, cumple con la condición.

4. El término $6x$ se puede obtener de la siguiente manera:

   $6x = 3(2x)^1(1)^2$

Se cumple con la última condición para llamar a la expresión algebraica: cubo de un binomio.

Paso2: Se hallan las raíces cubicas de los términos, primero y último, se verifica si los términos son positivos se establece una adición entre los mismos, en caso de presentarse los signos positivos y negativos de forma intercalada, entonces se establece una sustracción.

$$\sqrt[3]{8x^3} = 2x$$

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

Entonces tenemos que como en la expresión todos los términos son positivos, la factorización es:

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3$$

Cubo perfecto de Binomio

1. Ordeno la expresión con respecto a una variable
2. Verifico las cuatro características
3. Construyo la adición o sustracción de las raíces cubicas obtenidas.

Trabajo en grupo

Resuelvan en sus cuadernos, los siguientes ejercicios:

a. $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$

b. $1 + 3a^2 - 3a - a^3$

c. $8 + 12a^2 - 6a^4 + a^6$

d. $125x^3 + 1 + 75x^2 + 15x$

e. $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

f. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$

g. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

h. $1 + 12a^2b - 6ab - 8a^3b^3$

i. $216 - 756a^2 + 882a^4 - 343a^6$

j. $1 + 18a^2b^2 + 108a^4b^6 + 216a^6b^8$

Suma o diferencia de cubos perfectos

Factorizar $64a^3 + 729$

Paso 1: Hallamos la raíz cúbica de los dos términos dados, en la expresión algebraica.

$$\sqrt[3]{64a^3} = 4a$$

$$\sqrt[3]{729} = 9$$

Paso 2: Si es una suma de cubos perfectos se desarrolla de la siguiente manera:

a. Se construye con la adición de las raíces cúbicas de los términos dados.

$$(4a + 9)$$

b. El segundo paréntesis se conforma con la primera raíz cúbica elevada al cuadrado, menos el producto de las raíces cúbicas, más la segunda raíz elevada al cuadrado.

$$(4a)^2 - (4a)(9) + (9)^2 = 16a^2 - 36a + 81$$

c. El resultado final será entonces: $(4a + 9)(16a^2 - 36a + 81)$

Factorizar $64a^3 - 729$

Paso 1: Hallamos la raíz cúbica de los dos términos dados, en la expresión algebraica.

$$\sqrt[3]{64a^3} = 4a$$

$$\sqrt[3]{729} = 9$$

Paso 2:

Si es una sustracción de cubos perfectos se desarrolla de la siguiente manera:

a. Se construye con la diferencia de las raíces cúbicas de los términos dados.

$$(4a - 9)$$

b. El segundo paréntesis se conforma con la primera raíz cúbica elevada al cuadrado, más el producto de las raíces cúbicas, más la segunda raíz elevada al cuadrado.

$$(4a)^2 + (4a)(9) + (9)^2 = 16a^2 + 36a + 81$$

c. El resultado final será entonces: $(4a - 9)(16a^2 + 36a + 81)$

Suma o diferencia de cubos

1. Hallamos la raíz cúbica de los términos que contienen expresiones algebraicas.

2. Entregamos dos paréntesis, el primero contendrá la adición o la sustracción de las raíces y el segundo paréntesis contendrá cada una de las raíces elevadas al cuadrado y el segundo término será la multiplicación de las raíces.

Ejercitemos lo aprendido

Resuelve los siguientes ejercicios:

a. $y^3 - 1$

b. $8x^3 - 1$

c. $1 - 8x^3$

d. $x^3 - 27$

e. $a^3 + 27$

f. $27a^3 - b^3$

g. $1 - 216m^3$

h. $8a^3 + 27b^4$

i. $x^6 - b^9$

j. $a^3 - 125$

Guía 13

Factorización de trinomios

Estándar:

Pensamiento variacional

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Lo que sabemos

En esta guía se analizará el procedimiento que es aplicable a una expresión algebraica como los trinomios, para ser factorizados, a través de los casos de trinomio cuadrado perfecto, trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, ó trinomio por adición y sustracción.

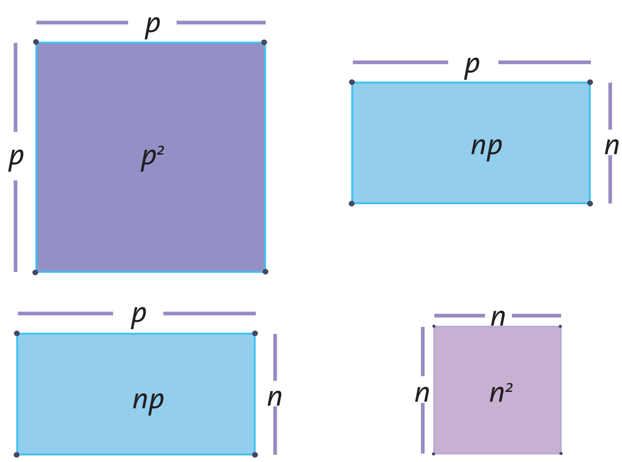
Aprendamos algo nuevo

Trinomio cuadrado perfecto

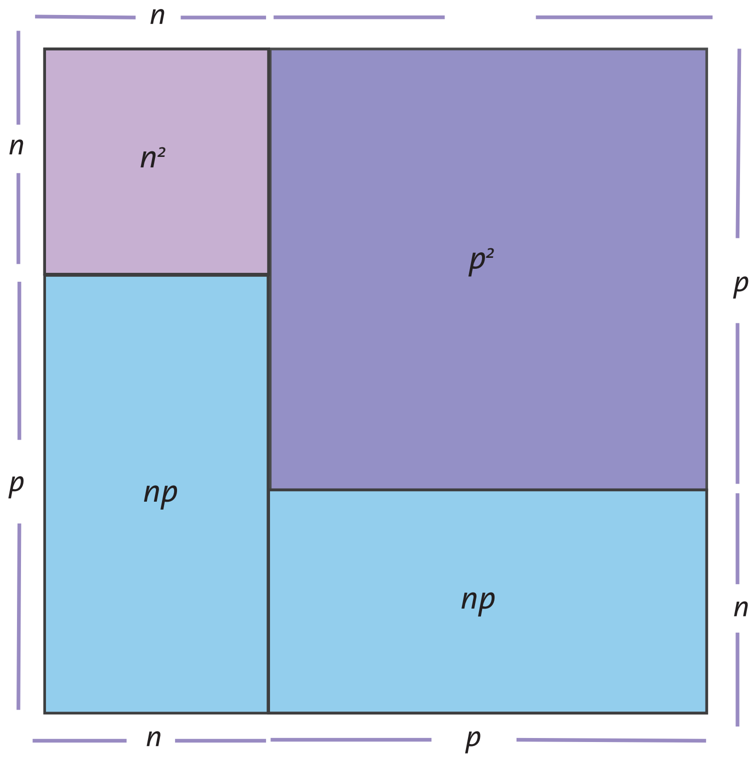
Factorizar $n^2 + 2np + p^2$

Aplicaremos en principio el desarrollo geométrico para ver el manejo desde las áreas.

1. Esta expresión algebraica, nos entrega las siguientes figuras geométricas que constituyen las áreas, si bien es cierto que desde la expresión sólo se tienen tres términos, es necesario aclarar que al tener dos veces el área np, se presentan dos veces la misma figura geométrica, de ahí que resulten cuatro cuadriláteros.



2. Reorganizando las figuras geométricas, es posible armar el siguiente cuadrado:



3. El cuadrado que se obtiene tendría de lado, $n+p$, luego su área es Esta reconfiguración es posible expresarla como:

$$n^2 + 2np + p^2 = (n + p)\ (n + p) = (n + p)^2$$

En términos algebraicos el procedimiento a realizarse es:

Paso1: Hallamos la raíz cuadrada de los dos términos que son cuadrados perfectos.

$$\sqrt[2]{n^2}=n$$

$$\sqrt[2]{p^2}=p$$

Paso2: Verificamos que tenga la conformación de trinomio cuadrado perfecto, es decir el segundo término debe ser dos veces el producto de las raíces y los dos términos restantes deben estar elevados al cuadrado.

$$2np = 2(n)(p)$$

n^2; p^2 los dos términos estan elevados al cuadrado.

Paso 3: Si todos los términos son positivos, entonces se entrega un paréntesis que contenga la adición de las raíces elevado al cuadrado. Pero si por el contrario los términos presentan signos positivos y negativos, el paréntesis se establece con la sustracción de las raíces.

$$n^2 + 2np + p^2 = (n + p)^2$$

Trinomio Cuadrado perfecto

1. Halla las raíces de los cuadrados perfectos.
2. Construyo la adición o sustracción de las raíces en un paréntesis y luego se elevan al cuadrado.

Trabajo en grupo

Resuelvan los siguientes ejercicios:

a. $x^2 + 2xy + y^2$

b. $a^2 + 2ab + b^2$

c. $x^2 - 8x + 16$

d. $9x^4 - 12x^2 + 4$

e. $(a + b)^2 + 12(a + b) + 36$

f. $x^2 - 6x + 9$

g. $4x^2 - 20xy + 25y^2$

h. $y^4 + 4y^2 + 4$

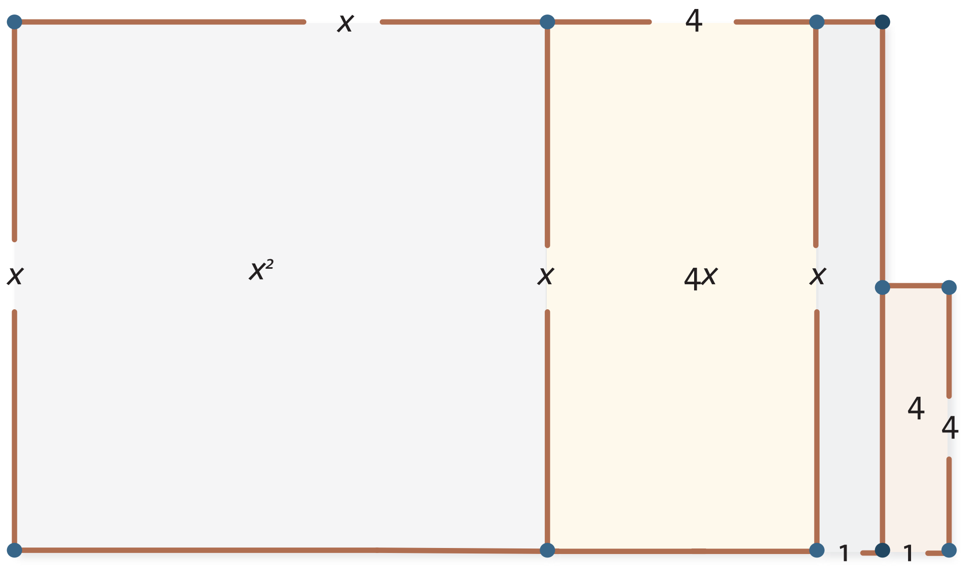
i. $y^4 - 6y^2 + 9$

j. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

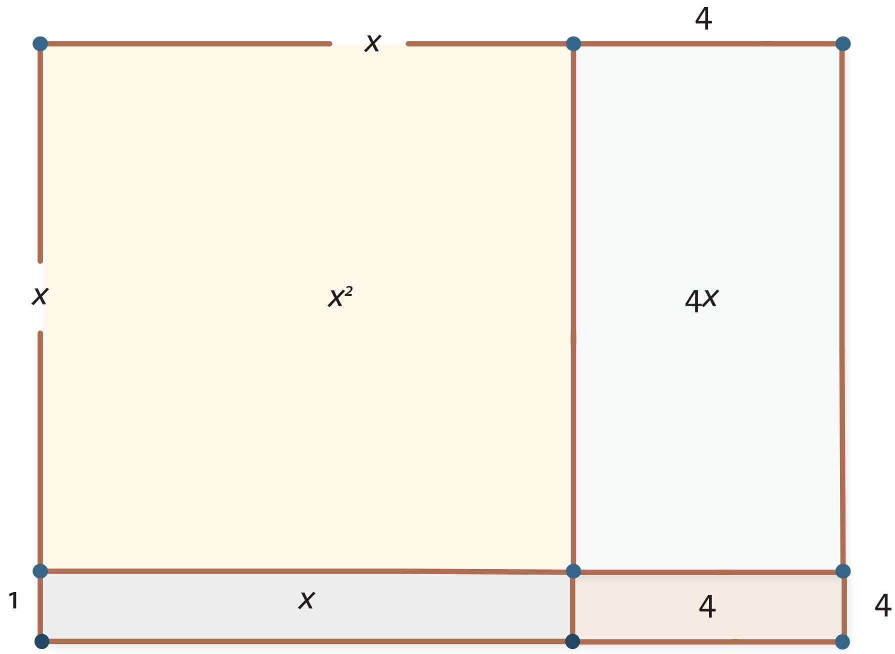
Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Factorizar $x^2 + 5x + 4$

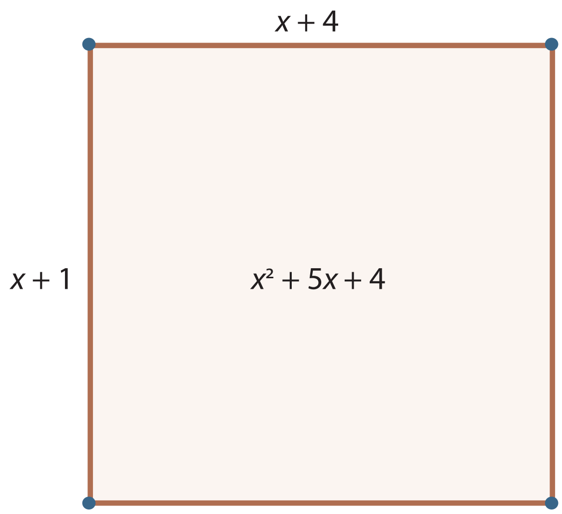
Este trinomio se puede representar geométricamente de la siguiente forma:



Si reorganizamos las figuras geométricas obtenemos:



Entonces podemos determinar el área de la figura de la siguiente manera:



En términos algebraicos, el procedimiento para factorizar este polinomio es:

Paso1: Hallamos la raíz del cuadrado del término que cumpla con ser un cuadrado perfecto.

$$\sqrt[2]{x^2}=x$$

Paso2: Se construyen dos paréntesis cada uno con la raíz, obtenida en el paso anterior.

$$(x \qquad)\,(x \qquad)$$

Paso 3: Buscamos dos términos que al ser multiplicados nos dé como resultado el término independiente y que al ser sumados o restados se obtenga el coeficiente del segundo término de la expresión algebraica.

En este caso necesitamos dos números que multiplicados nos den 4 y sumados nos den 5.

$$(4)\,(1) = 4$$

$$4 + 1 = 5$$

Paso 4: Revisamos que los signos nos coincidan al realizar las suma o la resta y ubicamos los números en los paréntesis, acompañados de la raíz cuadrada obtenida, en el primer paso.

$$(x + 4)\ (x + 1) = x^2 + 5x + 4$$

De esta forma, queda factorizado el polinomio como:

$$(x + 4)\ (x + 1) = x^2 + 5x + 4$$

Revisemos el caso en el que los términos no todos sean positivos, aplicamos los cuatros pasos:

$$a^2 - 18a + 45$$

Paso 1: Hallamos la raíz del cuadrado del término que cumpla con ser un cuadrado perfecto.

$$\sqrt[2]{a^2} = a$$

Paso 2: Se construyen dos paréntesis cada uno con la raíz, obtenida en el paso anterior.

$$(a \qquad\qquad)\ (a \qquad\qquad)$$

Paso 3: Buscamos dos términos que al ser multiplicados nos dé como resultado el término independiente y que al ser sumados o restados se obtenga el coeficiente del segundo término de la expresión algebraica.

En este caso necesitamos dos números que multiplicados nos den 45 y sumados nos den -18.

$$(-15)(-3) = 45$$

$$(-15) + (-3) = -18$$

Paso 4: Revisamos que los signos nos coincidan al realizar las suma o la resta y ubicamos los números en los paréntesis, acompañados de la raíz cuadrada obtenida, en el primer paso.

$$(a - 15)\ (a - 3) = a^2 - 18a + 45$$

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

1. Hallo la raíz del cuadrado perfecto.
2. Hallo las cantidades que al ser multiplicadas den como resultado el término independiente, y al ser sumadas o restadas den como resultado el coeficiente del segundo término que contiene la expresión algebraica.
3. Construyo los paréntesis teniendo en cuenta los signos, y entrego la factorización.

Trabajo en grupo

Resuelvan los siguientes ejercicios:

a. $z^2 + 4z + 4$

b. $y^2 - 18y + 81$

c. $a^2 - 2a - 15$

d. $m^2 - 12m + 11$

e. $x^2 - 7x - 30$

f. $x^2 - 3x + 2$

g. $a^2 + 4a + 3$

h. $n^2 - 6n - 40$

i. $y^2 + y - 30$

j. $x^2 - 17x + 60$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Factorizar $4r^2 + 12r - 16$

Paso 1: Multiplicamos todo el trinomio por el coeficiente que acompaña al cuadrado perfecto, y resolvemos, dejando indicada la multiplicación del término del centro

$$(4)\,4r^2 + (4)12r - (4)16$$

Resolviendo la multiplicación $16r^2 + (4)12r - 64$

Paso 2: Construyo dos paréntesis, dejando en cada uno la raíz cuadrada del primer término

$$\sqrt[2]{16r^2} = 4r$$

$$(4r \qquad)\,(4r \qquad)$$

Paso 3: Busco dos números que multiplicados me den 64 y restados me den 12.

$$(16)\,(4) = 64$$

$$16 - 4 = 12$$

Por tanto, los paréntesis quedaran así: $(4r + 16)\,(4r - 4)$

Paso 4: Ya factorizamos el polinomio que se obtuvo al multiplicar toda la expresión por 4, pero en realidad el polinomio entregado es $4r^2 + 12r - 16$, **por tanto debemos simplificar los paréntesis.**

$(4r + 16)\,(4r - 4)$, ambos paréntesis son posibles de simplificarlos por 1, 2 ó 4, pero sólo se puede desarrollar la simplificación entre, exactamente, la cantidad por la cual fue multiplicada.

Entonces simplificaremos, los dos paréntesis por 2, puesto que al multiplicarlos obtenemos como resultado 4, cumpliendo con la condición, de ser exactamente la cantidad por la cual fue alterado el polinomio.

$$\frac{(4r + 16)\,(4r - 4)}{2 \times 2}$$

Obtenemos $(2r + 8)(2r - 2)$, después de simplificar cada paréntesis. Otra forma de realizar esta simplificación es dividir por 4 sólo uno de los dos paréntesis. En tal caso, se obtendría:

$$\frac{(4r + 16)(4r - 4)}{4 \, x \, 1}$$

Obtenemos $(r + 4)(4r - 4)$, y aunque las dos expresiones son diferentes, si se multiplican los paréntesis entre ellos, se obtiene el polinomio entregado.

$$(2r^2 + 8)(2r - 2) = 4r^2 + 12r - 16$$

$$(r + 4)(4r - 4) = 4r^2 + 12r - 16$$

Lo que significa que un polinomio algebraico, es posible que sea factorizado de varias formas.

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

1. Multiplicamos el polinomio por el coeficiente que acompaña al término que contiene el mayor exponente.

2. Busco dos números que multiplicados me den el tercer término del polinomio y que sumados o restados me den el segundo término del mismo.

3. Simplifico los paréntesis por la cantidad que multiplicamos en el primer piso o por una multiplicación que la ser resuelta dé como resultado este cantidad.

Trabajo en grupo

Resuelvan los siguientes ejercicios:

a. $2x^2 + 3x - 2$

b. $3x^2 - 5x - 2$

c. $6x^2 + 7x + 2$

d. $5x^2 + 13x - 6$

e. $6x^2 - 5x - 6$

f. $12x^2 - x - 6$

g. $4a^2 + 15a + 9$

h. $10a^2 + 11a + 3$

i. $12m^2 - 13m - 35$

j. $20y^2 + y - 1$

Factorización completando trinomios cuadrados perfectos por adición y sustracción

Cuando vamos a factorizar un trinomio que sea cuadrado perfecto, lo primero que realizamos es comprobar efectivamente que sea TCP.

$$4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$2a^2 \qquad\qquad 3b^2$$
$$2(2a^2)(3b^2)$$
$$=12a^2b^2$$

Para saber si es un trinomio cuadrado perfecto, lo que hacemos es hallar las raíces del primer y segundo término, y el producto de las raíces por dos, deber ser igual al término de la mitad, si esto no sucede como en este caso, tendremos que completar el trinomio agregándole o quitándole el monomio que haga falta. En este caso podemos ver que para que el trinomio sea TCP, el término de la mitad debe ser $=12a^2b^2$, por lo tanto al término $8a^2b^2$, debemos sumarle $4a^2b^2$. De esta manera el procedimiento completo para la solución es:

$4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$

$=4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$ — Sumamos y restamos $4a^2b^2$

$=4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$ — Reducimos el término de la mitad y completamos el término de la mitad para que sea TCP

$=(2a^2+3b^2)^2-4a^2b^2$ Factorizamos

$=(2a^2+3b^2+2a^2b^2)\,(2a^2+3b^2-2a^2b^2)$ Sacamos la raíz de $4a^2b^2$ y la repartimos en cada uno de los términos sumándolo y restándolo pues se trata de una diferencia de cuadrados

$=(2a^2+2a^2b^2+3b^2)\,(2a^2-2a^2b^2+3b^2)$ Organizamos

Ejemplo 1

Desarrollo

$a^4-16a^2b^2+36b^4$

a^2 $6b^2$

$-2(a^2)(6b^2)$

$=-12a^2b^2$

$= a^4-16a^2b^2+36b^4+4a^2b^2-4a^2b^2$

$= a^4-12a^2b^2+36b^4-4a^2b^2$

$= (a^4-6b^2)^2-4a^2b^2$

$= (a^2-6b^2+2ab)\,(a^2-6b^2-2ab)$

$= (a^2-2ab-6b^2)\,(a^2+2ab-6b^2)$

Ejemplo 2

x^4+3x^2+4

x^2 2

$2(x^2)(2)$

$4x^2$

Desarrollo

$= x^4+3x^2+4+x^2-x^2$

$= x^4+4x^2+4-x^2$

$= (x^2+2^2)-x^2$

$= (x^2+2-x)\,(x^2+2+x)$

$= (x^2-x+2)\,(x^2+x+2)$

Ejercitemos lo aprendido

1. Si las siguientes expresiones representan áreas de algunos rectángulos, ¿Cuáles serían las dimensiones de los lados?

a. $a^4 + a^2 + 1$	b. $m^4 + m^2n^2 + n^4$	c. $a^2 + 2a + 9$
d. $a^4 - 3a^2b^2 + b^4$	e. $49 + 76n^2 + 64n^4$	f. $25a^4 + 54a^2b^2 + 49b^4$
g. $x^4 - 6x^2 + 1$	h. $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$	i. $144 + 23n^6 + 9n^{12}$
j. $x^2 + 20x + 64$	k. $x^2 + 22x + 72$	l. $x^2 - 6x + 5$
m. $x^2 - 16x + 55$	n. $x^2 + 24x + 63$	o. $x^2 - 30x + 200$
p. $x^2 + 16x + 55$	r. $x^2 - 24x + 63$	s. $x^2 + 30x + 200$

2. A partir del trinomio dado escoge el monomio que debe sumarse o restarse para que el trinomio dado de un trinomio cuadrado perfecto.

a. $36x^4 - 40x^2y^2 + 9y^4$	$-6x^2y^2$	$4x^2y^2$	$6x^2y^2$
b. $x^4 - 10x^2 + 9$	$4x^2$	$6x^2$	$-4x^2$
c. $121x^4 - 300x^2 + 169$	$28x^2$	$14x^2$	$-14x^2$
d. $y^4 - 4y^2 + 16$	$4y^2$	$8y^2$	$-4y^2$
e. $36x^2 + 30x + 9$	$36x$	$8x$	$6x$
f. $4x^2 - 20xy + 16y^2$	$12xy$	$-12xy$	$4xy$

Guía 14

Factorización de polinomios

Estándar:

Pensamiento variacional

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Lo que sabemos

En esta guía se analizarán el procedimiento que es aplicable a los polinomios, llamado factor común por agrupamiento de términos.

Aprendamos algo nuevo

Factor común por agrupamiento de términos

En ciertos casos cuando el polinomio que se va a factorizar no tiene factor común para todos sus términos, es necesario agruparlos, de acuerdo a términos comunes, de esta manera se podrá encontrar un factor común para cada agrupación. Por ejemplo cuando tenemos $ax + ay + bx + by$, lo primero que hacemos es en fijarnos que factores que sean comunes podemos encontrar en el polinomio y de esta manera organizarlo. Para este caso encontramos que el polinomio se encuentra ya organizado por términos comunes, $ax + ay$ y $bx + by$.

Cuando tenemos organizado este polinomio, procedemos a agrupar los términos identificados al comienzo, $= (ax + ay) + (bx + by)$ y hallamos el factor común de cada uno, $= a(x + y) + b(x + y)$, después agrupamos los términos que son comunes, $= (a + b)(x + y)$ y queda el polinomio factorizado.

$$\begin{aligned} &ax + ay + bx + by \\ &= (ax + ay) + (bx + by) \\ &= a(x + y) + b(x + y) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.

Factorizar $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$
$= 2x^2 - 4x - 3xy + 6y$
$= 2x(x - 2) - 3y(x - 2)$
$= (2x - 3y)(x - 2)$

Ejemplo 2.

Factorizar $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$
$= 3abx^2 - 2x^2 + 3aby^2 - 2x^2$
$= x^2(3ab - 2) + y^2(3ab - 2)$
$= (3ab - 2)(x^2 + y^2)$

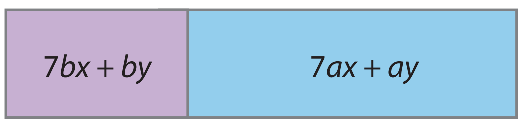
Ejemplo 3.

Factorizar $x + z^2 - 2ax - 2az^2$
$= x - 2ax + z^2 - 2az^2$
$= x(1 - 2a) + z^2\,(1- 2a)$
$= (x + z^2)(1 - 2a)$

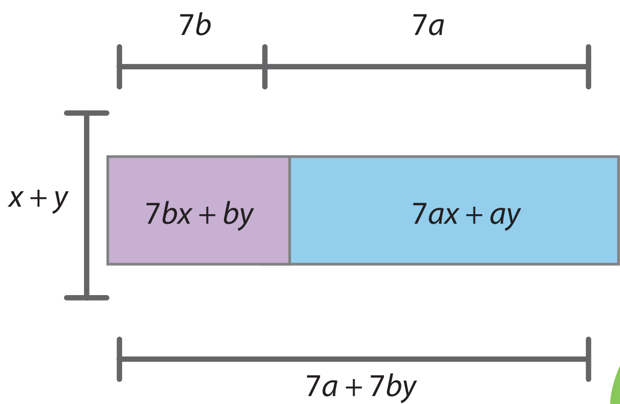
Ejemplo 4.

Factorizar $3ax - 3x + 4y - 4ay$
$= (3ax - 4ay) - (3x - 4y)$
$= a(3x - 4y) - (3x - 4y)$
$= (a - 1)(3x - 4y)$

Cuando trabajamos a partir de áreas de figuras, tenemos que analizar dos rectángulos de áreas y , de esta manera podemos construir el siguiente rectángulo:



Teniendo en cuenta el desarrollo anterior para la factorización de la expresión, tenemos que: $7ax + ay + 7bx + by$



La suma de las expresiones de las áreas, es la expresión del área del rectángulo grande

$$= 7a(x + y) + 7b\,(x + y).$$

Se factoriza teniendo en cuenta el factor que es común a cada expresión.

$$= (7a + 7b)\,(x + y)$$

Los factores que se obtienen, son los lados del rectángulo grande.

Ejercitemos lo aprendido

1. Factoriza cada polinomio.

   a. $3x^2 - 9ax - x + 3a$

   b. $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$

   c. $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^2$

   d. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$

   e. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$

   f. $6ax + 3a + 1 + 2x$

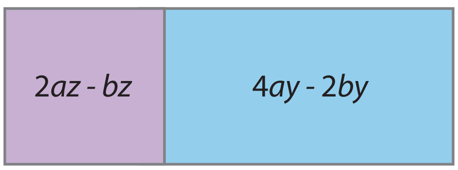
   g. $x^2 - a^2 + x - a^2x$

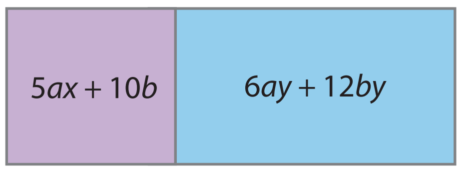
   h. $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$

   i. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$

   j. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$

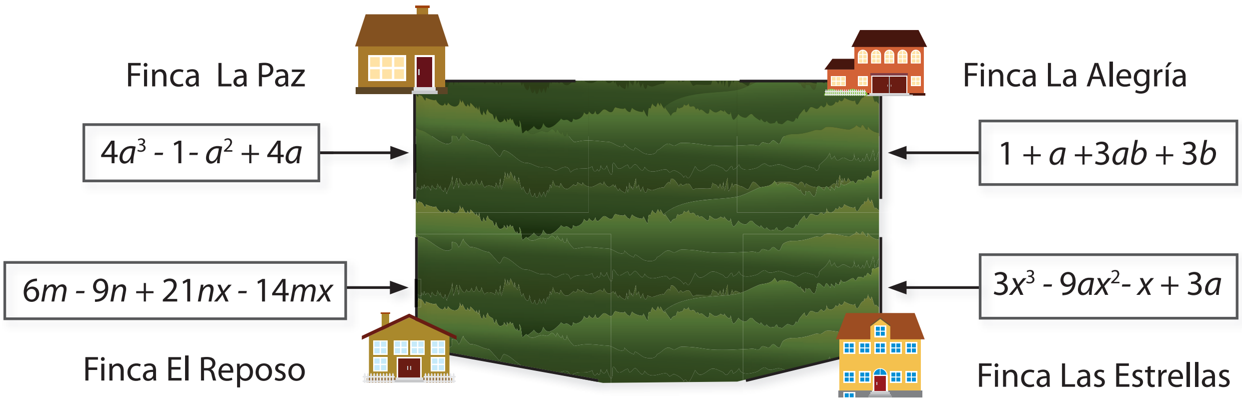
A partir de la expresión de cada rectángulo, expresa los factores que son los lados del mismo.





Apliquemos lo aprendido

El siguiente es el mapa de un terreno en el que hay 4 fincas que se comunican por caminos de herradura. Las diferentes expresiones representan las distancias que hay entre las fincas. Observar el mapa para contestar las preguntas propuestas



a. Los factores que representan la distancia que separa las fincas La Paz y Las estrellas son:

b. La expresión que representa la distancia que separa las fincas La Alegría y El Reposo se puede representar mediante dos factores utilizando el caso :

c. Los factores que determinan la distancia entre las fincas La Alegría y El Reposo son:

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

Completa los siguientes rectángulos con la expresión que falta para obtener la factorización.

$5x^2 + 9x - 2$ → $(5x - 1)$

$x^2 - x - 56$ → $(x - 8)$

$15x^3y^2 + 10x^2y^3 - 15x^2y^2z$ → $5x^2y^2$

$4a(x + b) - 3c(x + b)$ → $(4a - 3c)$

$16y^4 + 20y^2x^2 + 49x^4$ → $(4y^2 + 7x^2 + 6xy)$

$125x^3 - 8y^3$ → $(5x - 2y)$

$4y^2 - 25x^2z^6$ → $(2y - 5xz^3)$

Halla el cuadrado de cada término

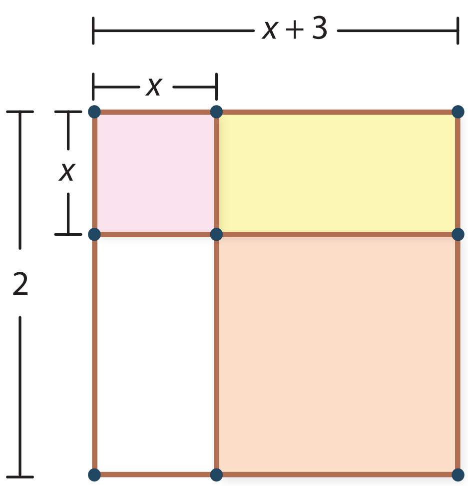
Término	Cuadrado
x	
m^4	
$15a^7$	
$10c^4$	

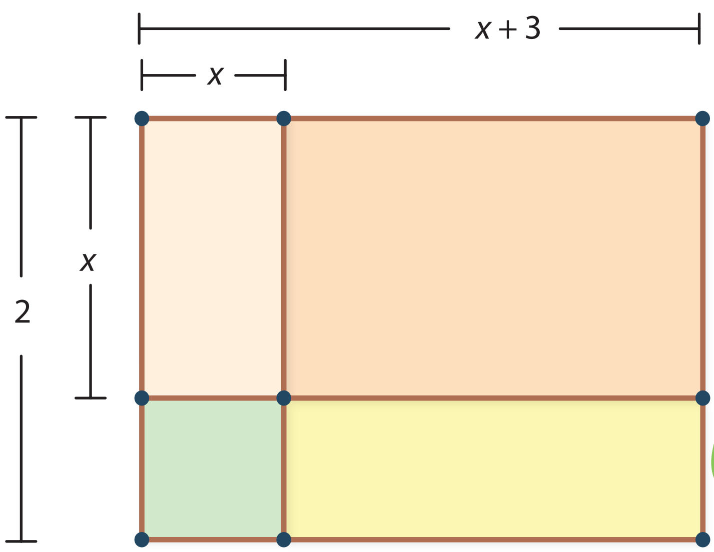
Explica los pasos que permitieron factorizar la expresión:

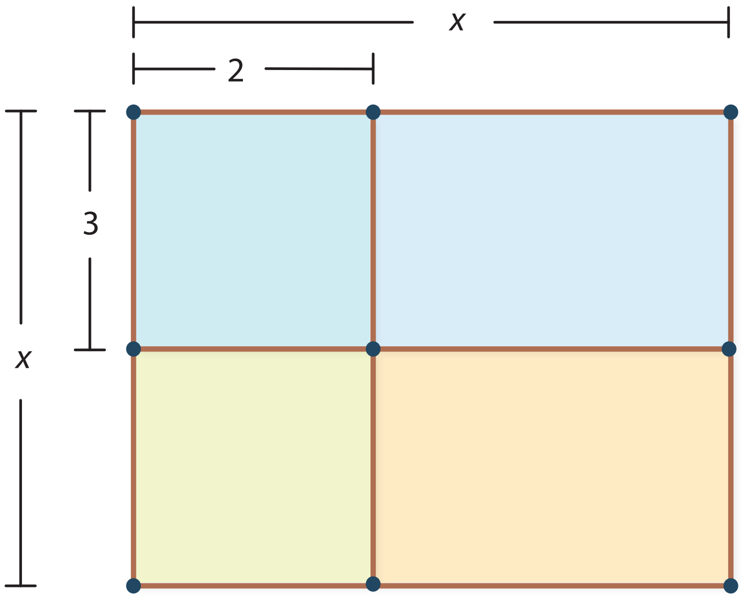
$$5ax + 10bx + 6ay + 12by$$
$$(5ax + 6ay) + (10bx + 12by)$$
$$a(5x + 6y) + 2b(5x + 6y)$$
$$(5x + 6y)\,(a + 2b)$$

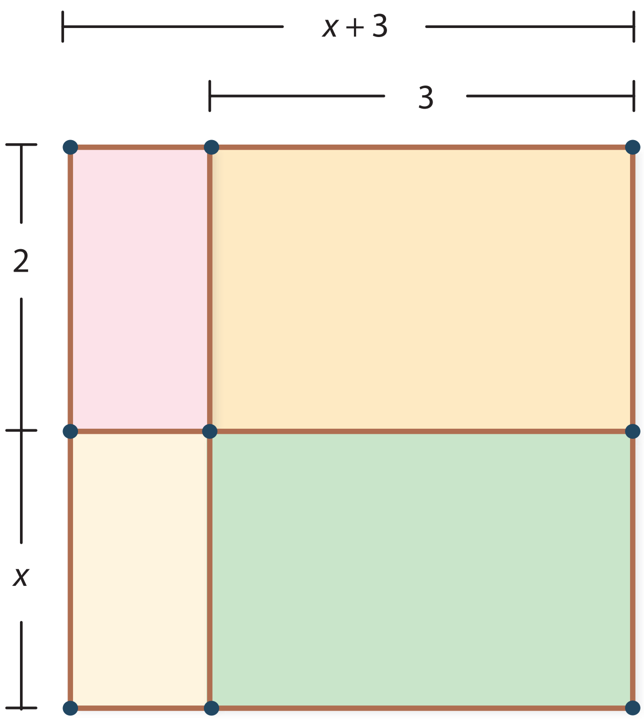
¿Cómo me ven los demás?

Reúnete con otro compañero y realicen las siguientes figuras, en cartulina y luego determinen: ¿Cuál es la figura que representa el producto $(x + 2)\,(x + 3)$?






x
2
3
x


x + 3
3
2
x

1. Cada uno resuelve la situación y realiza en cartulina la figura que cumpla con las condiciones.

2. Luego la expondrá a su compañero y se llegará a las conclusiones necesarias para determinar ¿Cuál figura es la adecuada para la situación?

3. Luego presenten las conclusiones al grupo de clase.

4. Evalúen el desempeño de cada uno de los integrantes del grupo en la actividad realizada, teniendo presente si manejan los conceptos tratados. Luego compartan esa evaluación con el maestro y el resto de la clase. Propongan estrategias para reforzar los aspectos que consideren deben mejorar.

¿Qué aprendí?

	Sí	A veces	No	Justificación
Identifico el procedimiento para resolver binomios.				
Factorizo los trinomios según sus características.				
Factorizo polinomios que cumplan con la agrupación de términos.				
Resuelvo un trinomio por adición y sustracción.				
Identifico y factorizo los polinomios que presentan las características de la diferencia de cuadrados.				

Con tu maestro, determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento.

Módulo 4

Algunas relaciones y propiedades entre figuras

¿Qué vas a aprender?

En nuestro entorno encontramos diversas figuras geométricas, algunas de ellas son regulares pero otras no lo son, y por lo tanto para poder realizar el cálculo sobre ellas, debemos recurrir a formas conocidas. Una de estas formas son los triángulos, ya que podemos ver todas las figuras geométricas como la composición de varios triángulos. Por ejemplo, ¿has observado los panales de las abejas y los depósitos que construyen para la miel? Bien, las abejas almacenan su miel en orificios construidos en forma hexagonal, para poder deducir algunos aspectos de estos podemos ver el hexágono como la composición de varios triángulos congruentes, es decir, de la misma forma y tamaño. Pero no todos los hexágonos son del mismo tamaño, en otros casos, podemos encontrar figuras geométricas que tienen la misma forma de otras pero de diferente tamaño; se conoce como semejanza.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento numérico

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

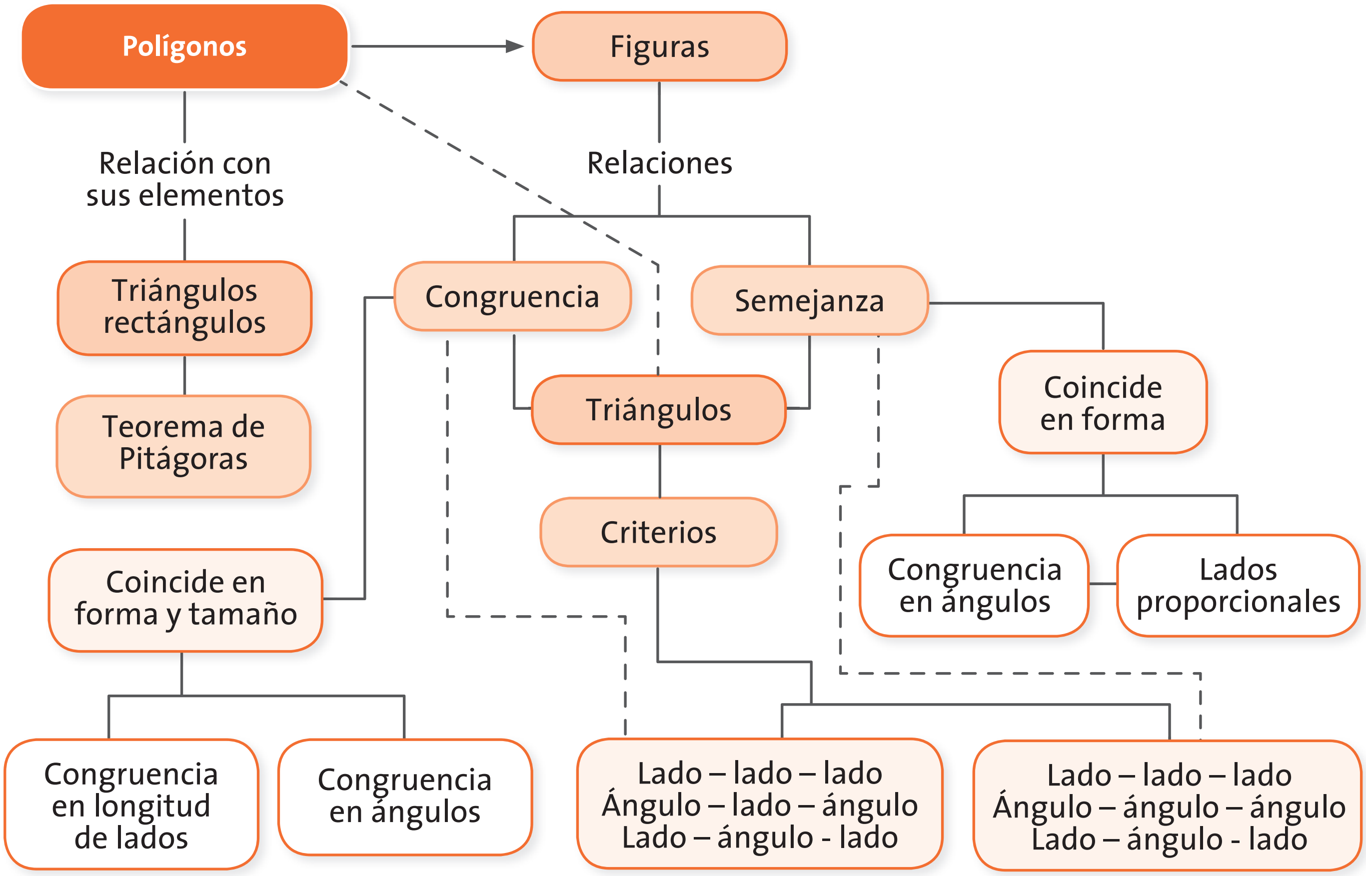
Pensamiento Espacial

- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).

La realización de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo te permitirá alcanzar estándares básicos de competencias que privilegian el desarrollo del pensamiento matemático, a través de los conceptos asociados a la semejanza, congruencia de triángulos y el teorema de Pitágoras.

Guías	Conceptos	Procesos
Guía 15. Los criterios para determinar congruencia entre figuras	**Congruencia de triángulos**	• Se favorece el proceso de **comunicación,** al involucrar los criterios de semejanza y congruencia en los argumentos que emplean los estudiantes en su discurso para explicar una situación. • Del mismo modo, se propicia el proceso de **comunicación** al reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en la demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). • Se propicia el ambiente para desarrollar el proceso de **resolución y formulación de problemas,** al desarrollar ejercicios aplicados que requieren del uso de los criterios de semejanza y congruencia para su solución. • Se favorece también el proceso de **resolución de problemas,** al entender las relaciones que existen entre las figuras con las cuales se realiza la demostración de un teorema, y el proceso de **razonamiento** cuando se emplea lo aprendido como argumento que apoya posiciones o puntos de vista respecto a un tema o ejercicio en particular. • Se favorecen los procesos de **comparación y ejercitación de procedimientos** cuando se emplea el teorema de Pitágoras y el de Tales en diferentes contextos para realizar modelos de diferentes situaciones, donde su solución se encuentra al identificar y determinar magnitudes desconocidas de triángulos rectángulos.
Guía 16. Los criterios para determinar semejanza entre triángulos	**Semejanza de triángulos**	
Guía 17. El teorema de Pitágoras	**Aplicación del Teorema de Pitágoras**	



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Los criterios de semejanza te permiten comparar objetos de igual forma pero con diferente tamaño y establecer entre ellos magnitudes proporcionales. Por ejemplo, puedes tener objetos de gran tamaño que no puedes estudiar directamente, no obstante un modelo a escala te permite hacerlo, ya que tu atención está fija sobre las propiedades del objeto sin involucrar su tamaño. Luego, si quieres realizar cálculos de objetos de gran tamaño puedes establecer correspondencias entre el objeto a escala y el objeto real, empleando para ello la proporcionalidad entre cada una de sus magnitudes.

Los criterios de congruencia te permiten deducir cuándo dos triángulos son de igual forma y tamaño, para poder estimar valores desconocidos o para poder demostrar la igualdad entre dos figuras empleándolos en tus razonamientos y en tus argumentos.

El triángulo rectángulo se encuentra presente de muchas formas y resulta muy útil para poder calcular alturas inaccesibles y distancias entre dos puntos, entre otras cosas. Para ello se emplea el teorema de Pitágoras, una relación importante en dichos triángulos.

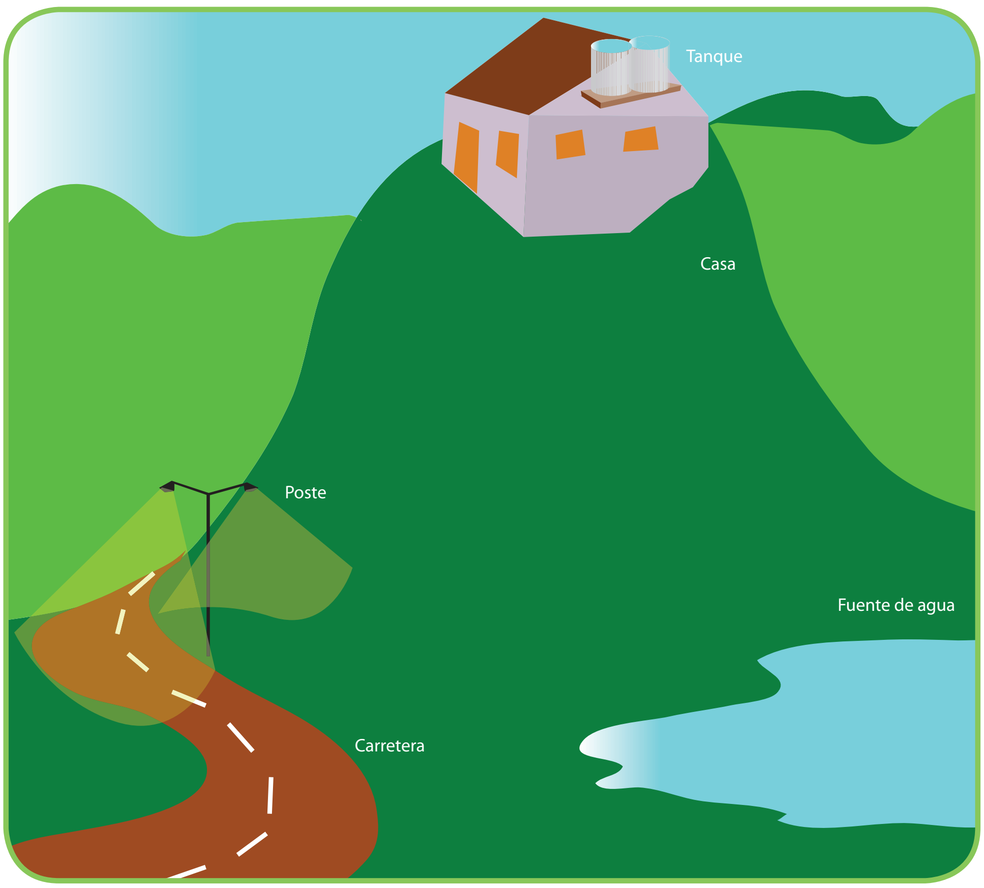
¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En cada una de la guías tienes tres momentos de reflexión individual, el primer momento te invita a reconocer los conocimientos previos que de una u otra manera has adquirido sobre el tema tratado, mostrándote situaciones en las cuales se hace necesario que demuestres tu ingenio para la resolución de cada uno de los problemas; un segundo momento te permite analizar el proceso que estás llevando con cada una de las situaciones, enseñándote otras maneras de solucionarlas o formalizando las ya conocidas.

El tercer momento pone a prueba lo aprendido en el momento anterior, invitándote a que compartas las estrategias de solución con tus compañeros y maestros, para que las justifiques y dado el caso, las modifiques con los aportes que realizan tus compañeros.

Adicionalmente, al final del módulo encontrarás una evaluación que será desarrollada con los conceptos que has adquirido por la experiencia en el desarrollo de este tipo de situaciones en las etapas anteriores.

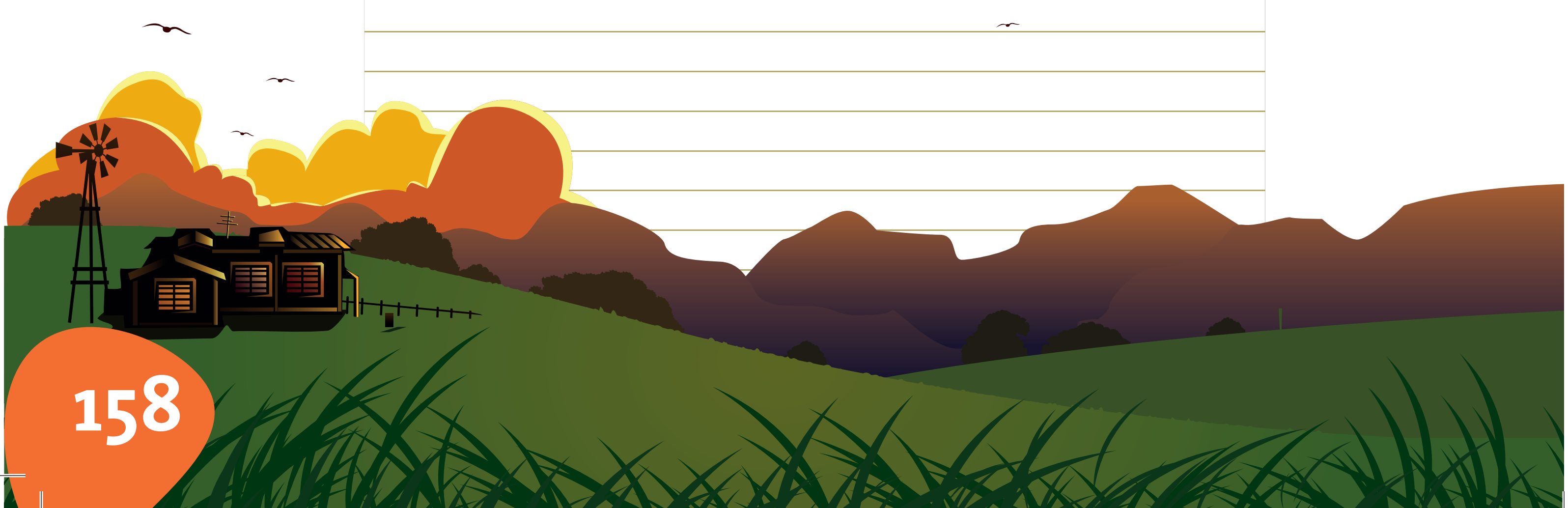
Explora tus conocimientos



Antonio compró un terreno de varias fanegadas y piensa en sembrar la mayor parte del área y construir su casa en la cima de una loma para no tener problemas con la humedad.

Al alrededor del terreno se encuentran los postes de energía eléctrica y planea solicitar que le lleven el servicio de energía hasta su casa, con ello puede conectar la bomba que llevaría el agua hasta el tanque que dejará en lo alto de su casa.

- ¿Qué estrategia puede emplear Antonio para saber la cantidad de cable que necesitará para llevar la energía?
- ¿Qué estrategia puede emplear Antonio para saber los metros de tubería que serán necesarios para llevar el agua a su casa?
- El método que propones para conocer la cantidad de cable que se utilizará, ¿se puede emplear para determinar los metros de tubería que gastará llevar el agua a su casa? Justifica tu respuesta.
- ¿Cómo puede Antonio determinar la altura de la loma con respecto a la carretera?



Guía 15

Los criterios para determinar congruencia entre figuras

Estándar:

Pensamiento espacial

- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

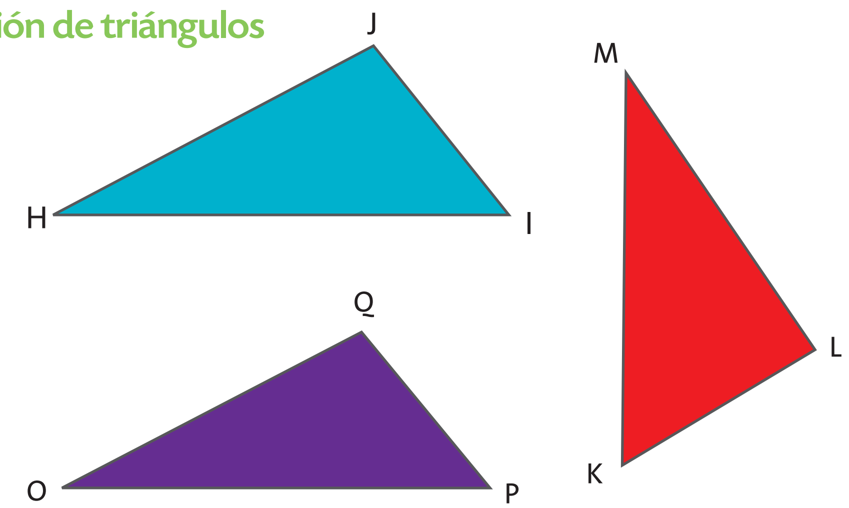
Lo que sabemos

En muchas ocasiones nos encontramos ante la necesidad de construir cosas que sean "iguales" a otras, no obstante, esa igualdad a la que nos referimos suele ser porque coinciden en su forma y en su tamaño; aparte de ello, tienen las mismas características. Es lo que sucede con las fábricas de objetos a gran escala, como la producción de computadores con determinadas características, grandes cantidades de tela, botones, lápices, cuadernos, entre otros. Todos exigen que sean iguales. En el mundo de la geometría dicha igualdad es conocida como congruencia.

En esta guía abordaremos los criterios que se establecen entre los triángulos para determinar su congruencia.

Observa con atención los siguientes triángulos.

Comparación de triángulos



- ¿Cuáles de esos triángulos consideras que tienen la misma forma?
- ¿Cuáles de esos triángulos consideras que tienen el mismo tamaño?
- ¿Cuáles triángulos coinciden tanto en forma como en tamaño?
- Revisa qué relaciones hay entre la longitud de los lados y los ángulos para que coincidan tanto en tamaño como en forma.
- Dibuja un triangulo equilátero de 10 cm de lado, luego compáralo con el de tus compañeros.

Aprendamos algo nuevo

Trabajo en grupo

Reúnete en grupo y resuelve la siguiente situación:

Comparación de billetes

Con el fin de recolectar fondos, una comunidad organizó un bazar. Buscando la co-

A.

B.

C.

D.

E.

F.

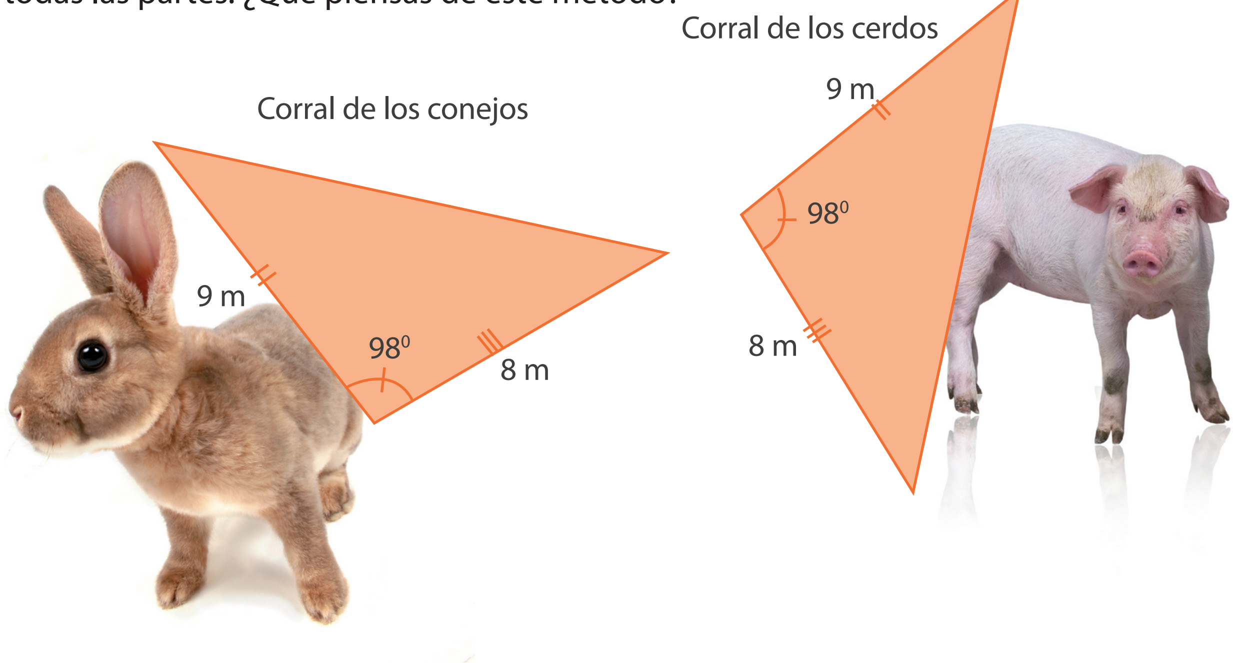
modidad de los asistentes, se diseñó un billete con el cual realizarían las compras de los productos que allí se venderían. El billete lleva en su diseño tres símbolos importantes para la comunidad; el árbol que representa su sentido ecológico, el tractor que simboliza la dedicación y el trabajo y la pirámide que simboliza la unidad entre los miembros de la comunidad. Antonio tiene varios billetes, pero algunos de ellos son falsos. ¿Cuáles?

- Enuncien los aspectos o características que revisan para saber que esos son realmente los billetes falsos.
- ¿Qué tan importante fue la forma de los símbolos en los billetes?
- ¿Qué tan importante fue el tamaño de los símbolos en los billetes?
- Socialicen el resultado del trabajo ante al curso.

1. En una finca quieren ubicar a los conejos y a los cerdos en unos corrales de tal forma que tengan la misma área y de forma triangular. ¿Cómo se puede ver que los croquis presentados por un arquitecto cumplen con los requisitos? Contesta la anterior pregunta formulando tus propias conjeturas sin escribir nada en el cuaderno. Compártelas con tus compañeros de clase.

Disposición de los corrales

El dueño de la finca recortó los croquis de los corrales y se dio cuenta que coinciden en todas las partes. ¿Qué piensas de este método?



Siempre que dos figuras coinciden en todas sus partes cuando se colocan una sobre otra se puede afirmar que son congruentes.

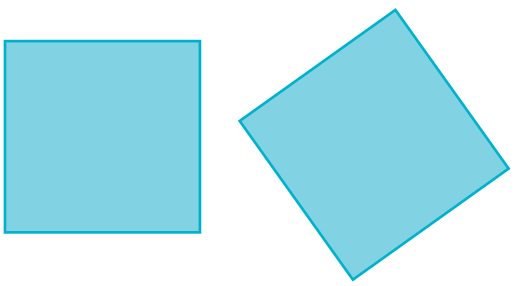
Son figuras congruentes las que coinciden en tamaño y en forma.

La congruencia entre dos figuras se representa con el signo $\cong$.

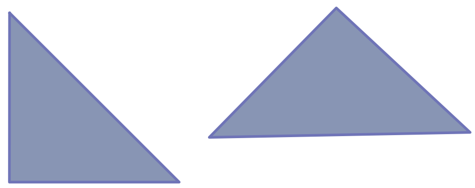
- Determina si las siguientes figuras son congruentes; utiliza la técnica de colocar una sobre la otra. Utiliza papel calcante para verificar su coincidencia.

a.

b.



c.



Este procedimiento es adecuado cuando las figuras tienen tamaños pequeños que podemos manipular. Pero si las figuras son demasiado grandes debemos generar otros procedimientos.

¿Cómo establecer que dos figuras geométricas son congruentes, sin realizar la manipulación para ver que coincidan?

En el caso de segmentos o ángulos se puede decir que son congruentes porque tienen la misma medida. ¿Será que sólo con la medida de las longitudes de los lados se puede afirmar que los triángulos son congruentes?

- Socializa tu respuesta a los compañeros del curso.

- Comprueben su respuesta realizando los dibujos de los siguientes triángulos, cada uno realiza el triángulo luego los comparan con tres compañeros. Los triángulos tienen las siguientes longitudes:

  a. 5 cm, 2 cm y 4 cm, respectivamente

  b. 6 cm, 6 cm y 6 cm, respectivamente

  c. 8 cm, 4 cm y 5 cm, respectivamente

  d. 6 cm, 4 cm y 7 cm, respectivamente

- ¿Todos los triángulos que tienen las mismas longitudes coincidieron en el curso?

Por lo tanto, es posible afirmar que cuando se tienen dos triángulos que coinciden en las medidas de sus lados se puede determinar que son triángulos congruentes.

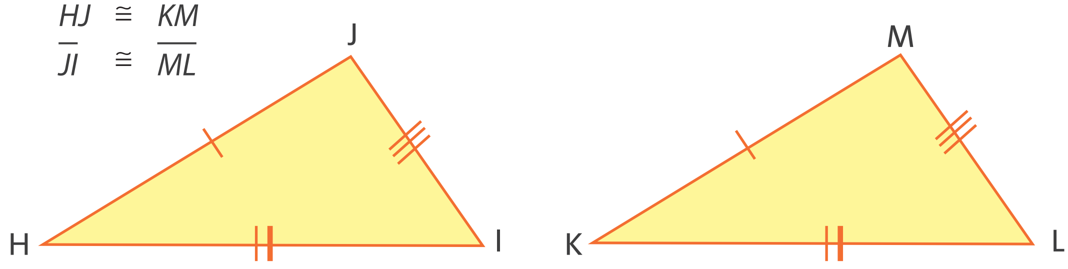
Este es un criterio conocido en la congruencia de los triángulos como: LADO-LADO-LADO y se simboliza **(L-L-L).**

Lados de un triángulo

$\overline{HI} \cong \overline{KL}$

$\overline{HJ} \cong \overline{KM}$

$\overline{JI} \cong \overline{ML}$



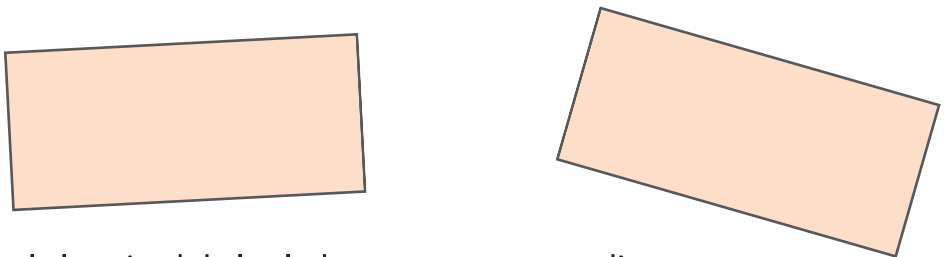
Para mostrar este criterio, trasladamos el triángulo HIJ, sobre el triángulo KLM, luego sus lados coinciden porque $\overline{HI} \cong \overline{KL}$; $\overline{HJ} \cong \overline{KM}$; $\overline{JI} \cong \overline{ML}$. Luego podemos observar que $\angle H \cong \angle K$; $\angle I \cong \angle L$; $\angle J \cong \angle M$, entonces, como todos los elementos del triángulo HIJ coinciden con los elementos del triángulo KML, los triángulos son congruentes.

Dos triángulos son congruentes cuando los tres lados de uno de ellos son respectivamente congruentes con los tres lados del otro triángulo.

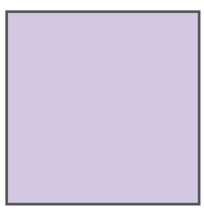
- ¿Será que sucede lo mismo con los cuadriláteros? ¿Siempre que coincidan en la longitud de los lados estos serán congruentes?
- Comprueba tu respuesta dibujando dos cuadriláteros cuyos lados midan 3 cm, 4 cm, 5 cm y 11 cm, respectivamente.
- ¿Coincidieron?
- Cambia el orden de las medidas de los lados en uno de los cuadriláteros dibujados, ¿éste será congruente a uno o ambos de los cuadriláteros dibujados?
- Socializa la respuesta con tus compañeros del curso y realicen varias propuestas para que se vean cuáles serían las condiciones mínimas para que todos dibujaran el mismo cuadrilátero. Compruébelas y ajústenlas para que se construya el mismo cuadrilátero.

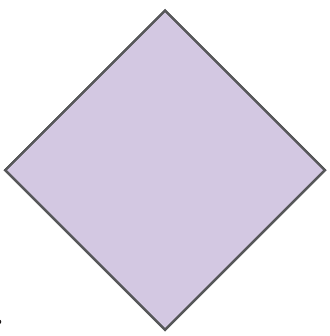
Analicen los siguientes cuadriláteros para determinar si son congruentes y observen si la condición es suficiente y necesaria para que se dé ese caso de congruencia.

A. Coinciden en la longitud de los lados pero estos no son correspondientes.

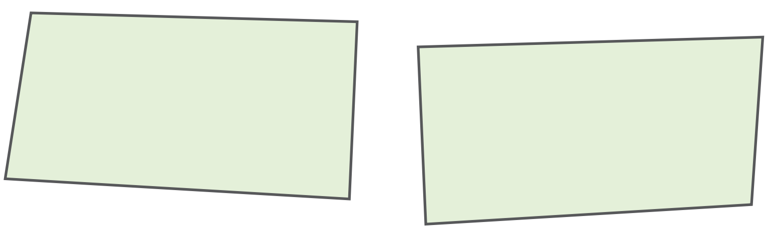


B. Coinciden en la longitud de los lados y son correspondientes.



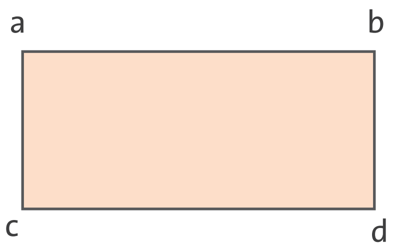


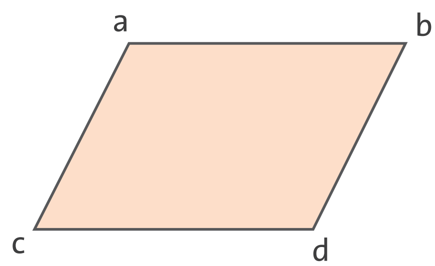
C. Coinciden en dos lados y el ángulo entre ellos.



Determinar las condiciones mínimas para que todos realicen el mismo cuadrilátero hizo que se pensará en determinar triángulos en ellos para que fuera más fácil su estudio frente a la congruencia y otras relaciones con otros triángulos.

- Determina dos triángulos en cada uno de los siguientes cuadriláteros.





Con dicho procedimiento, se generaron otros criterios que se asocian a los triángulos y son los que permiten, a través del procedimiento de triangulación, determinar que otros polígonos sean congruentes.

Dichos criterios de congruencia son:

(L-A-L) lado – ángulo – lado

Se establece que al analizar un ángulo y los lados que forman ese ángulo y este ángulo forma parte de un triángulo y al comparar con otro triángulo; y coincide dicho ángulo con sus respectivos lados en este nuevo triángulo entonces podemos decir que son triángulos congruentes.

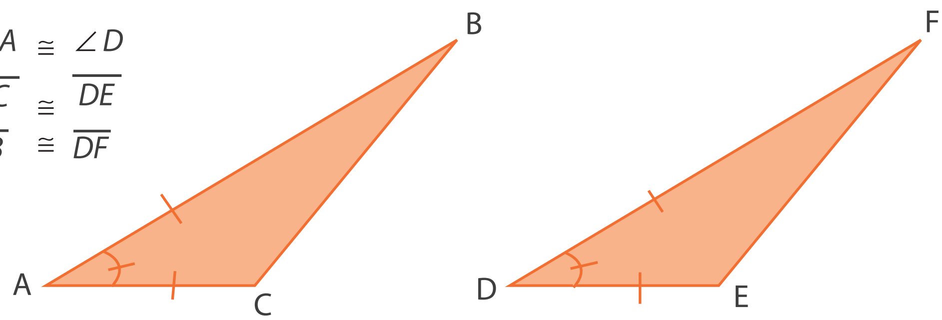
Observa la gráfica que representa el criterio:

Relaciones de los lados de un triángulo

$\angle A \cong \angle D$

$\overline{AC} \cong \overline{DE}$

$\overline{AB} \cong \overline{DF}$



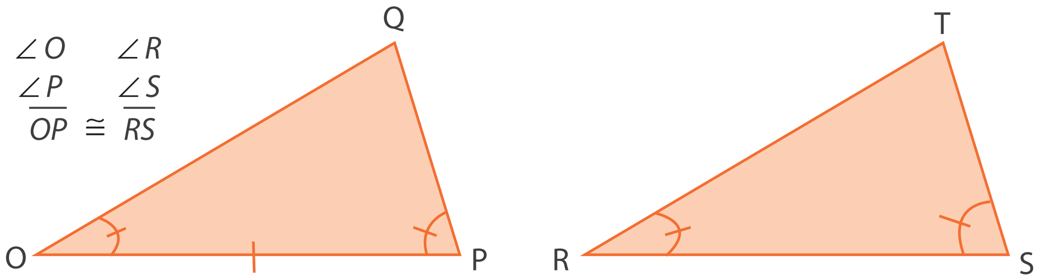
Para mostrar este criterio, trasladamos el triángulo *ABC*, sobre el triángulo *DFE* de manera que el $\angle A$ coincida con el $\angle D$. Luego el vértice *B* coincide con el vértice *F*, porque $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, de igual forma, el vértice *C* coincide con el vértice *E* porque $\overline{AC} \cong \overline{DE}$. Finalmente, $\overline{BC}$ coincidirá con $\overline{FE}$ porque dos puntos determinan un segmento. Como, todos los elementos del triángulo *ABC* coinciden con todos los elementos del triángulo *DFE*, entonces los triángulos son congruentes.

Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos lados correspondientes congruentes y el ángulo que forman esos lados también es congruente.

(A-L-A) ángulo – lado – ángulo

Se establece que al analizar dos ángulos que comparten un lado y que forman parte de un triángulo y al comparar con otro triángulo los correspondientes a esos lados y a ese ángulo sucede que coinciden en sus valores; entonces se puede afirmar con seguridad que son triángulos congruentes.

Relaciones de los lados de un triángulo



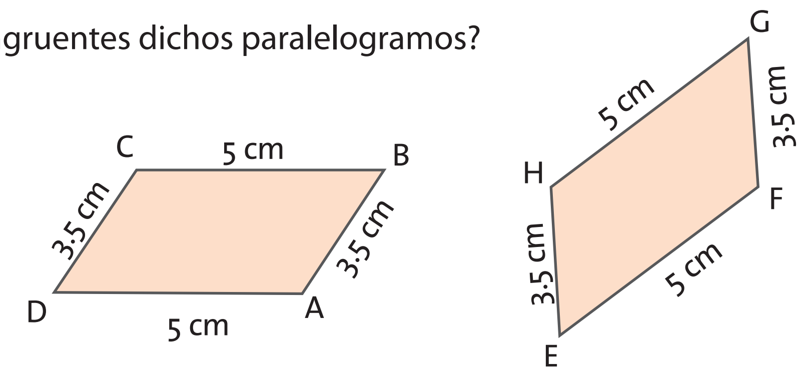
Para mostrar este criterio, trasladamos el triángulo *OPQ*, de tal manera que el $\angle$O coincida con el $\angle R$, y el lado $\overline{OP}$ coincida con el lado $\overline{RS}$. Luego el vértice *P* coincide con el vértice *S*, porque $\overline{OP} \cong \overline{RS}$ y el lado $\overline{PQ}$ coincide con el lado $\overline{ST}$, porque el $\angle P \cong \angle S$, de igual forma, el lado $\overline{OQ}$ coincide con el lado $\overline{RT}$, porqué el $\angle 0 \cong \angle R$. Entonces, podemos concluir que el vértice *Q* coincide con el vértice T. Finalmente, todos los elementos del triángulo *OPQ* coinciden con todos los elementos del triángulo *RST*, entonces los triángulos son congruentes.

Dos triángulos son congruentes cuando tienen respectivamente congruentes un lado y los dos ángulos que se forman en sus extremos.

Es así que los criterios de congruencia de los triángulos que nos sirven para determinar de otros polígonos que son congruentes.

- Estudia el siguiente ejemplo de aplicación de los criterios de congruencia de los triángulos.

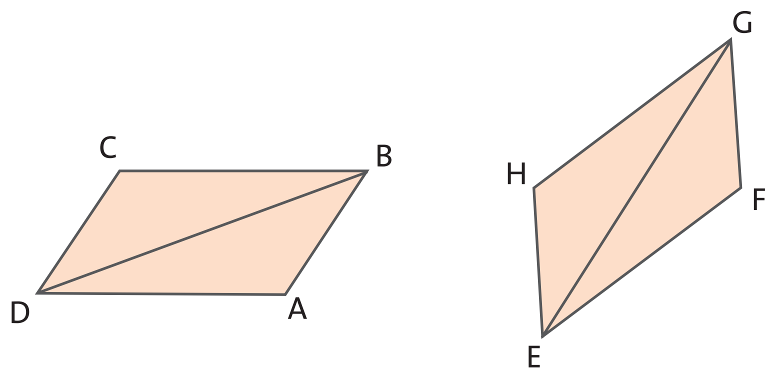
  ¿Son congruentes dichos paralelogramos?



Primero revisamos cuáles son los segmentos correspondientes:

$\overline{DC}$ es correspondiente a $\overline{EH}$
$\overline{CB}$ es correspondiente a $\overline{HG}$
$\overline{BA}$ es correspondiente a $\overline{GF}$
$\overline{AD}$ es correspondiente a $\overline{FE}$

Si realizamos la correspondiente triangulación a cada figura tendríamos:



Del cuadrilátero *ABCD*, se determinan los triángulos *ABD* y *BCD*. Estos triángulos son congruentes por el criterio L-A-L ya que el lado *CD* corresponde al lado *AB* tienen la misma medida, el lado *CB* corresponde al lado *AD* tienen la misma medida; así mismo, las medidas de los ángulos opuestos son congruentes ya que el ángulo *C* tiene el mismo valor del ángulo *A*. Por tanto los triángulos son congruentes.

El mismo análisis se realiza para los triángulos *EFG* y *EHG* para determinar que son congruentes. Entonces el analizar sólo un par de triángulos correspondientes de un cuadrilátero con el de otro podemos afirmar con seguridad que dichos cuadriláteros sean congruentes.

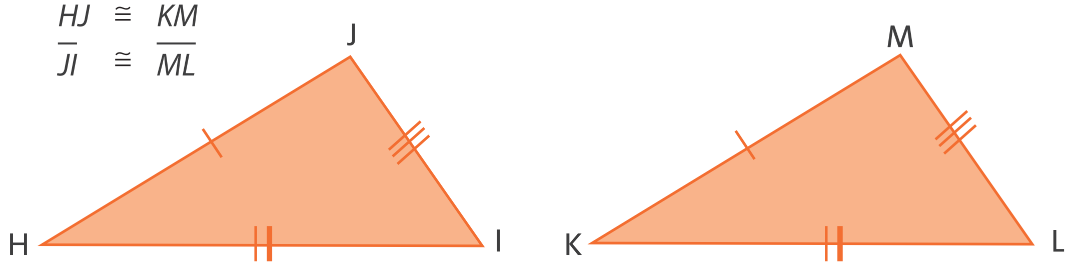
Analicemos de nuevo el triángulo *BCD* con su correspondiente triángulo *EHG*. Si utilizamos el criterio L-A-L tendríamos que coinciden las medidas de los lados *BC* con *GH* y lo mismo sucede con las medidas de los lados *CD* con *HE*; como ya comprobamos que el ángulo *C* con respecto al ángulo *H* tiene la misma medida por la anterior relación. Por tanto, dichos ángulos son congruentes.

Es decir, como dichos triángulos son congruentes y estos triángulos son congruentes a los otros que forman parte del paralelogramo. Entonces dichos paralelogramos son congruentes.

$\overline{HI} \cong \overline{KL}$

$\overline{HJ} \cong \overline{KM}$

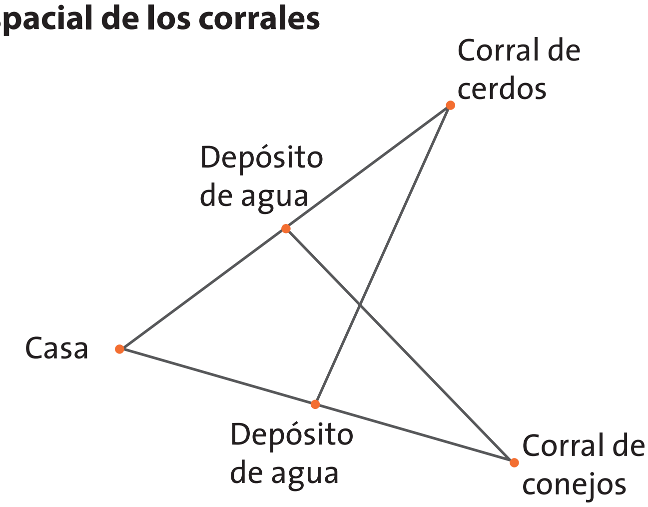
$\overline{JI} \cong \overline{ML}$



Ejercitemos lo aprendido

1. Por su comodidad, Antonio, ubicó el corral de cerdos y la conejera a la misma distancia de su casa, pero, en puntos diferentes. En el punto medio de cada uno de los caminos, ubicó un depósito de agua, como se muestra en la figura. Antonio afirma, que si sale de su casa, hacia el corral de cerdos y de allí a la conejera, recorrerá la misma cantidad de metros que, si lo hace de su casa a la conejera y de allí al corral de cerdos.

1ra disposición espacial de los corrales



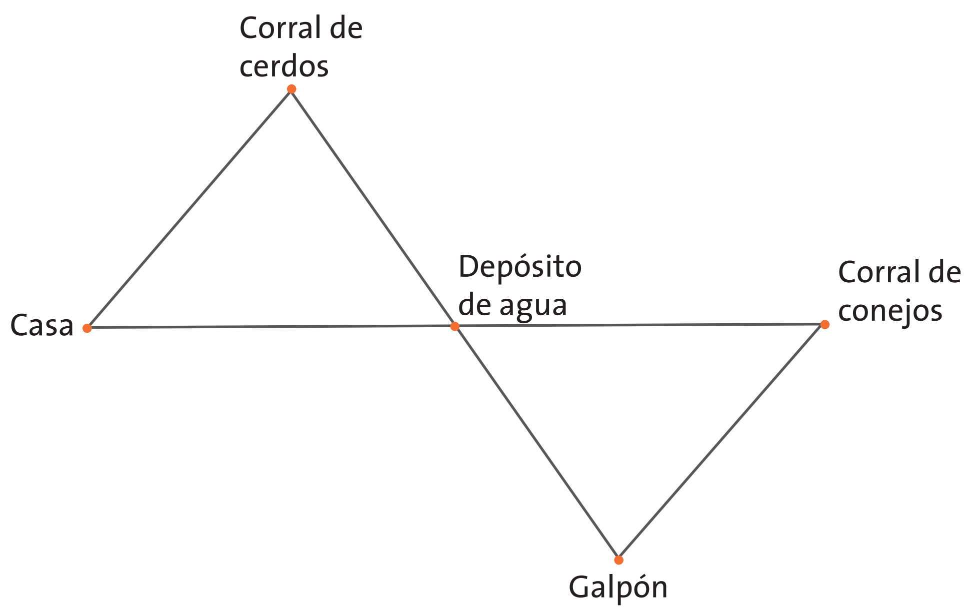
a. ¿Es cierta la afirmación de Antonio? Justifica tu respuesta

b. ¿Qué otros recorridos de la misma distancia, se pueden hacer en la finca? Descríbelos y justifica tu respuesta.

c. En los recorridos se definen triángulos congruentes. Justifica dicha congruencia desde la aplicación de algún criterio.

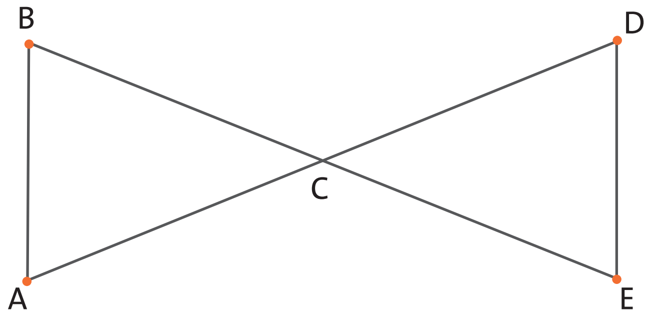
2. Para obtener mayores beneficios económicos, Antonio, decide construir un galpón, ubicando un sólo depósito de agua en el punto medio entre la casa y la conejera, como se muestra en la figura. Con esto, Antonio asegura que la distancia de la casa al corral, será la misma que entre el galpón y la conejera.

2da disposición espacial de los corrales

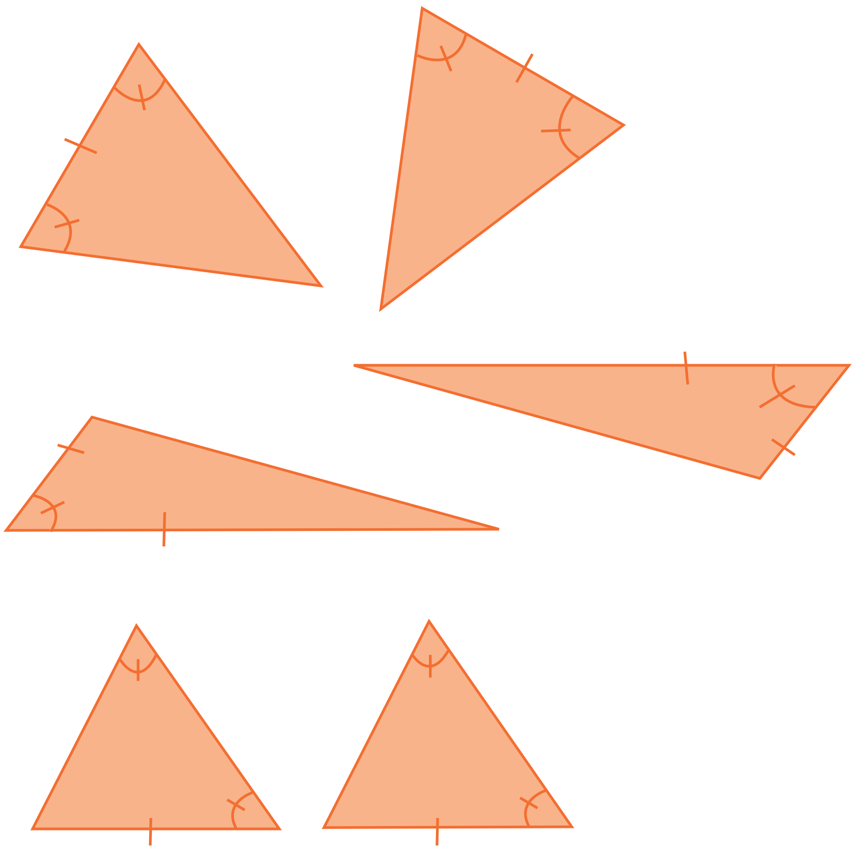


- ¿Es cierta la afirmación de Antonio? Justifica tu respuesta desde la aplicación de los criterios de congruencia de los triángulos.

3. Muestra, empleando los criterios de congruencia, que el triángulo *ABC* es congruente con el triángulo *CDE*, si se sabe que *C* es el punto medio de $\overline{AD}$ y de $\overline{BE}$.



4. De los pares de triángulos que se muestran a continuación determina qué pareja de triángulos son congruentes y explica el criterio que utilizaste para llegar a esta conclusión.



Guía 16

Los criterios para determinar semejanza entre triángulos

Estándar:

Pensamiento espacial

Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

La proporcionalidad se hace presente en la geometría a través de la semejanza, la cual permite calcular distancias de objetos cuyas medidas son imposibles de medir como la distancia de la Luna a la Tierra; o para hacer productos en cadena pero diferente tamaño como los televisores de diversos tamaños en pulgadas.

Lo que sabemos

Se quiere reducir a la mitad el tamaño del billete diseñado para el bazar. Si el tamaño actual es el que se muestra en la siguiente figura:

- Dibuja el billete del tamaño que quedaría si se reduce a la mitad.
- Dibuja por aparte el símbolo ecológico y el de unión de la comunidad en su nuevo tamaño.
- ¿Se puede afirmar que el billete con su tamaño original con respecto al billete con su tamaño reducido son parecidos? Justifica tu respuesta.

Une con una línea los triángulos que tienen igual forma.

Diversos tipos de triángulos

- Compara tus resultados con los de tus compañeros.

- ¿Qué procedimiento empleaste para determinar cuáles de los triángulos tienen igual forma?

Trabajo en grupo

Reúnete con cuatro compañeros en un lugar soleado. Lleven una cinta métrica y un palo de 1 m de altura. Determinen con la cinta métrica la altura de la sombra del palo y la de cada uno de los compañeros.

- Completen la siguiente tabla:

Registro de alturas

Nombre	Estatura real (cm)	Medida de la altura de la sombra (cm)	$\frac{\text{Estatura}}{\text{Medida de la sombra}}$

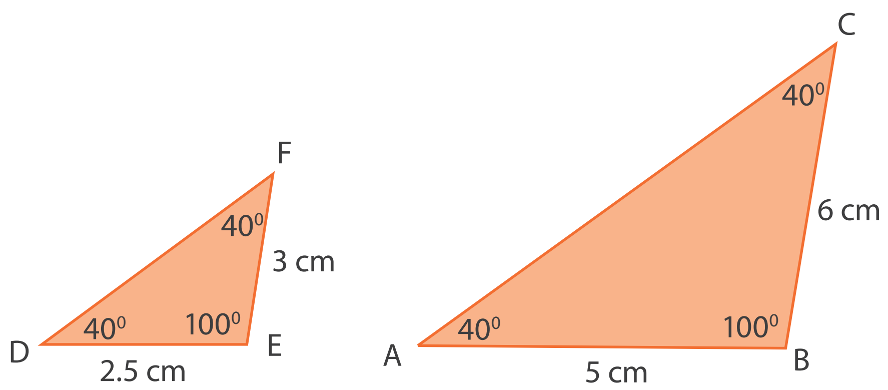
- ¿Cuál fue la medida, en centímetros, de la altura de la sombra del palo?

- ¿Cuál es el cociente entre la medida de la altura del palo y la medida de la altura de su sombra?

- ¿Puedes observar que el valor de ese cociente se parece al valor escrito de los cocientes de la tercera columna de la tabla?

- Hasta este momento hemos comparado las longitudes entre objetos que tienen la misma forma pero que difieren en su tamaño. Estas figuras son conocidas como semejantes si guardan una relación de proporcionalidad entre sus longitudes.

- Observa con atención los siguientes triángulos:



- ¿Qué es lo congruente en los triángulos los lados o los ángulos?

- Establece razones entre los lados del triángulo DEF con los lados del triángulo ABC.

- ¿Se puede establecer una proporción entre esas razones? Escribe dicha proporción.

- Si se calcula el cociente de las razones ¿dicho valor es el mismo?

Aprendamos algo nuevo

Semejanza de triángulos

Como observaste, los triángulos anteriores tienen sus ángulos correspondientes congruentes, pero sus lados correspondientes son diferentes. Tienen una relación de proporcionalidad porque se puede obtener una constante proporcional.

En la figura anterior, el triangulo *DEF* es semejante al triángulo *ABC* y lo simbolizamos como $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ porque cumple con dos condiciones:

1. Los ángulos correspondientes son congruentes.

2. Los lados correspondientes son proporcionales.

En el ejemplo anterior, el ángulo *E* es congruente con *B* ($\angle E \cong \angle B$), $< D$ es congruente con $< A$ y $< F$ es congruente con $< C$. Los lados son proporcionales porque todas las razones dan el cociente 0,5 o $\frac{1}{2}$.

DE es a *AB* como 2,5 es a 5.

EF es a *BC* como 3 es a 6.

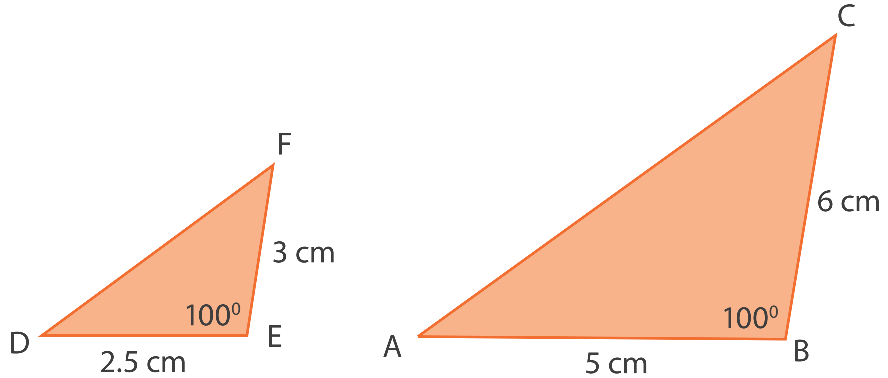
Para determinar cuándo dos triángulos son semejantes se deben verificar las dos condiciones anteriores. Además existen unos criterios cuya verificación garantizan la semejanza de los triángulos.

Criterios de semejanza

Primer criterio: (LAL) Lado – Ángulo – Lado

Se toma un ángulo y sus correspondientes lados de un triángulo y se comparan con el ángulo correspondiente y sus lados en el otro triángulo. Si se puede establecer una proporción con las longitudes de los lados y la medida del ángulo es la misma se puede afirmar que los triángulos son iguales.

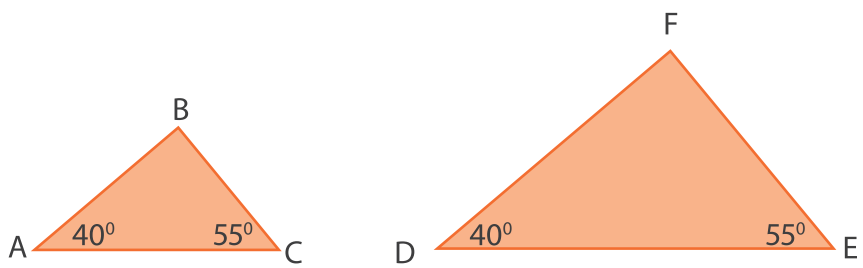
En la siguiente figura el triángulo $\Delta\, DFE$ es semejante al triangulo $\Delta\, ABC$ ya que los lados DE y EF son proporcionales con AB y BC respectivamente, $\frac{2.5}{3} = \frac{5}{6}$ como podemos verificar $2.5 \times 6 = 3 \times 5$ y los ángulos formado por esos lados son congruentes.



Segundo Criterio: (A-A-A) Ángulo – Ángulo – Ángulo

Si los ángulos de un triángulo se comparan con sus correspondientes ángulos en otro triángulo y son congruentes entonces esos triángulos son semejantes.

Para determinar si los triángulos, $\Delta\, ACB$ y ΔDEF son semejantes,

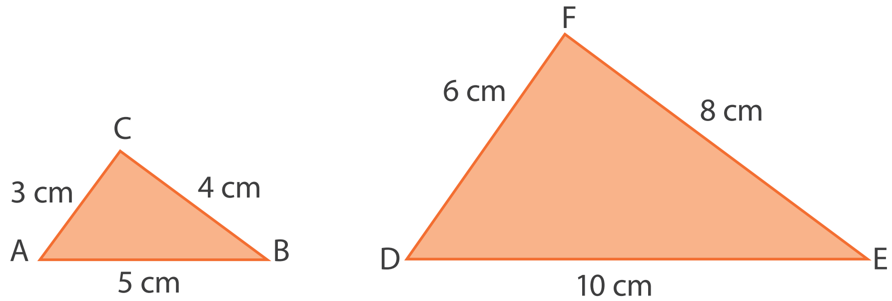


dado que solo tenemos información de dos ángulos, entonces intentaremos mostrar que los tres ángulos son congruentes, para ello usamos la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, la cual dice que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180º. Luego, ¿cuál debe ser el valor del ángulo B, para que la suma de los ángulos interiores del triángulo ABC sea igual a 180º? ¿Cuál es el valor del ángulo F? En ambos caso nos da 85º.

Con lo anterior tenemos que $\angle B \cong \angle F$ y con ello encontramos que los ángulos correspondientes de los dos triángulos son congruentes, por lo tanto los triángulos son semejantes $\Delta\, ABC \sim \Delta DEF$.

Tercer criterio: (L-L-L) Lado – Lado – Lado

Se tienen dos triángulos y se da una correspondencia entre lados respectivamente. Si los lados correspondientes son proporcionales entonces los triángulos son semejantes.



Al establecer razones con los lados correspondientes se tiene:

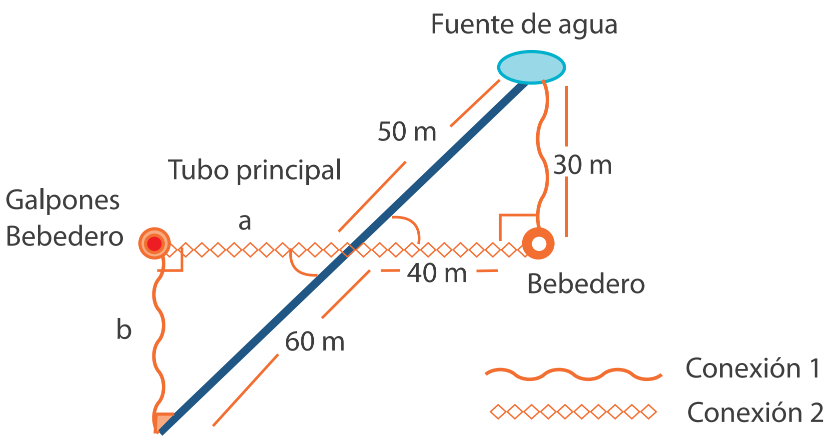
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \text{ al dar sus respectivos valores, esto es: } \frac{5}{10}=\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$$

Como podemos ver la proporción de todos sus lados es de $\frac{1}{2}$ o 0,5 por lo que los dos triángulos son semejantes.

Ejemplo de aplicación de los criterios

Antonio piensa en construir dos galpones. Uno de ellos será para los gallos y el otro para las gallinas. El suministro de agua lo realizará conectando una tubería a la fuente de agua como se muestra en la siguiente figura. Antonio tiene dos opciones para conectarse al tubo principal, la conexión 1 o la 2. ¿En cuál de ellas se requiere la menor longitud de tubería?

Disposición de las fuentes de agua



Una estrategia para resolver el problema invita a verificar que los triángulos formados en la figura sean semejantes, para luego, determinar la longitud de sus lados desconocidos; si son semejantes aprovechar la proporcionalidad que existe entre sus lados correspondientes. En la figura observamos que los dos triángulos forman ángulos de 90º en los puntos donde se instalan los bebederos. Por donde pasa la tubería se forman ángulos opuestos por el vértice lo que hacen que dichos ángulos sean congruentes. El último ángulo es el mismo porque la suma de los ángulos internos es 180º. Lo que hace que los ángulos sean congruentes. Por lo tanto, por el criterio (A – A – A) dichos triángulos son semejantes. Eso significa que los lados son proporcionales y nos permiten calcular las distancias *a* y *b*. Al establecer las razones correspondientes y sus respectivas proporciones tenemos:

$$\frac{a}{60} = \frac{40}{50} \quad \text{luego} \quad a = \frac{40 \text{ x } 60}{50} = 48\ m$$

Para determinar los valores de *b* planteamos $\frac{b}{60} = \frac{30}{50}$ luego $b = \frac{30 \text{ x } 60}{50} = 36\ m$

Luego la conexión 2 es de 88 m y la conexión 1 de 66 m. Por lo tanto, la conexión 1 es más corta que la conexión 2.

Ejercitemos lo aprendido

1. Dibuja un triángulo con las medidas que desees y con un transportador, toma la medida de los ángulos. Luego, registra los datos de tu triángulo y los de tus compañeros en la tabla que te presentamos a continuación:

Registro de las medidas de los ángulos interiores de triángulos

Triángulo	Medida del ángulo 1	Medida del ángulo 2	Medida del ángulo 3	Suma de los tres ángulos
1				
2				
3				
4				
5				

Escribe una conclusión respecto a la suma de los ángulos internos de los triángulos. ¿El resultado de la suma en todos los casos es la misma?

2. Ahora recorta el triángulo que dibujaste, marca cada uno de los vértices con los números uno dos y tres. Recorta los vértices y únelos con cuidado prestando atención a que los tres vértices se encuentren. ¿Se forma un ángulo llano?

   a. Observa con atención los resultados obtenidos por tus compañeros al recortar los ángulos de sus triángulos. ¿Qué conclusión puedes obtener al respecto? Discute con tus compañeros la conclusión.

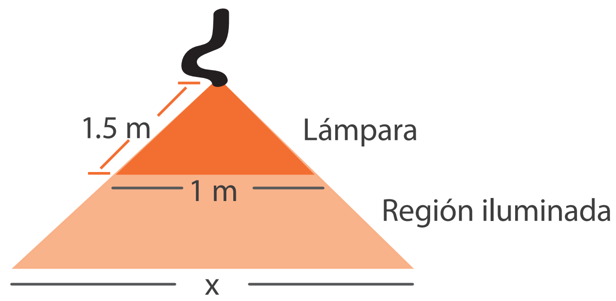
   b. Construye un triángulo cuyos ángulos sean de 60º y 90º. Compara el triángulo que construiste con los que construyeron tus compañeros. ¿Cómo son? ¿Cuántos de ellos son congruentes al tuyo o cuántos son semejantes?

3. Si la casa de don Antonio se ubica en la mitad de la distancia entre el lago y el poste, y, además se sabe que la altura de la colina con respecto a la carretera es de 200 m, ¿cómo podría calcular don Antonio la cantidad aproximada de cable que utilizaría para el suministro de energía eléctrica?

Ubicación de la casa

4. Don Antonio instala unas lámparas en su galpón como se muestra en la siguiente figura. Él afirma que entre más cerca se encuentre la lámpara del piso el área iluminada será mayor. ¿Esta afirmación es cierta o falsa? Justifica tu respuesta.

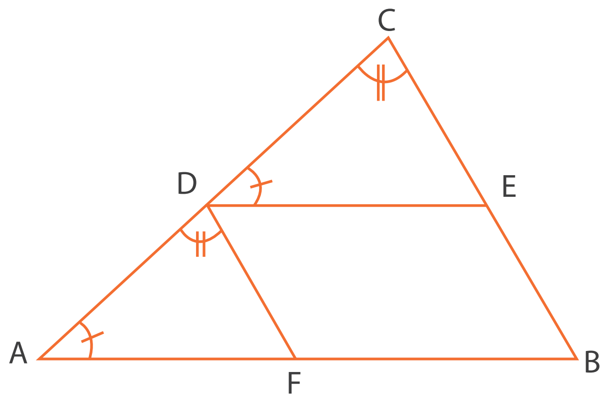
Disposición de las lámparas



¿Cómo se puede determinar el área iluminada si se tiene la altura en que se encuentra la lámpara? Explica.

5. En determinada hora del día un árbol proyecta una sombra de 13,5 m desde su base. Si la sombra proyectada por un sujeto de 1,7 m de altura a la misma hora del día es de 5,1 m, ¿cuál es la altura aproximada del árbol?

6. Determina si los triángulos ABC y DEC son semejantes. Justifica tus afirmaciones.



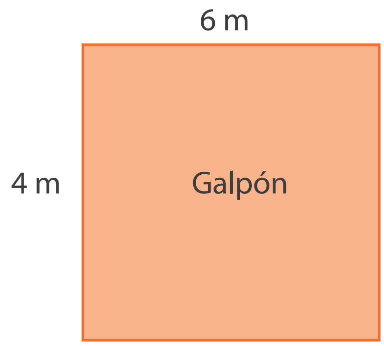
Determina si en la gráfica anterior los triángulos CDE y AFD son semejantes. Justifica tus afirmaciones

» ¿Qué puedes concluir de los triángulos que se encontraron que son semejantes?

» Si dos triángulos tienen dos lados congruentes, ¿podemos afirmar que son semejantes? Justifica por medio de un ejemplo tu respuesta.

7. Antonio decide redistribuir su finca. Para ello desea mover de lugar su galpón. Una forma de ahorrar costos, es reutilizando su malla. Luego decide construir el nuevo galpón de las mismas medidas que el primero. Como estrategia, sólo mide dos de los lados del galpón. ¿Su estrategia es la correcta?

Diagrama del galpón



a. Explica por qué razón sólo con la medida de dos lados puede construir el nuevo galpón con las mismas dimensiones del galpón anterior.

b. ¿Por qué factor podría fallar la nueva construcción?

c. Antes de desmontar la malla, don Manuel decide tomar de nuevo la medida, pero esta vez toma sólo un lado y la diagonal del rectángulo, ¿con esos datos es posible reconstruir el galpón en otro sitio?

d. Para saber si las dos estrategias anteriores de Manuel son posibles, empleemos un dibujo del área del galpón que desea trasladar Manuel. Luego intenta realizar el mismo dibujo en una hoja blanca. Explica las dificultades que se te presentaron.

8. Determina si cada una de las afirmaciones presentadas es falsa o verdadera.

a. Para saber si dos triángulos rectángulos son congruentes, basta con saber que dos de sus catetos son congruentes

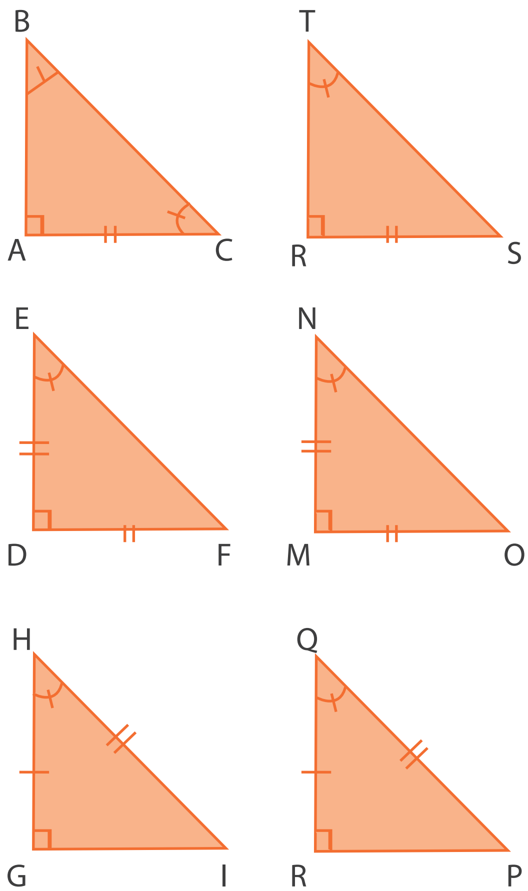
b. En un triangulo rectángulo si se conoce uno de los lados, se puede determinar la medida de otro.

c. Para saber si dos triángulos rectángulos son congruentes, basta con conocer la medida de uno de los ángulos

d. Todo triangulo rectángulo tiene por lo menos un ángulo recto.

e. Si dos triángulos rectángulos tienen su hipotenusa congruente y uno de sus ángulos agudos congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

f. Dos triángulos rectángulos son congruentes si uno de sus catetos y uno de sus ángulos son congruentes por el criterio (L-A-L).



Guía 17

Teorema de Pitágoras

Estándares:

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostraciones de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).

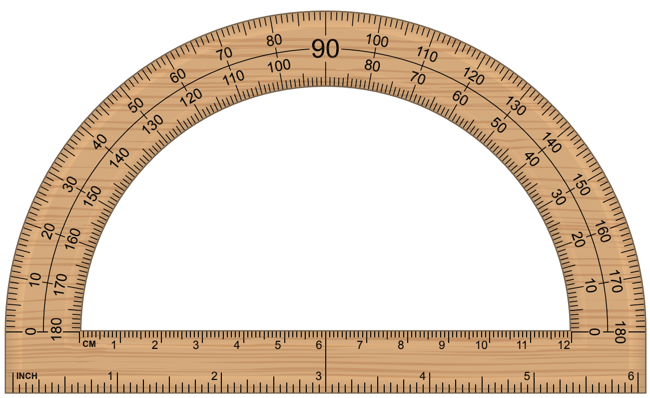
Lo que sabemos

Considera lo siguiente:

¿Cuántos diferentes tipos de escuadras puedes encontrar en tu salón de clase?

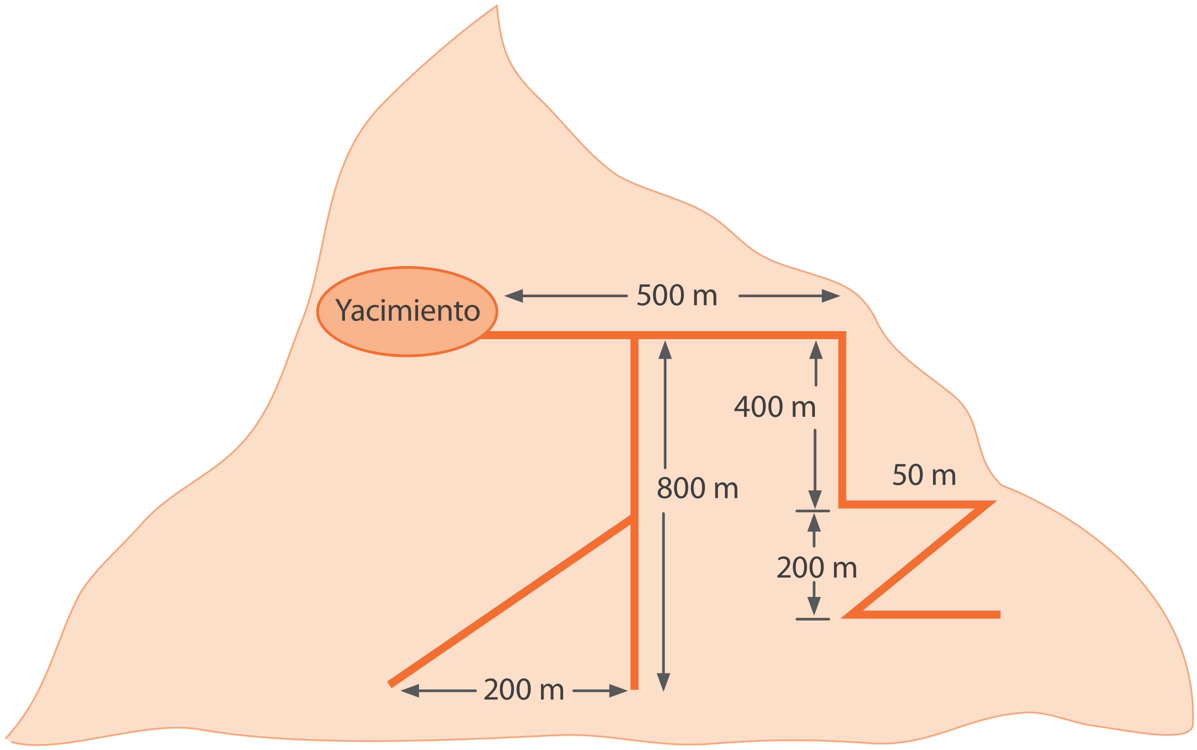
¿Qué guardan en común todas ellas?

Como habrás notado todos ellas son figuras en forma de triángulo, claro está que no es cualquier tipo de triángulo, es un triangulo rectángulo y es apenas un ejemplo de donde lo podríamos encontrar. Ahora bien, una mirada detallada de nuestro entorno pondrá al descubierto los triángulos rectángulos en los lugares más insólitos. Por ejemplo, en la construcción de puentes, la proyección de sombras, la ubicación de algunas estrellas etc. Las propiedades de este tipo de triángulos fueron de gran intriga en el pasado y sobre ellos, Pitágoras de Samos, enuncia un teorema de gran importancia para la humanidad, pues su aplicación y estudio ha contribuido al desarrollo de nuestro mundo.



1. Para la distribución de agua se desean emplear tubos desde un yacimiento que se encuentra en lo alto de una colina.

Distribución del agua



Según la figura:

» ¿Cuántos tubos fueron necesarios?

» ¿Qué longitud tiene cada uno de ellos?

» Si la longitud frecuente de un tubo es de 6 m, ¿cuántos tubos de esa medida son necesarios para la construcción?

» ¿Cuál es el área aproximada que cubre la tubería?

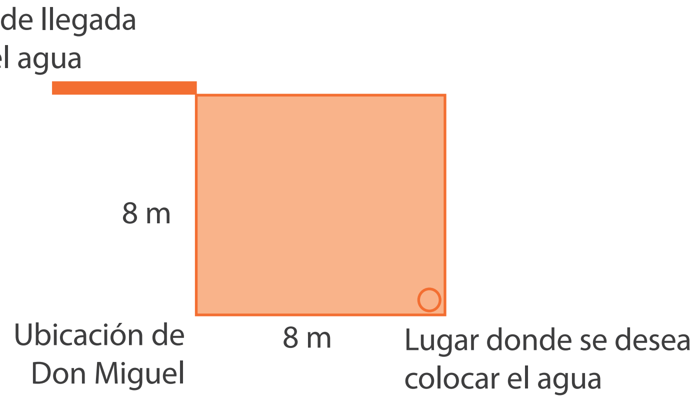
2. Miguel tiene un terreno de 1.025 m^2 y lo desea distribuir en tres cuadrados, si uno de los cuadrados tiene 25 m de lado, ¿cuál es la dimensión de los lados de los otros dos cuadrados?

Aprendamos algo nuevo

Analiza el siguiente problema:

Miguel piensa en conectar la tubería directo a su casa. Colocando tubos que formen un ángulo recto. Observa la figura que representa la situación:

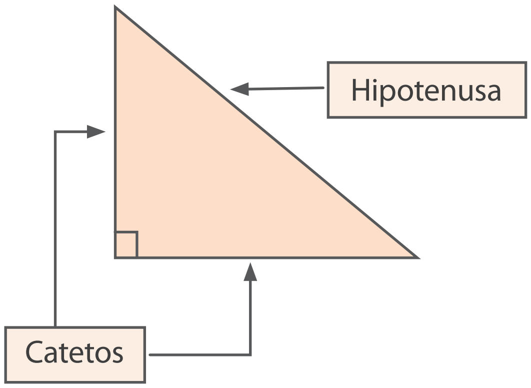
Conexión de tubería



- ¿Cuántos tubos de 8 metros debe cortar para formar el ángulo recto y llevar el agua a la casa?
- Si desea colocar el agua directamente de la fuente a la casa, ¿cuánta distancia hay?

Como lo habrás notado al trazar la diagonal se forma un triángulo rectángulo.

En los triángulos rectángulos, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto, hipotenusa.



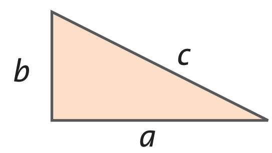
La hipotenusa es de mayor longitud que los catetos.

Teorema de Pitágoras

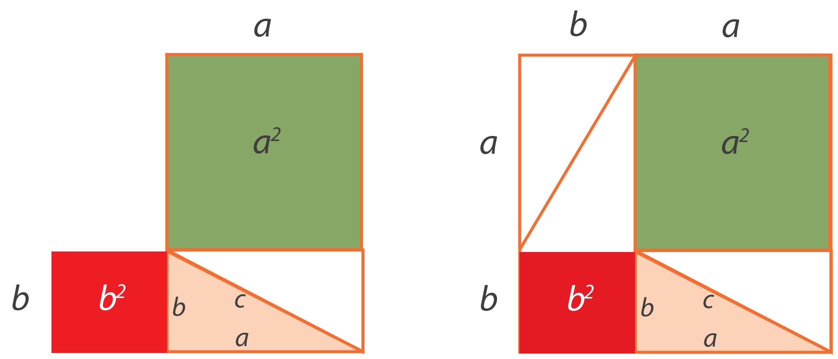
Todo triángulo rectángulo siempre va cumplir entre las longitudes de sus lados la siguiente relación numérica: la suma de los cuadrados de sus catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado.

Se han realizado diversas demostraciones de esta relación, algunas de ellas son de tipo algebraico o geométrico, realicemos una prueba de tipo geométrico.

Tomamos un triángulo rectángulo de medidas *a*, *b* y *c*.



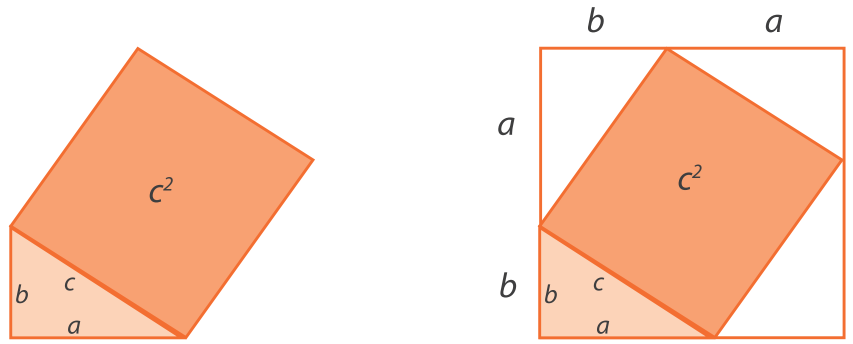
Luego, para completarlo construimos un cuadrado de lado *a* y otro de lado *b* y tres triángulos rectángulos congruentes al triángulo inicialmente dado.



Como observas encontramos las áreas de cada una de las figuras así:

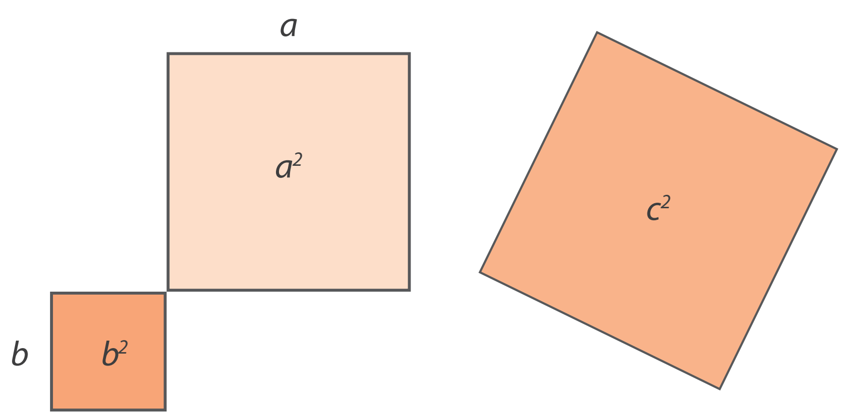
- El área del cuadrado grande es $a \times a = a^2$
- El área del cuadrado pequeño es $b \times b = b^2$

Si tomamos el mismo triángulo rectángulo y construimos un cuadrado, que tiene otro cuadrado sobre la hipotenusa y completándolo con tres triángulos congruentes de medidas *a, b* y *c*, obtenemos algo como lo siguiente:



- El área del cuadrado grande es $c \times c = c^2$

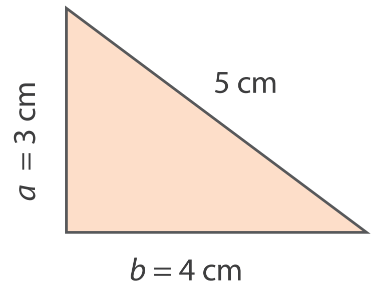
Si tomamos los cuadrados formados en cada una de las construcciones encontramos que en los cuadrados de lados *a*, *b* y *c*, sus respectivas áreas a^2, b^2 y c^2, cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$.



- Socializa lo que te sucedió con tus compañeros. ¿Sucede para todos los triángulos construidos?

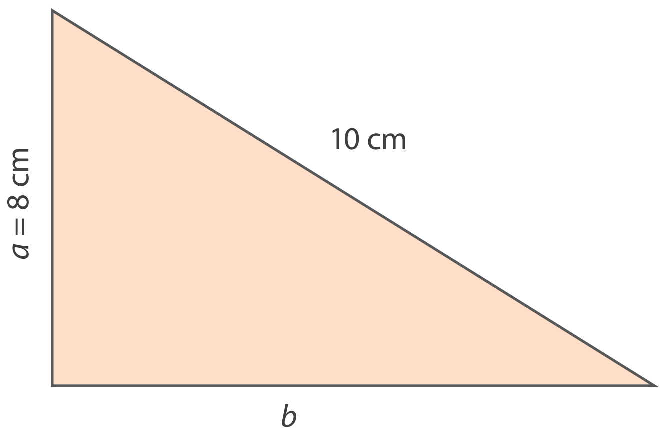
- Veamos ahora ejemplos numéricos del teorema.

Supón que la medida del cateto *a* es 3 cm, y la medida del cateto *b* es 4 cm, entonces, la medida de la hipotenusa estará determinada por $a^2 + b^2 = c^2$, con lo cual tenemos $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ luego, la hipotenusa del triángulo tiene 5 unidades de magnitud, ya que se saca la raíz.



$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Si se tiene un triángulo que se conoce un cateto cuya medida es 8 cm y la hipotenusa es 10 cm. Hallemos el valor del otro cateto.

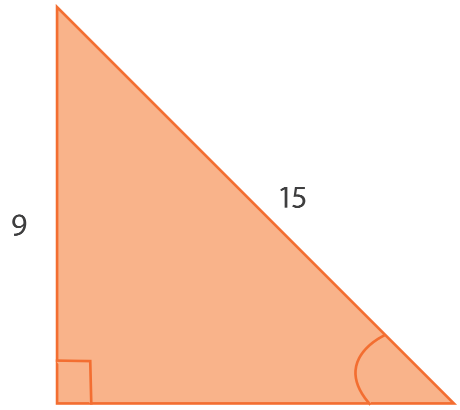


Como todo triángulo rectángulo cumple el teorema de Pitágoras reemplazamos los datos en la ecuación dada:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 8^2 + b^2 &= 10^2 \\ 64 + b^2 &= 100 \\ 64 + b^2 - 64 &= 100 - 64 \\ b^2 &= 36 \end{aligned}$$

Al sacar raíz ambos lados se tiene $b = 6$.

Otro método para hallar la magnitud del lado faltante



En este caso, el lado faltante es uno de los catetos, lo que implica que podemos despejar de la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, uno de los catetos.

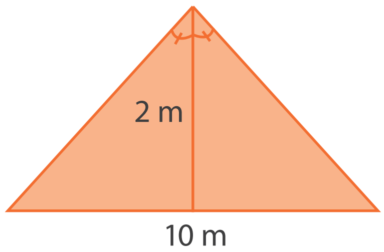
Ahora la expresión se nos convierte en $a^2 = c^2 - b^2$, reemplazando valores tenemos . Esto es $a^2 = 225 - 81$ que es equivalente con $a^2 = 144$ luego $a^2 = \sqrt{144} = 12$, valor aproximado.

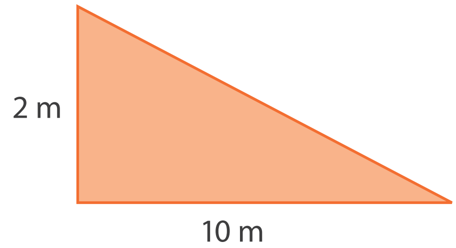
Ejercitemos lo aprendido

Trabajo en grupo

En grupos de tres, resuelvan las siguientes situaciones:

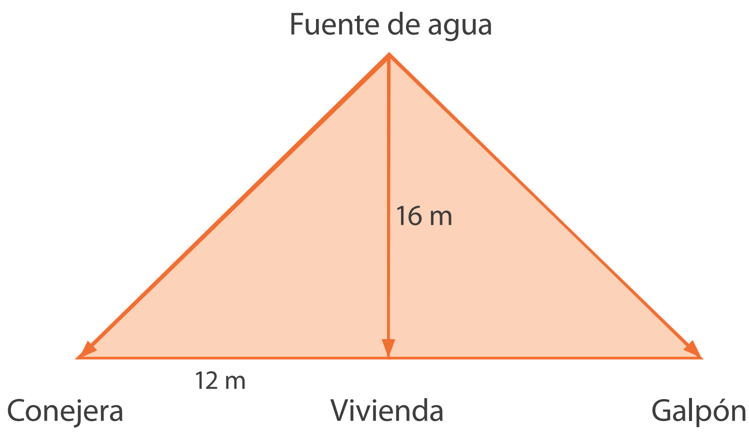
1. Dibujen un triángulo cuyas medidas de sus catetos son 2 cm y 3 cm. ¿Cuál es el valor de su hipotenusa?
2. ¿Cuál es la medida de la longitud del tubo que debe comprar Miguel para llevar el agua directamente de la fuente a su casa?
3. Para la construcción de un invernadero, se tienen dos alternativas con el techo; uno es de dos aguas, y el otro es sencillo. Según la siguiente figura, ¿cuál de ellos necesita de la menor cantidad de plástico?





4. Miguel tiene una reja de 15 metros de largo y decide colocarla de forma diagonal dentro de un galpón rectangular, si uno de los lados del galpón mide 9 m ¿cuál es el valor del otro lado?

5. Una fuente de agua es utilizada para realizar el aseo de una conejera y un galpón. Según la figura siguiente, ¿cuál debe ser la longitud mínima de la manguera para poder realizar el aseo en los dos lugares?



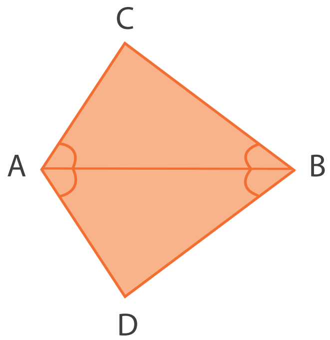
6. Para dar mayor estabilidad a una antena de 1 m se amarran dos cables de 2 m a cada extremo de la antena ¿A qué distancia aproximada se encuentran los puntos de amarre?

7. Desde el techo de su casa Camilo ve que su mamá llega de hacer compras. Si el techo se encuentra a 3 m del suelo y la distancia entre la casa y la mamá de Camilo es de 4 m ¿A qué distancia se encuentra Camilo de su mamá?

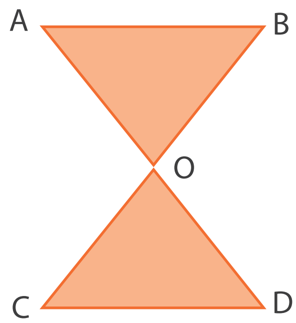
Apliquemos lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas:

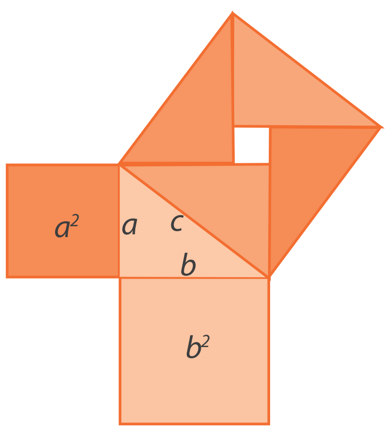
1. Demuestra que los triángulos de la figura son congruentes y determina qué criterio de congruencia empleaste.



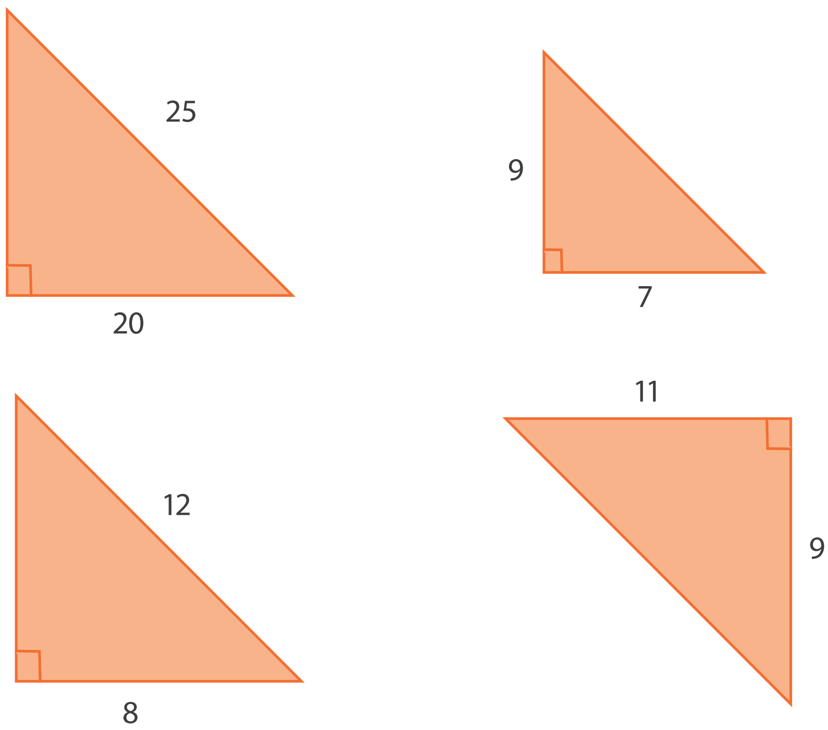
2. En el triángulo O es el punto medio de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. ¿Esta información, es suficiente para deducir que el triángulo AOB es congruente con el triángulo OCD? Justifica tu respuesta.



3. Determina el área de cada uno de los triángulos si se sabe que $a = 6$ cm y $b = 3$ cm.



4. Determina la medida de cada uno de los lados faltantes de los triángulos.



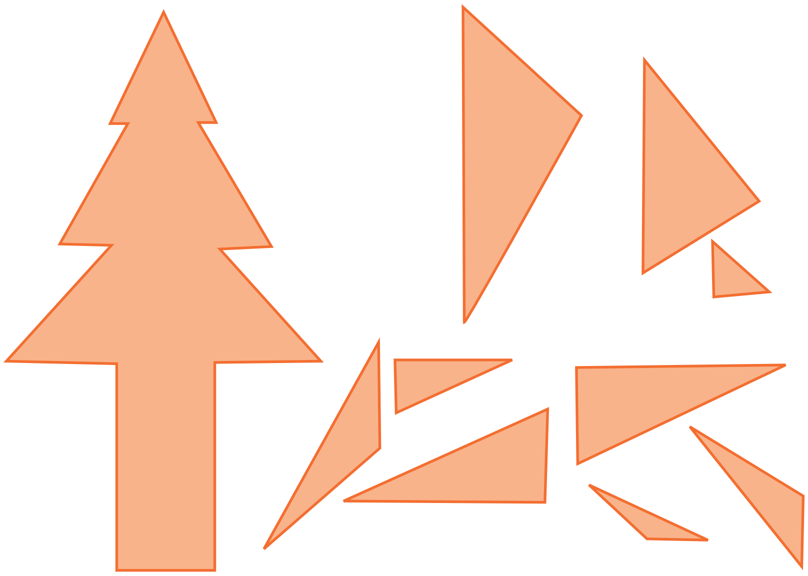
Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

A continuación encontrarás algunos ejercicios prácticos que buscan ayudarte a medir qué tanto aprendiste. Léelos con detenimiento y antes de comenzar la siguiente sección desarrolla las actividades a continuación.

1. Observa las fichas que componen nuestro rompecabezas, constrúyelas y recórtalas en cartulina para formar el árbol.

Rompecabezas



2. Construye triángulos semejantes cuyo factor escalar corresponda al triple de la medida dada con cada una de las fichas y arma nuevamente la figura.

3. Construye un nuevo rompecabezas de igual forma y tamaño al presentado en la figura, pero compuesto sólo por triángulos rectángulos, luego determina el valor del área y el perímetro del árbol.

4. De acuerdo al resultado anterior determina el valor del área y el perímetro del árbol que formaste con los triángulos semejantes. Justifica tu respuesta.

Ahora, responde:

- ¿Qué tanto sientes que has aprendido respecto a lo que sabías hace unas semanas?

  a. Poco b. No siento avance c. Bastante

Justifica tu respuesta.

- ¿Sientes que lo que has aprendido te será útil en tu vida futura? ¿Y a hacer más fácil tu vida cotidiana?

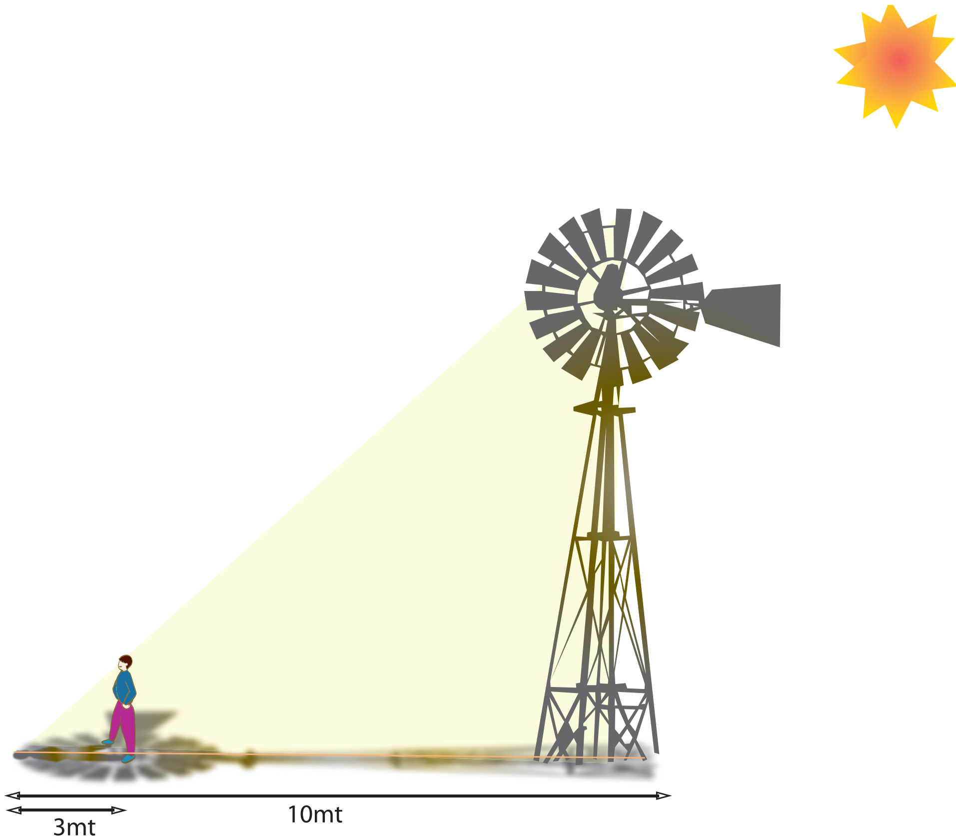
- Identifica algo que no te haya quedado muy claro y compártelo con tu maestro.

¿Cómo me ven los demás?

Forma grupos de tres personas para resolver cada uno de los problemas, justificando las estrategias utilizadas.

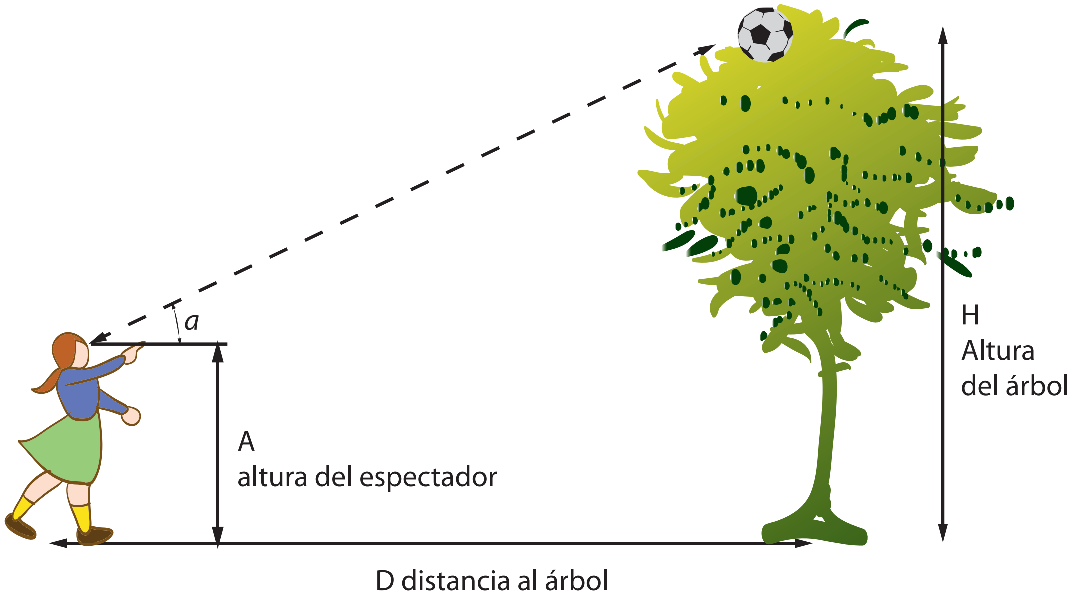
1. ¿Cuál es la altura del molino si se sabe que la altura del sujeto es de 1,7 m?

Molino



2. Para determinar la altura de un árbol de forma indirecta, Andrés toma un pitillo y lo coloca sobre su escuadra de 45 º, luego, retrocede observando por el orificio del pitillo hasta lograr ver la copa del árbol. Si Andrés se encuentra a una distancia de 2,3 m del árbol y la escuadra se encuentra a 1,6 m del suelo, ¿Cuál es la altura del árbol?

Altura del árbol



a. ¿Qué sucede si la escuadra es de 30º?

b. ¿Qué sucede si la escuadra es de 60º?

Ahora compartan sus opiniones en los grupos formados, para responder lo siguiente:

- ¿Cuál de los compañeros del grupo resolvió más rápido y correctamente los anteriores problemas?
- ¿Cuál de los compañeros del grupo resolvió con mas dificultad los problemas propuestos?
- ¿Cómo me fue con respecto a mis compañeros de grupo?

Analicemos las anteriores respuestas y determinemos quiénes deben realizar ejercicios adicionales (incluyéndome) y quiénes pueden ser apoyo del maestro para explicarle a los demás del curso.

¿Qué aprendí?

Responde según la manera en la que te desenvolviste en el desarrollo del módulo. Justifica tu respuesta

	Sí	A veces	No	Justificación
Realizo esquemas como dibujos, o diagramas que me permiten entender el problema.				
Cuando no puedo solucionar el problema intento nuevamente hasta lograrlo.				
Verifico la información que se me da en las guías.				
Participo en los debates que se puedan formar alrededor de la temática.				
Realizo mis tareas responsablemente tanto en los trabajos individuales como grupales.				
Aporto en las actividades de trabajo en grupo.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Participo activamente en clase, expresando mis opiniones de manera clara y respetuosa.				
Respeto las opiniones de mis compañeros de curso.				
Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				
Me intereso por aprender entendiendo el uso y el significado de lo que aprendo.				

Determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento con tu maestro.

Módulo 5

Cálculos de medidas en los sólidos

¿Qué vas a aprender?

En la cotidianidad se encuentran objetos con formas geométricas o que se pueden representar por cuerpos geométricos y en muchas ocasiones se requiere conocer sus dimensiones y su capacidad. Por ejemplo para saber qué cantidad de madera se puede obtener de un árbol, elaborar objetos de características especificas, conocer la capacidad real de recipientes de uso habitual o para optimizar el espacio disponible. En el presente módulo se estudian algunos cuerpos geométricos a través de los cuales se pueden modelar muchos objetos reales o producir otros.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento métrico

- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.

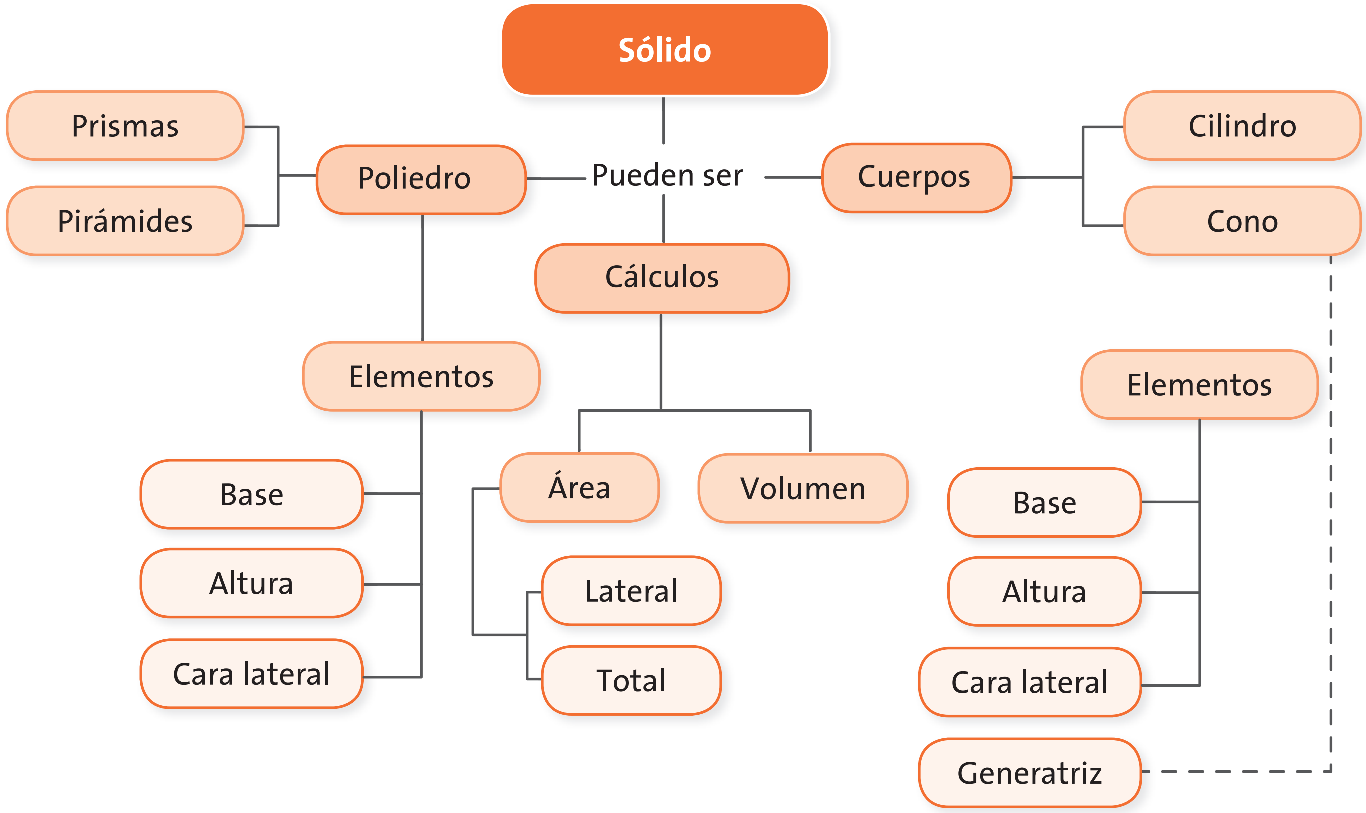
Pensamiento espacial

- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

La realización de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo te permitirá alcanzar estándares básicos de competencias que privilegian el desarrollo del pensamiento matemático a través de los conceptos asociados a la medida de área y volumen de algunos sólidos. En la tabla que se presenta a continuación se muestran los conceptos que aprenderás.

Guía	Concepto	Procesos
Guía 18. Cálculos de algunas medidas de prismas	**Área superficial, área total y volumen de prismas**	El desarrollo de estos estándares permitirá fortalecer los siguientes procesos: • La **formulación, tratamiento y resolución de problemas**: Por cuanto se presentan diversas situaciones que pueden ser resueltas mediante su representación como objetos geométricos y las expresiones algebraicas asociadas. • La **modelación:** En dos sentidos; el primero relacionado con la representación de objetos reales mediante dibujos o modelos a escala de uno o más sólidos geométricos, con el objeto de permitir un estudio aproximado del objeto real o de proyectar un objeto antes de su construcción y de esta forma obtener información básica como el área y espacio ocupado así como la cantidad de material requerido para su fabricación. • El segundo, relacionado con la representación de figuras y cuerpos geométricos mediante expresiones algebraicas, las cuales permiten realizar cálculos precisos o estimaciones de las dimensiones de los objetos representados. • La **comunicación:** Se invita al estudiante a interpretar enunciados, así como a proponer soluciones a ejercicios y aplicaciones relacionadas con las áreas y volúmenes de algunos sólidos geométricos, estimulándolo a hacer uso de un lenguaje adecuado para referirse a ellos y a las figuras que los componen. • El **razonamiento:** El presente módulo se apoya constantemente en preguntas, las cuales trazan un derrotero, para deducir algunas relaciones que existen entre las dimensiones de ciertas figuras y cuerpos geométricos, las cuales facilitan el estudio de dichos objetos, así como de los objetos reales que representan. También se recurre a las analogías, de tal forma que el estudiante pueda abordar el estudio de un objeto geométrico a partir de su similitud con otro ya estudiado. • La **formulación, comparación y ejercitación de procedimientos:** A lo largo del desarrollo de los temas, al finalizar el desarrollo de cada tema y en las actividades evaluativas, se presentan ejercicios que ayudarán a ganar destreza en el cálculo de áreas longitudes y volúmenes de algunas figuras y cuerpos geométricos.
Guía 19. Cálculos de algunas medidas de otros sólidos	**Área superficial, área total y volumen de pirámides** **Área superficial, área total y volumen de cilindros** **Área total, área lateral y volumen del cono**	
Guía 20. Aplicación de cálculos de volúmenes	**Composición de sólidos** **Operaciones aditivas con volúmenes y áreas**	

En la gráfica siguiente observarás la relación existente entre los conceptos que vas a aprender.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Los seres humanos han desarrollado una serie de productos de uso habitual con formas geométricas como cubos, cilindros, prismas, pirámides y otros poliedros. Identificamos dichas figuras en las viviendas, en las columnas de las edificaciones, en muchos alimentos y utensilios como las ollas, entre otros. Reconocer dichas formas permite realizar cálculos útiles en la producción y uso de dichos objetos.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En cada una de las guías encontrarás la sección ejercito lo aprendido, con la cual podrás evaluar tu destreza en cuanto al cálculo de áreas y volúmenes de algunos sólidos geométricos y reforzar el desarrollo del contenido de cada guía.

También encontrarás al final del módulo, las secciones *Aplico lo aprendido* donde se proponen aplicaciones en las que combinarás tu habilidad manual y los conocimientos adquiridos y la sección *Evaluación*, en las que se proponen actividades individuales y grupales en las que tú, tus compañeros y tu maestro podrán detectar los aspectos que debes reforzar con respecto al cálculo de áreas y volúmenes de sólidos geométricos.

Explora tus conocimientos

Elaboración de productos lácteos

Los vecinos de la vereda El Rosal son especialistas en la preparación de ricos y variados productos lácteos. Muchos de los quesos vienen en bloques con forma de cilindro mientras que la mantequilla adopta una forma de prisma.

- Modela posibles formas que puedan tener los bloques de queso y la barra de mantequilla que cumplan las características dadas.
- Da tres ejemplos de otros productos que tengan forma de cuerpos geométricos.
- Cómo calcularías el área que debe tener un papel que se utilice para recubrir la mantequilla.
- Cómo calcularías el volumen que ocupa un queso de forma cilíndrica o de prisma.

Guía 18

Cálculos de algunas medidas de los prismas

Estándar:

Pensamiento métrico

- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.

Los prismas son cuerpos geométricos muy interesantes, ampliamente usados en ingeniería, arte, ciencias e industria. En la naturaleza, aunque no siempre los veamos se encuentran formando los cristales de muchos minerales. En la presente guía encontrarás fundamentos para el estudio de los prismas sus áreas y volúmenes.

Lo que sabemos

Los fabricantes de velas y velones, han recurrido a presentaciones novedosas para llamar la atención de sus clientes.

Velas con forma de cilindro, pirámide cuadrandular y cubo.

Trabajo en grupo

En la figura anterior, se observan algunas velas cuyas caras tienen formas de polígonos. Las dimensiones que se observan están a escala 1:3 es decir cada centímetro de las imágenes representan 3 centímetros reales.

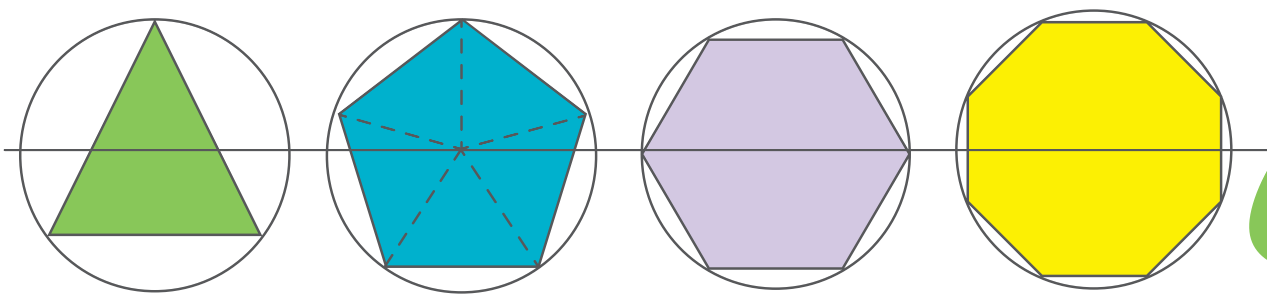
En grupos de tres estudiantes realicen las siguientes actividades:

- Dibujen las caras de cada una de estas velas.
- Realicen modelos de cartulina de cada una de estas velas.
- Calculen la cantidad de cartulina necesaria para cada modelo.

Aprendamos algo nuevo

Hallar el área de polígonos o figuras cerradas se relaciona con la cantidad de cuadrados que cubren dicha superficie. Existen unos polígonos que son regulares y además están inscritos en la circunferencia como se muestra en la siguiente figura.

Polígonos inscritos en circunferencias



Para dibujar los polígonos anteriores sigue los siguientes pasos:

- Dibuja una circunferencia y marca un radio.
- A partir de este, traza divisiones acordes a los divisores de 360º. Por ejemplo; para representar un triángulo, dividimos 360 entre 3, da 120. Desde el centro hacemos radios cada 120º y donde corta el radio a la circunferencia se define un vértice. Como se definen tres vértices por estos, se traza los lados del triángulo.
- Así, realiza los otros polígonos.

1. Calca los polígonos y traza radios desde el centro hasta cada uno de los vértices. Los segmentos que trazaste son simultáneamente lados de triángulos y radios de la circunferencia que circunscribe al polígono. Observa que la figura original se ha dividido en triángulos.

2. ¿Qué relación numérica hay entre el número de lados del polígono y el número de triángulos? ¿Qué relación de congruencia o semejanza hay entre estos triángulos? ¿Cómo se calcularía el perímetro del polígono?

3. Como los triángulos son isósceles o equiláteros, al trazar la altura correspondiente al lado (base) que forma el polígono este segmento corresponde a la altura del triángulo y a la mediana del lado se pasa por el punto medio de este. Este segmento se conoce como **apotema a_b**.

El área de un triángulo se calcula:

$$\text{Área} = \frac{(Base \cdot altura)}{2}$$

Como la altura coincide con la apotema y la base es la longitud de lado tendríamos que el área de un triángulo es:

$$A_{TR} = \frac{l \cdot a_b}{2}$$

Como el área de un polígono es equivalente a la suma de las áreas de los triángulos congruentes que se determinan, si se tiene un polígono de cinco lados se definen cinco triángulos todos congruentes. Entonces, calcular el área del polígono es calcular y sumar el área de los cinco triángulos. Simbólicamente,

$$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Como cada área A_i corresponde al área de un triángulo se tiene:

$$A_{total} = \frac{(b_1 \cdot h_1)}{2} + \frac{(b_2 \cdot h_2)}{2} + \frac{(b_3 \cdot h_3)}{2} + \frac{(b_4 \cdot h_4)}{2} + \frac{(b_5 \cdot h_5)}{2}$$

Como las bases de todos los triángulos son las longitudes de los lados del polígono y estas son congruentes se reemplaza las diferentes bases por *l* y como las diferentes alturas son iguales porque los triángulos son congruentes y corresponden al apotema (a_p) al reemplazar en la anterior fórmula se tiene:

$$A_{total} = \frac{(l \cdot a_b)}{2} + \frac{(l \cdot a_b)}{2} + \frac{(l \cdot a_b)}{2} + \frac{(l \cdot a_b)}{2} + \frac{(l \cdot a_b)}{2}$$

Se observa que es una suma de fracciones que tienen denominador se tiene que el resultado es:

$$A_{total} = \frac{(l \cdot a_b) + (l \cdot a_b) + (l \cdot a_b) + (l \cdot a_b) + (l \cdot a_b)}{2}$$

- Como en el numerador todos los sumandos son iguales se pueden representar como una multiplicación. ¿Por qué?

$$A_{total} = \frac{5 \cdot (l \cdot a_b)}{2}$$

Por tanto, el área de un pentágono regular se calcula:

$$A_{pentágono} = \frac{5 \cdot (l \cdot a_b)}{2}$$

- Realiza los cálculos necesarios para determinar las áreas de un hexágono regular y de un octágono regular.

Como observas, en todas las fórmulas encontradas se halla el área del triángulo y se multiplica por el número de lados del polígono (*n*). Por tanto, la fórmula para encontrar la medida del área de un polígono regular es:

$$Ap = \frac{n \cdot l \cdot a_b}{2} = \frac{(n \cdot l) \cdot a_b}{2}$$

Donde n es el número de lados del polígono, l es la medida de la longitud del lado y a_b es la medida de la altura del triángulo, o apotema del polígono. El subíndice b en a_b se utiliza para indicar que el polígono es base de un cuerpo geométrico. La cantidad $n \cdot l$ es el perímetro del polígono P_p por tanto puede escribir:

$$A_{polígono} = \frac{P_p \cdot a_b}{2}$$

Realiza los cálculos para completar la siguiente tabla:

Componentes de polígonos regulares

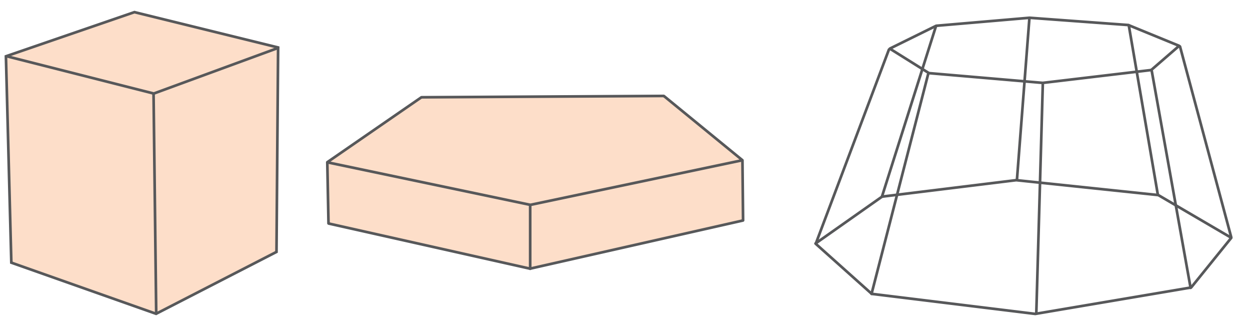
Polígono	Radio R en cm	Número de lados n	Lado L en cm	Apotema a_b en cm	Área de un triángulo A_T en cm²	Perímetro del polígono P_P en cm	Área del polígono $A_{Polígono}$ en cm²
Triángulo	10	3	17,32	5			
Pentágono	10	5	11,76	8,09			
Hexágono	10	6	10	8,66			
Octágono	10	8	7,65	9,24			

Adaptado de: http://www.geom.uiuc.edu/docs/reference/CRC-formulas/node24.html#SECTION01530000000000000000

Prismas

Los sólidos que se muestran en la siguiente figura, están formados por polígonos, que los hace considerar poliedros.

Poliedros



Dentro de esos poliedros se encuentran los prismas, los cuales cumplen dos condiciones:

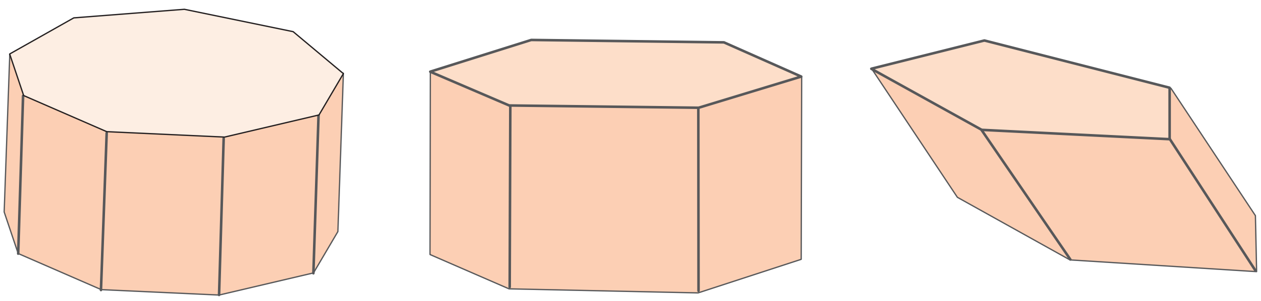
1. Tienen dos bases que son polígonos congruentes ubicados paralelamente uno con respecto al otro.

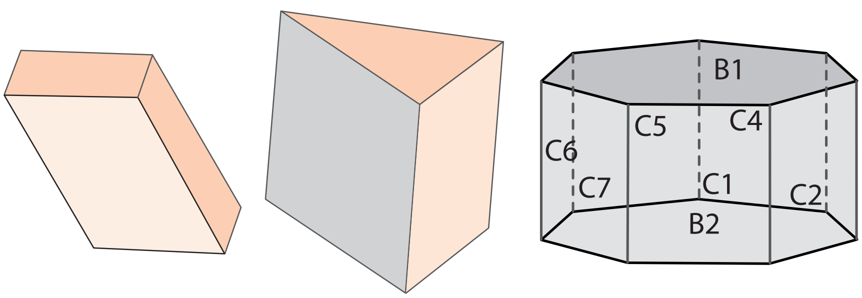
2. Sus caras laterales son paralelogramos.

Es decir, las bases pueden ser polígonos diferentes a paralelogramos y el número de paralelogramos que forman las caras laterales es igual número de lados de las bases.

- Determina las bases y caras laterales de los prismas de las siguientes figuras.

Prismas

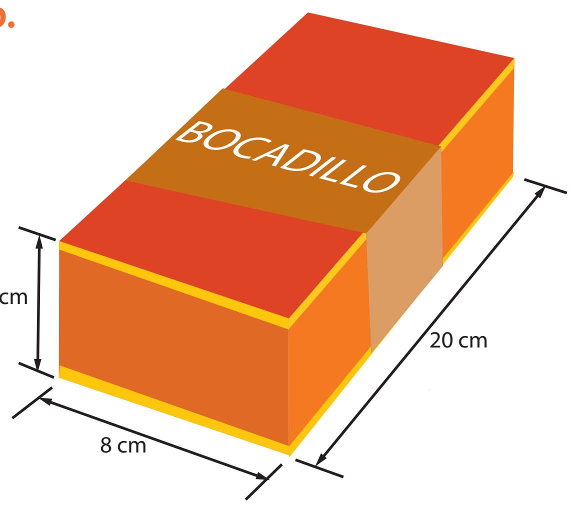




B1 y B2 son las bases y C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 SON CARAS LATERALES

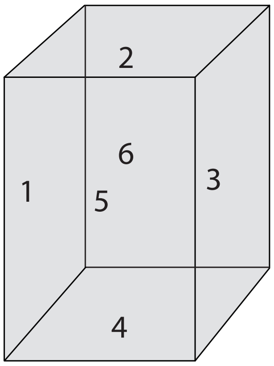
Un prisma cuyas caras siempre son rectángulos se denomina **prisma recto o paralelepípedo.**

Lonja de bocadillo



Si una de las lonjas de bocadillo que elabora doña Berta tiene las dimensiones que se muestran en la figura de la página anterior, para hallar el área de las caras laterales, el área total de la superficie y el volumen de la lonja de bocadillo se realiza el siguiente procedimiento:

- Identifica las caras del prisma y clasifícalas en bases y caras laterales.



Caras de un prisma recto rectangular

Las caras del prisma de base rectangular de la figura, están enumeradas. Las caras laterales están numeradas con 1, 5, 6 y 3. Las bases son las caras numeradas 2 y 4.

La distancia entre los planos en los que se sitúan las bases de un prisma se llama altura del prisma.

- En este caso las bases son dos rectángulos. Ver la figura ***Bases del prisma rectangular***. Calcula el área de las bases. Recuerda que el área de un rectángulo es:

$$A = Base \cdot Altura$$

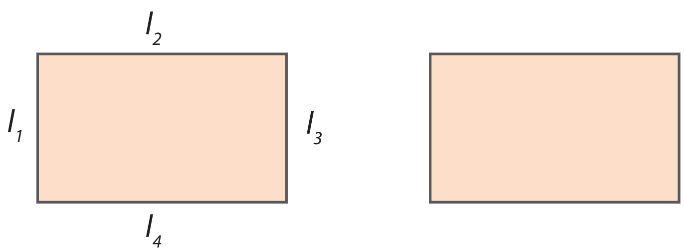
Entonces el área de una base, A_b será:

$$A_b = l_1 \cdot l_2$$

Como son dos bases:

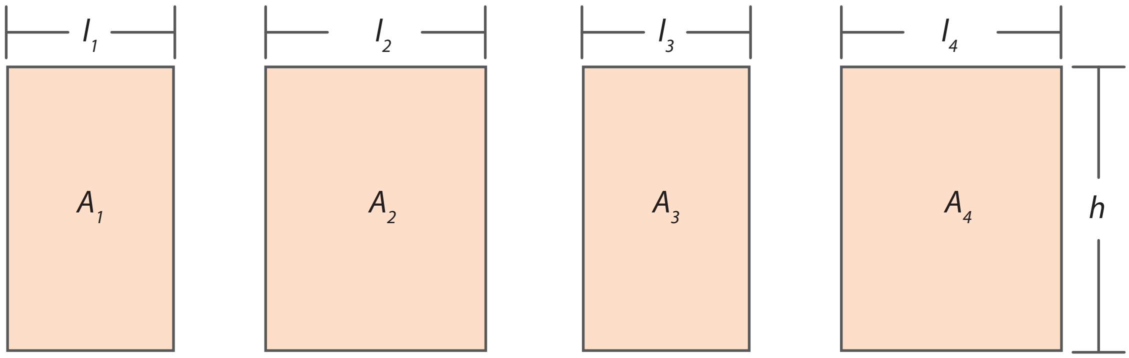
$$\text{Área de las bases} = 2 \cdot A_b$$

Bases del prisma rectangular



- El valor del área de las caras laterales de un prisma o área lateral es la suma de las áreas de cada una de las caras laterales. Halla el área de cada una de las caras laterales de la siguiente figura y posteriormente el área lateral.

Caras laterales del prisma rectangular



$$A_{Lateral} = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

$$A_{Lateral} = (h \cdot l_1 + h \cdot l_2 + h \cdot l_3 + h \cdot l_4)$$

Aplicando la propiedad distributiva $A_{Lateral} = h\,(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)$

- ¿Podrías identificar qué son h y $(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)$?
- Halla el área total de la superficie. Para tal fin debes agregar el valor del área de las bases al valor del valor de las áreas de las caras laterales.

$$A_{Total} = \text{área de las bases} + \text{áreas laterales}$$

$$A_{Total} = A_L + 2 \cdot A_b$$

Volumen del prisma

Para hallar el **volumen de un prisma** (V_p) se calcula el área de la base (A_b) y se multiplica por el valor de su altura. El volumen se expresa en unidades cúbicas como el centímetro cúbico (cm^3) y el metro cúbico (m^3).

$A_b = l_1 \cdot l_2 =$ ______ $\qquad V_p = hl_1 \cdot l_2 =$ ______

Para hallar el área de una base en forma de polígono regular se usa la fórmula:

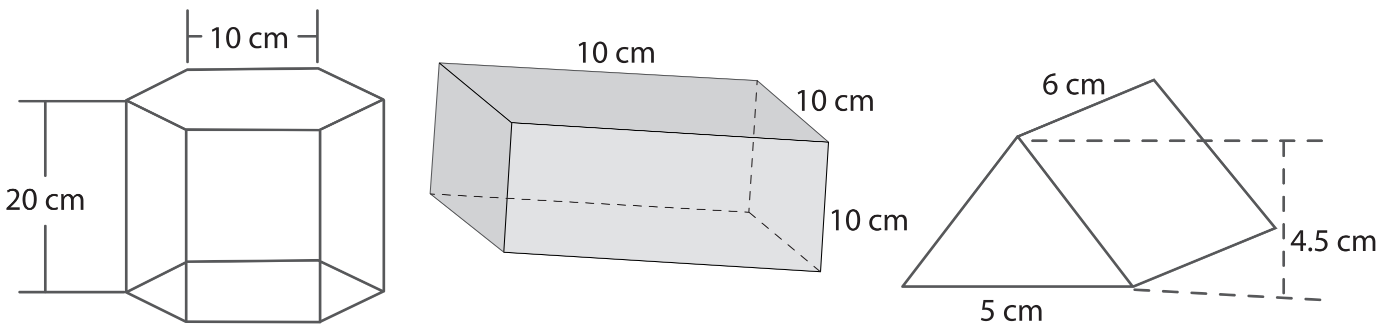
$$Ap = \frac{P_p \cdot a_b}{2}$$

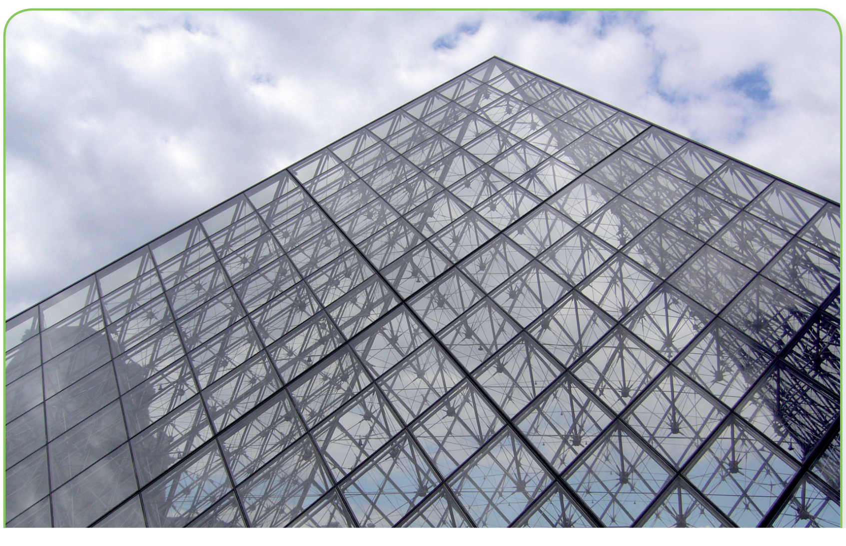
Donde P_p es el perímetro del polígono y a_b la apotema de la base. Cuando la base no es un polígono regular deberás encontrar otra forma de calcular el área de la base.

Ejercitemos lo aprendido

- Calcula el área total, área lateral y el volumen de los prismas de la siguiente figura. Ten en cuenta que la apotema de un hexágono regular de lado 10 cm es 8,66 cm.

Prismas de bases poligonales





Guía 19

Cálculos de algunas medidas de otros sólidos

Estándares:

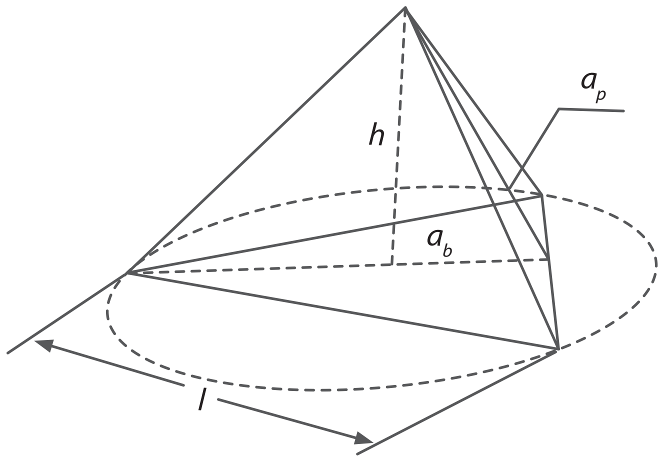
- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Pirámides de Egipto.

Las construcciones piramidales son un legado de civilizaciones antiguas como la egipcia. ¿Te has preguntado cómo pudieron diseñar y construir estas edificaciones? ¿Qué tan desarrollada estaba su ingeniería? y ¿cuáles eran los conocimientos en geometría que manejaban? En esta guía abordaremos algunos cálculos relacionados con áreas y volúmenes de sólidos como prismas, pirámides, cilindros y conos.

Lo que sabemos

Pirámide regular de base triangular



En la figura se observa una pirámide regular triangular, cuya base está inscrita en una circunferencia en la que la apotema de la base mide 5 cm y los lados de la base que son triángulos equiláteros de 17,32 cm de lado y la altura de la pirámide es 10 cm.

- Calcula el área y el perímetro de la base en la **Pirámide regular de base triangular.**
- Como la base es un triángulo equilátero de lado l, el perímetro será 3 veces el lado:

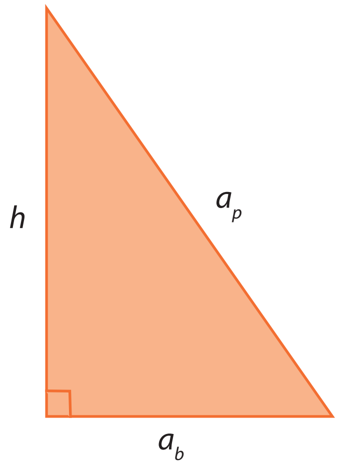
$$P_p = 3 \cdot l = \_\_\_\_\_$$

Recuerda que el área de un polígono regular está dada por: $Ap = \frac{P_p a_b}{2}$ donde A_p es el área del polígono, P_p es el perímetro y a_b es la apotema. Como un triángulo equilátero es un polígono regular, puedes usar esta fórmula para hallar su área.

$$Ap = \frac{P_p a_b}{2} = \_\_\_\_\_$$

Usa el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de a_p de acuerdo con las figuras de la: **Pirámide regular de base triangular y el siguiente triángulo.**

Triángulo rectángulo formado por la apotema de la base, apotema de la pirámide y altura de la pirámide



$$a_p^2 = h^2 + a_b^2$$

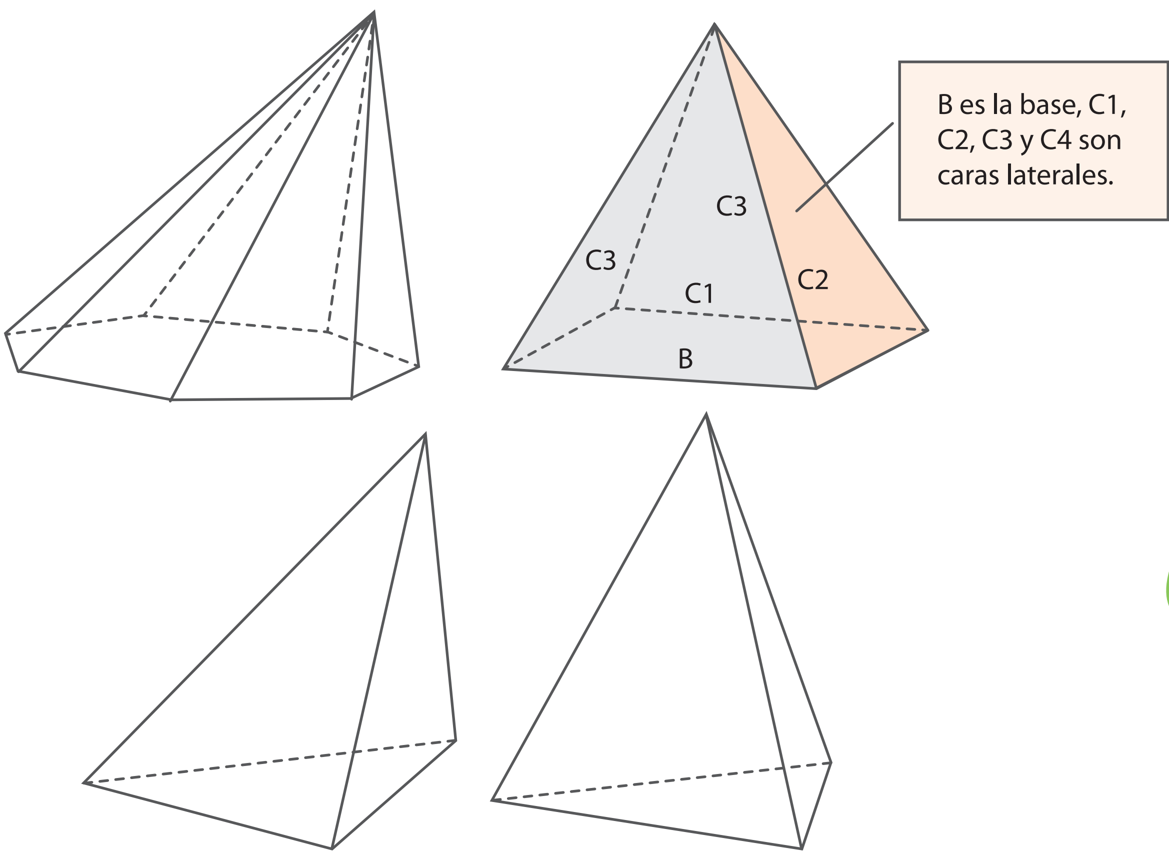
$$a_p = \sqrt{h^2 + a_b^2}$$

$$a_p = \_\_\_\_\_$$

Aprendamos algo nuevo

Volúmenes y áreas de pirámides

Los sólidos de la siguiente figura son poliedros que se conocen como pirámides.

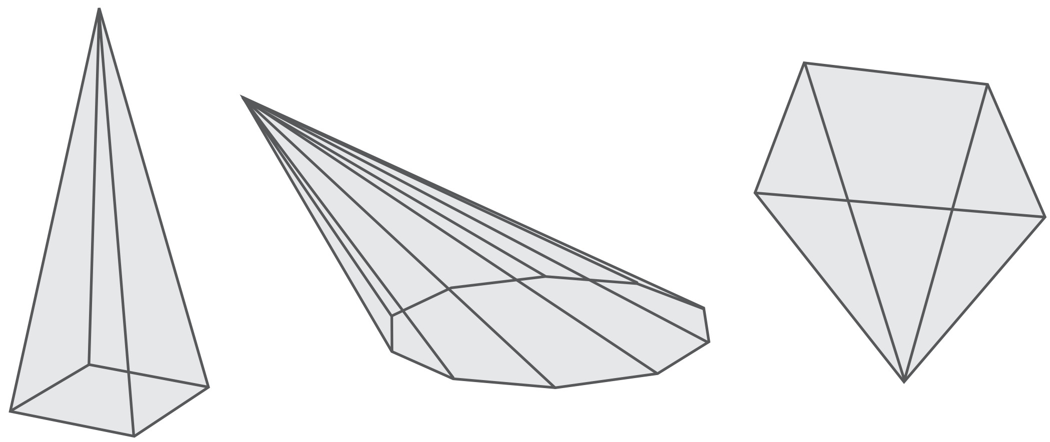


Para que un poliedro sea considerado pirámide debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Tiene como base a un polígono cualquiera.

2. Sus caras laterales son triángulos.

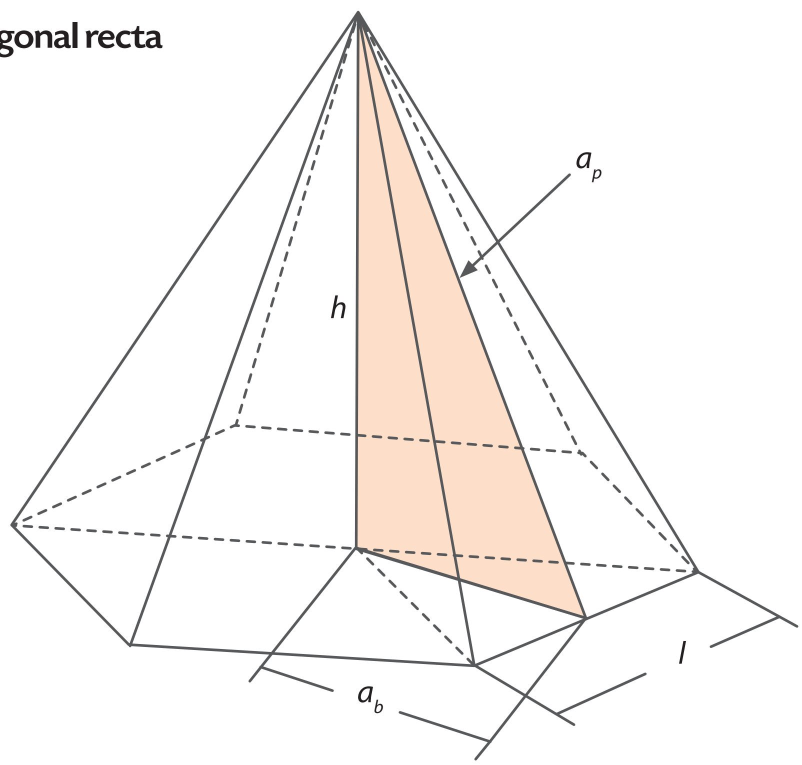
- Determina las bases y caras laterales de las siguientes pirámides:



Toda pirámide tiene un punto denominado ápice que corresponde al más alto y proyectado hasta la base, forma el segmento altura. Además, es perpendicular a la base.

- Traza la altura de las pirámides anteriores y determina su ápice.

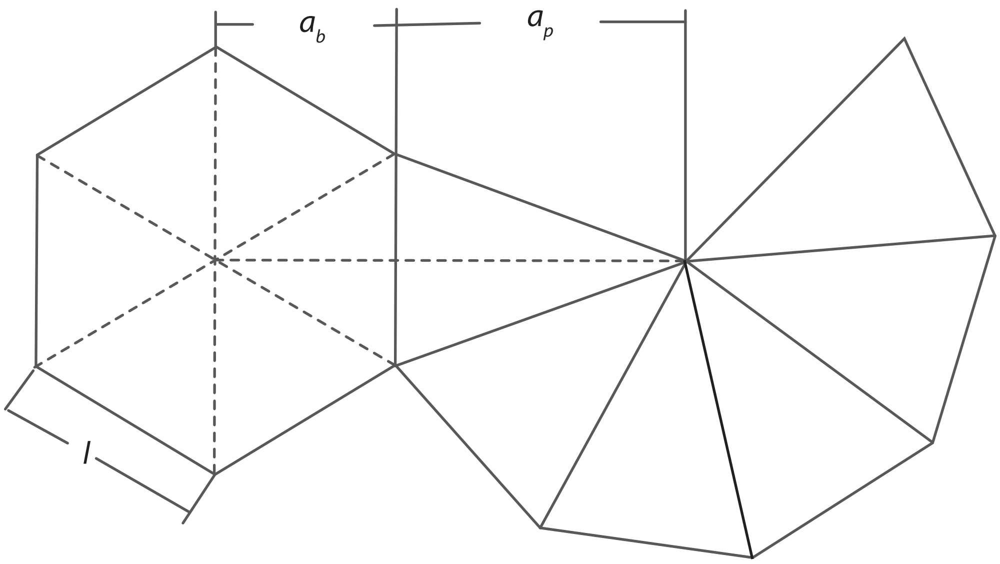
Pirámide hexagonal recta



Se fabrica una vela piramidal de base hexagonal regular de 5 cm de lado, 4,33 cm de apotema de la base y 10 cm de altura de la pirámide, como se ilustra en la figura anterior.

El desarrollo del plano de dicha pirámide corresponde a seis triángulos isósceles y un hexágono. Una posible organización se muestra en la siguiente figura.

Desarrollo de una pirámide regular recta hexagonal



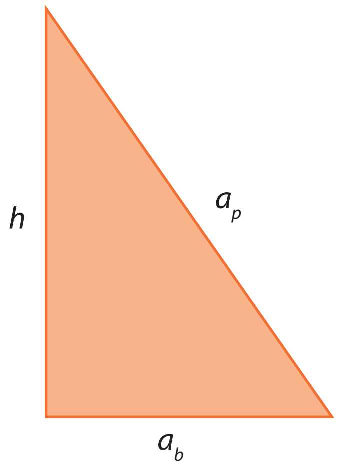
Realiza dos desarrollos de planos distintos al que se muestra en la figura.

- ¿Podrías calcular el área total del papel necesario para envolver la vela?

Para hallar el área total de una pirámide regular conociendo el lado de la base, la apotema de la base y la altura de la pirámide, puedes seguir el siguiente procedimiento.

Cálculo de la apotema de la pirámide o altura de una cara triangular a_p

Si observas, las caras laterales de la vela son seis triángulos isósceles congruentes. Debes hallar la altura a_p de uno de esos triángulos, (figura anterior). También es la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son a_p y h, según se muestra en la figuras **Pirámide hexagonal recta** y en la siguiente figura. De tal forma que se puede usar el teorema de Pitágoras, en el triangulo formado, como se ilustra en la figura de la siguiente página.



$$a_p^2 = h^2 + a_b^2$$

$$a_p^2 = 10^2 + 4.33^2$$

$$a_p = \sqrt{10^2 + 4.33^2}$$

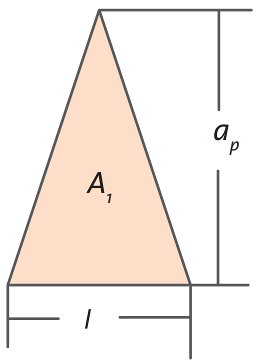
$$a_p = \_\_\_\_\_$$

Área A_1 de una cara triangular lateral

Teniendo en cuenta que el área del triángulo es:

$A_1 = \dfrac{\textit{Base del triángulo} \bullet \textit{Altura del triángulo}}{2}$, como se ilustra en la figura **Cara triangular de una pirámide** $A_T = \dfrac{\textit{base} \bullet \textit{altura}}{2}$

Cara triangular de una pirámide



De acuerdo con la forma de la vela, el área de una cara lateral es:

$$A_1 = \frac{l \bullet a_p}{2}$$

El área lateral será seis veces el área A_1. Por tanto la fórmula quedará:

$$A_{lateral} = \frac{6 \cdot l \cdot a_p}{2}$$

Observa que 6 • *l* es el perímetro del polígono de la base (P_p). Entonces el área lateral se puede escribir como:

$$A_{lateral} = \frac{P_p a_p}{2}$$

El área lateral de la vela es:

$$A_{lateral} = \frac{6 \cdot 5\ cm \cdot 10{,}9\ cm}{2}$$

$$A_{lateral} = 163.5\ cm^2$$

Área del polígono de la base.

$$A_{base} = \frac{P_p a_b}{2}$$

$$A_{base} = \frac{6 \cdot 5\ cm \cdot 4{,}33\ cm}{2}$$

$$A_{base} = 64{,}95\ cm^2$$

El área total de la superficie de la pirámide es:

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$$

$$A_{total} = 64{,}95 cm^2 + 163{,}5\ cm^2$$

$$A_{total} = 228{,}45 cm^2$$

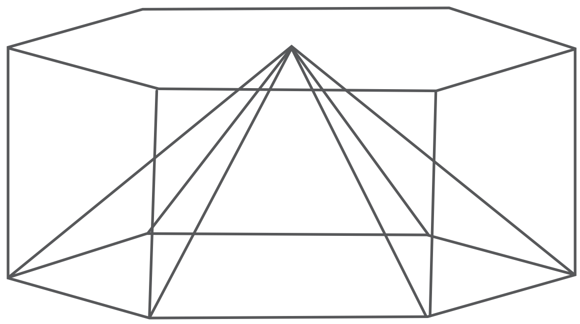
- ¿Podrías decir qué volumen de parafina se requiere para fabricar la vela?

El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen del prisma que la circunscribe. (Ver figura)

Pirámide contenida en un prisma

El volumen de una pirámide es $V_p = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3}$

Para el caso de la pirámide de la vela su volumen sería:



$$V_p = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$$

$$V_p = \frac{64{,}95\ cm^2 \cdot 10\ cm}{3}$$

$$V_p = 216{,}5\ cm^3$$

Estos cálculos sirven para pirámides cuyas caras laterales son triángulos congruentes; en caso contrario, se tendrán que hacer los cálculos de cada cara lateral.

La relación de la longitud de la circunferencia y su radio

1. Traza una circunferencia de radio *r* cualquiera.

2. Mide el radio *r* y multiplica este valor por dos para obtener el diámetro *D*.

3. Mide el perímetro o la longitud de la circunferencia. Para hacerlo coloca cuidadosamente un hilo sobre la circunferencia y corta el hilo exactamente cuándo completa la vuelta.

4. Extiende el hilo y mide su longitud con una regla. Esa es la medida aproximada de la longitud de la circunferencia (P_c).

5. Establece una división entre el valor de esa longitud y el diámetro.

$$\frac{P_c}{D}$$

- Compara tu resultado con el de otros compañeros. ¿Son parecidos los valores? ¿Les dio 3 con unas cifras decimales?

El descubrimiento de esta relación se le ha atribuido al griego Arquímedes que buscó la relación entre la longitud de la circunferencia con respecto al diámetro. Encontrando el valor cercano a 3 (7/10). Con el avance de los cálculos este valor se conoce como el número irracional π que se lee "pi".

El valor que utilizamos en la escuela es 3,1416 al número π. Es una aproximación ya que actualmente al número π se le han encontrado diez mil cifras decimales.

La relación entre el perímetro y el diámetro se puede escribir como:

$$\pi = \frac{P_c}{D}$$

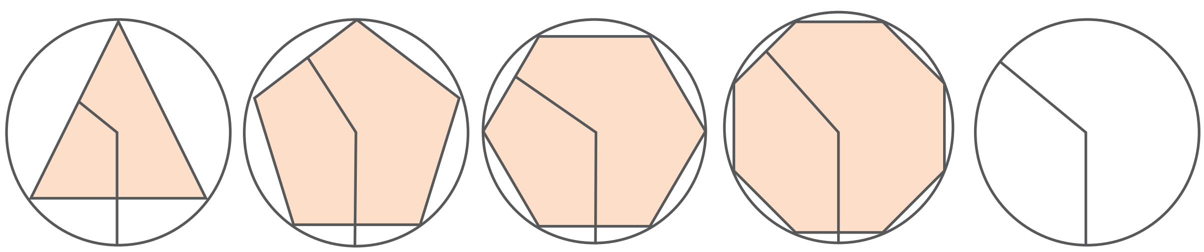
O en términos del radio $\pi = \frac{P_c}{2 \cdot r}$

Entonces la longitud de la circunferencia P_c se determina por: $P_c = 2 \cdot \pi \cdot r$

Relaciones entre prisma y cilindro

Observa los polígonos de la siguiente figura. En la medida en que aumenta el número de lados del polígono, la apotema se asemeja más al radio de la circunferencia que lo circunscribe y el perímetro del polígono se asemeja al perímetro de la circunferencia.

Relación entre polígonos y la circunferencia que lo circunscribe



Esto nos permite establecer las analogías que se muestran a continuación, en la tabla **Relaciones de perímetro, área y volumen en prismas y cilindros**, así como entre pirámides y conos, como se indica en la tabla **Relaciones de perímetro, área y volumen en pirámides y conos,** más adelante.

Veamos las relaciones encontradas entre los prismas y los cilindros.

Relaciones de perímetro, área y volumen en prismas y cilindros

	Prisma	Cilindro
Perímetro	Perímetro del polígono $P_p = l \cdot n$	Perímetro del círculo $P_C = 2 \cdot \pi \cdot r$
Área de la base	Área del polígono base $A_{base} = \frac{P_p \cdot a_b}{2}$	Área del círculo $A_c = \frac{P_c \cdot r}{2}$ $A_c = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot r}{2}$ $A_c = \pi \cdot r^2$
Área lateral	$A_{lateral} = P_p h$	$A_l = P_c h$ $A_l = (2 \cdot \pi \cdot r)h$
Volumen	$V = A_{base} \cdot h$	$V_c = A_c \cdot h$ $V_c = (\pi \cdot r^2)\, h$

Consideremos el caso del prisma que contiene la vela de parafina que hemos venido estudiando. Dicho prisma tendrá lado l = 5 cm y altura h= 10 cm, a su vez, el prisma está inscrito en un cilindro de radio de la base r = 5 cm.

El área del círculo de la base del cilindro será:

$$A_c = \pi \cdot r^2 = 3{,}1416 \cdot (5\ cm)^2 = 78{,}54\ cm^2$$

El área lateral del cilindro será:

$$A_l = (2 \cdot \pi \cdot r)\, h = (2 \cdot 3{,}1416 \cdot 5\ cm) \cdot 10\ cm = 314{,}16\ cm^2$$

El área total será:

$$A_{Total} = A_c + A_l = 78,54\ cm^2 + 314,16\ cm^2 = 389,9$$

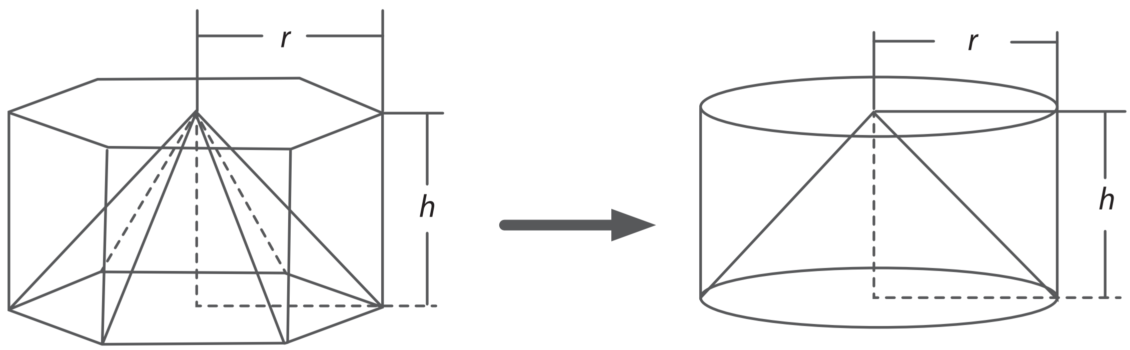
El volumen será:

$$V_c = (\pi \cdot r^2)\ h = (3,1416 \cdot (5\ cm)^2) \cdot 10\ cm = 785,4\ cm^3$$

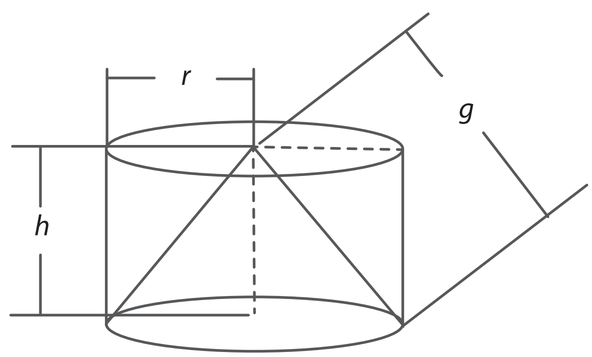
Relaciones entre pirámide y cono

Ya hemos visto que en la medida en que aumenta el número de lados de un polígono regular, la apotema se asemeja más al radio de la circunferencia que lo circunscribe y el perímetro del polígono al perímetro de la circunferencia. (Ver figura **Relación entre polígonos y la circunferencia que lo circunscribe**). Esto nos permite establecer analogías entre conos y pirámides tal como se muestra en la tabla **Relaciones de perímetro, área y volumen en pirámides y conos** y en la siguiente figura.

Similitud entre pirámide y cono

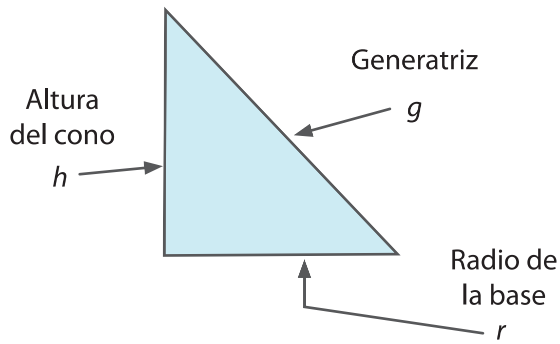


Cono inscrito en un cilindro



Como se observa en la figura anterior, se inscribe un cono en el cilindro y se determina una distancia entre el vértice del cono y la circunferencia de la base que se denomina generatriz. El vértice del cono se parece al ápice de la pirámide.

Para hallar el valor de la generatriz se dibuja un triángulo rectángulo con las respectivas distancias. El valor de la medida de la generatriz g se determina mediante la aplicación del teorema de Pitágoras así:



$$g^2 = h^2 + r^2$$

$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$

En la siguiente tabla, se muestran las relaciones encontradas de las pirámides y los conos.

Relaciones de perímetro, área y volumen en pirámides y conos

	Pirámide	Cono
Área de la base	Área del polígono $A_P = \frac{P_p \cdot a_b}{2}$	Área del círculo $A_C = \frac{Pc \cdot r}{2}$ $A_C = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot r}{2}$ $A_C = \pi \cdot r^2$
Área lateral	$A_{LP} = \frac{P_p \cdot a_b}{2}$	$A_{LC} = \frac{P_c \cdot g}{2}$ $A_{LC} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot g}{2}$ $A_{LC} = \pi \cdot r \cdot g$
Volumen	$V_P = \frac{A_p \cdot h}{3}$ Donde h es la altura de la pirámide.	$V_C = \frac{A_c \cdot h}{3}$ $V_C = \frac{(\pi \cdot r^2) \cdot h}{3}$ Donde h es la altura del cono.

Consideremos el caso de la vela de parafina que hemos estudiado. Recordemos que sus dimensiones son: lado $l = 5$ cm, altura $h = 10$ cm, apotema de la base $a_b = 4{,}33$ cm y apotema de la pirámide $a_p = 10{,}9$ cm, radio de la circunferencia que circunscribe al polígono base $r = 5$ cm.

La pirámide está inscrita en un cono de radio $r = 5$ cm y altura $h = 10$ cm. Averigüemos ahora el valor de la generatriz g, el área del círculo A_c, área latera A_L, área total A_{Total} y volumen del cono V_c.

Generatriz

De acuerdo con el teorema de Pitágoras:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$g = \sqrt{(10\,cm)^2 + (5\,cm)^2}$$

$$g = 11{,}18\,cm$$

Área del círculo

$$A_c = \pi \cdot r^2 = 3{,}1416 \cdot (5\,cm)^2 = 78{,}54\,cm^2$$

Área lateral del cono

$$A_{LC} = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}1416 \cdot 5\,cm \cdot 11.18\,cm^2 = 175{,}62\,cm^2$$ aproximadamente.

Área total del cono

$$A_{total} = 78{,}54 cm^2 + 175{,}62\,cm^2 = 254{,}16\,cm^2$$

Volumen del cono

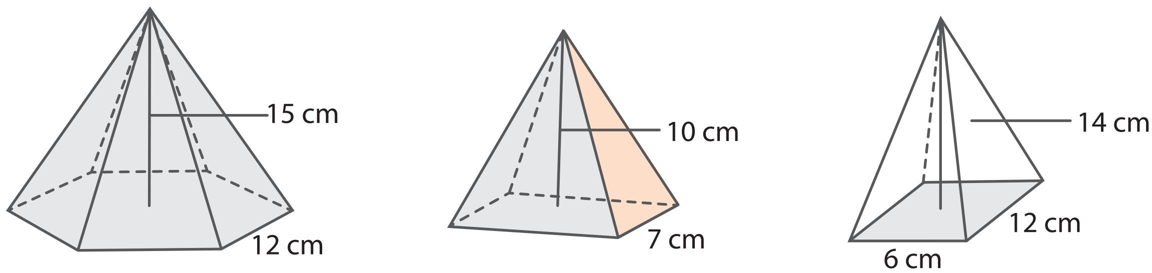
$$V_C = \frac{(\pi \cdot r^2) \cdot h}{3}$$

$$V_C = \frac{3{,}1416 \cdot (5\,cm)^2 \cdot 10cm}{3} = 261{,}80\,cm^3$$

Ejercitemos lo aprendido

1. Calcula la superficie y el volumen de las pirámides de la siguiente figura.

Pirámides regulares rectas



Responde:

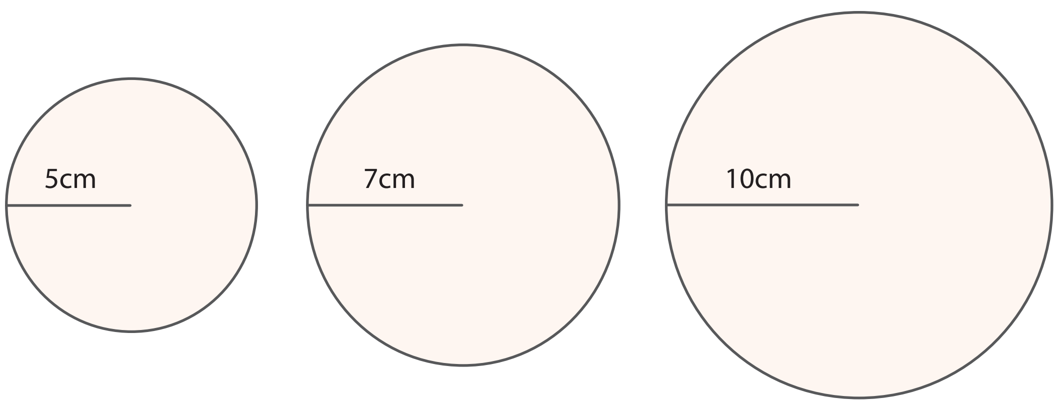
a. ¿Cuál es la pirámide que tiene mayor volumen?

b. ¿Cuál es la diferencia entre la pirámide de mayor volumen y la de menor?

c. Calcula las áreas totales y las áreas laterales de cada una de las pirámides.

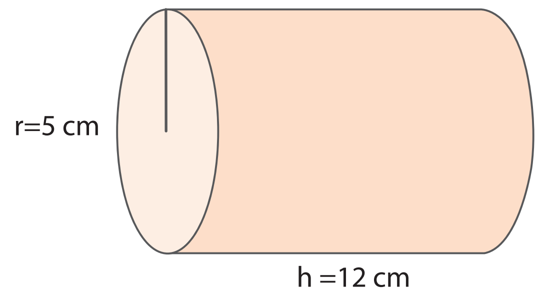
2. Calcula el perímetro de las circunferencias y las áreas de los círculos de la figura.

Círculos de diferentes diámetros



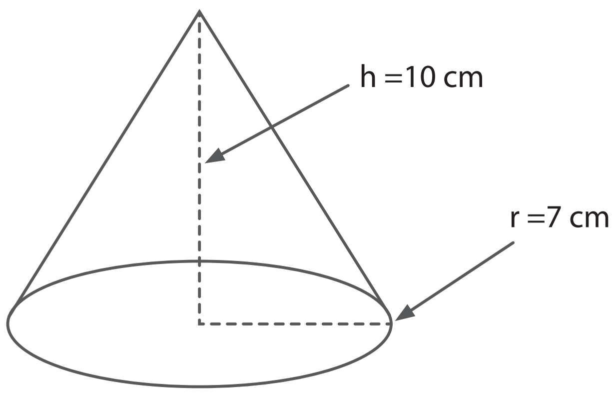
3. Carlota modeló un cilindro en greda (Ver figura cilindro) y quiere calcular el área total del sólido y el volumen que ocupa. Ten en cuenta los datos de la imagen y ayúdale a realizar los cálculos necesarios. Considera el valor aproximado de π como 3,1416.

Cilindro



4. Halla el área de la base, el área lateral, el área total y el volumen del cono de la figura Cono.

Cono



Guía 20

Aplicación de cálculos de volúmenes

Estándares:

- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

En este momento has estudiado cómo se calculan volúmenes y áreas de cuerpos geométricos como prismas, pirámides, cilindros y conos. Has descubierto que no solo se trata de un tema muy interesante sino además con una gran aplicabilidad. ¿Imaginas todo lo que podría construirse si ahora combinamos la utilidad individual que tienen estos cuerpos para obtener y estudiar cuerpos de formas diversas?

Lo que sabemos

En una panadería se producen mantecadas en moldes de 5 cm x 50 cm x 70 cm que generan que tenga forma de prisma. Al hornearse, la masa aumenta el espesor a 7 cm. Para venta al público deben dividirlas en porciones en forma de prisma de 7 cm x 10 cm x 5 cm.

- Calcula cuántas porciones se obtienen de dividir una mantecada hecha en un molde completo.
- Realiza una posible forma que se puede dividir la mantecada para obtener las porciones calculadas.

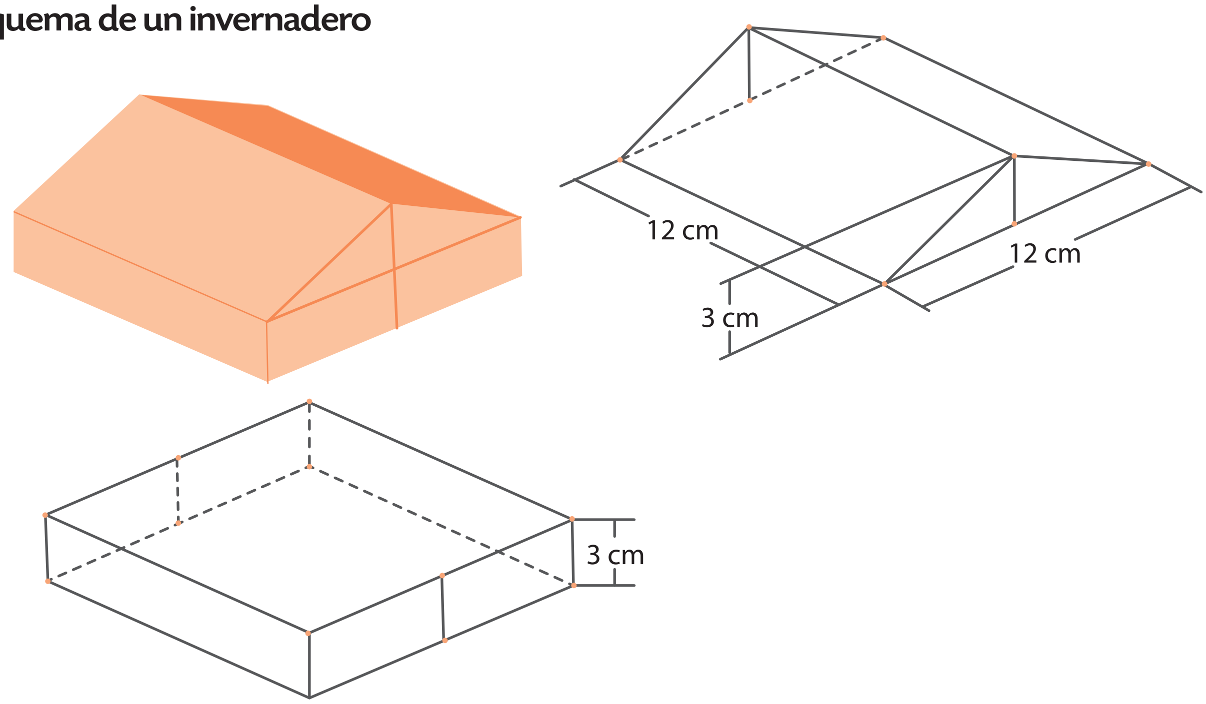
Un bocadillo veleño tiene forma de prisma con dimensiones 4 cm x 3 cm x 2 cm.

- Expresa las posibles formas de dividir el bocadillo veleño si se quieren obtener 12 unidades. ¿Cuáles son las dimensiones de esos bocadillos?
- Di las posibles formas de dividir el bocadillo veleño si se quieren obtener 24 unidades. ¿Cuáles son las dimensiones de esos bocadillos?
- Enumera las posibles formas de dividir el bocadillo veleño si se quieren obtener 36 unidades. ¿Cuáles son las dimensiones de esos bocadillos?

Aprendamos algo nuevo

En una finca hay un invernadero con las dimensiones que se señalan en el **Esquema de un invernadero**. ¿Cuánto polietileno se requiere para cubrirlo y cuál es el volumen?

Esquema de un invernadero



Observen que el invernadero se puede representar por la unión de dos sólidos.

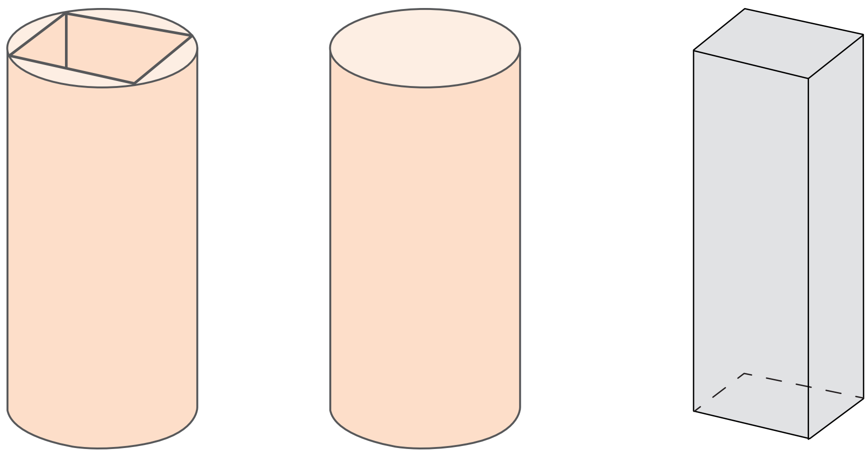
- ¿Qué sólidos son?
- En la forma del invernadero se identifican un prisma triangular y un prisma cuadrangular. Identifiquen los polígonos que forman la base de cada prisma.
- Hallen el área del polígono que forma la base de cada prisma.
- Calculen el volumen de cada uno de los prismas.
- Calculen el área total del prisma cuadrangular y del prisma triangular.

Los volúmenes de algunos cuerpos se pueden calcular como suma de volúmenes de poliedros o sólidos conocidos ya que este cuerpo es composición de otros sólidos.

- Sumen los volúmenes individuales de los prismas para hallar el volumen total y sumen las áreas cubiertas para obtener el total de polietileno requerido.

Un silvicultor cosecha un árbol con un fuste de 71 cm de diámetro y 9 metros de longitud. Para obtener mejor precio, saca piezas prismáticas comerciales de 300 cm x 50 cm x 50 cm, como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es el volumen de madera útil? ¿Cuánto el volumen del retal o sobrante?

Obtención de piezas comerciales de un tronco de árbol



Volumen de retal (V_R) = Volumen de cilindro (V_C) = Volumen de prisma (V_P)

Para responder estas preguntas inicialmente debe verificarse que efectivamente es posible obtener estas piezas a partir del fuste del árbol.

- ¿Es posible dividir el tronco de 9 m de largo en secciones de 300 cm de largo?, ¿cuántas secciones de un tronco se pueden obtener?

- ¿Es posible que del círculo de 71 cm de diámetro que tiene el fuste del árbol pueda obtenerse un cuadrado de 50 cm de lado? ¿Cómo puedes verificarlo?

Si observas con detenimiento el tronco se puede representar como un cilindro de 30,5 cm de radio, del que se extraerá un prisma cuadrangular regular, cuya base cuadrada mide de lado 50 cm.

Calcula:

- Área del círculo del tronco del árbol ($A_c c$) y del polígono base del prisma $A_p(A)$.
- Volumen cilíndrico del tronco del árbol V_c
- Volumen del prisma V_p (Vp)
- Para hallar el volumen del retal V_r se debe establecer una diferencia entre los volúmenes calculados. Realiza los cálculos:

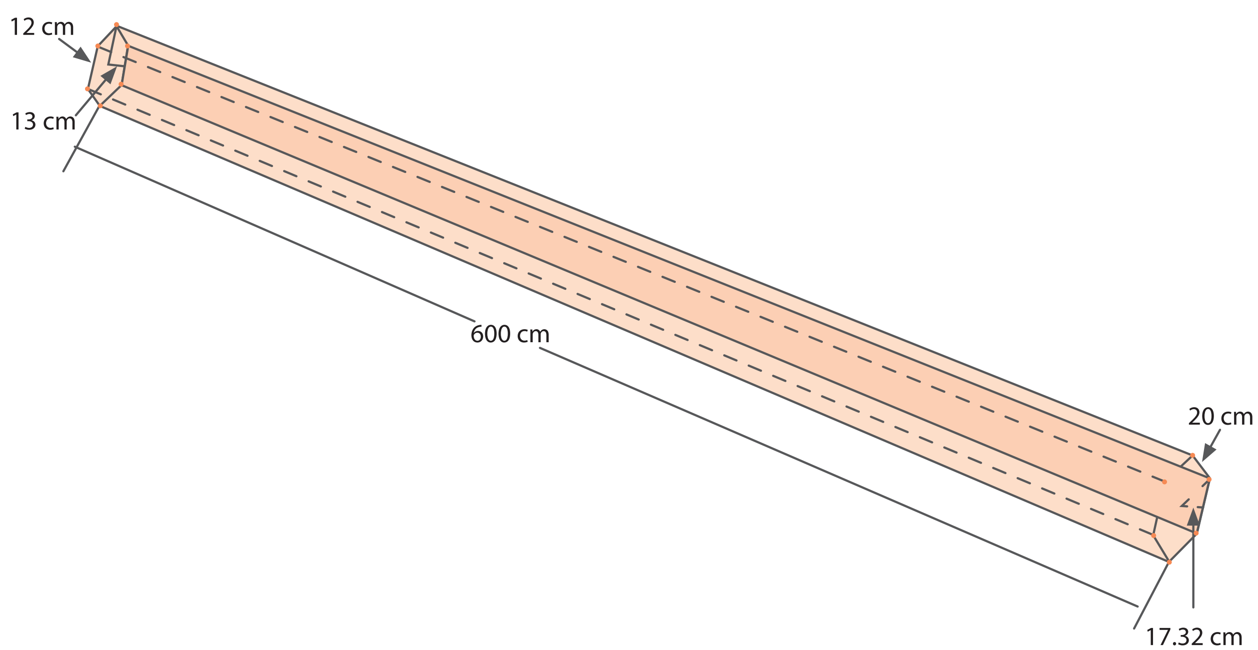
$$V_r = V_c - V_p$$

Trabajo en grupo

En grupos de dos estudiantes realicen la siguiente actividad.

Un poste macizo de la electricidad tiene forma de pirámide hexagonal truncada es decir una pirámide a la que se le ha quitado el ápice. La base mayor tiene 20 cm de lado y 17,32 cm de apotema. La base menor tiene 15 cm de lado y 13 cm de apotema y la altura del poste es de 600 cm. Ver figura **Esquema de un poste para electricidad**. Averiguar el volumen.

Esquema de un poste para electricidad



Asociamos a la forma de un prisma regular de base hexagonal.

Estimen el volumen del poste mediante dos cálculos:

- El primero corresponde al volumen de un prisma con la base mayor y la misma altura, este prisma tiene un volumen un poco mayor que el poste.
- El otro cálculo corresponde al volumen del prisma con la base menor y la misma altura. En esta ocasión se obtiene un volumen menor que el del poste.

Completen la tabla, **Valores de prismas relacionados con el poste.**

Comparen los dos datos de volumen. Una forma de estimar mejor el volumen del poste es calculando el promedio de los valores de los dos volúmenes de los prismas.

Valores de prismas relacionados con el poste

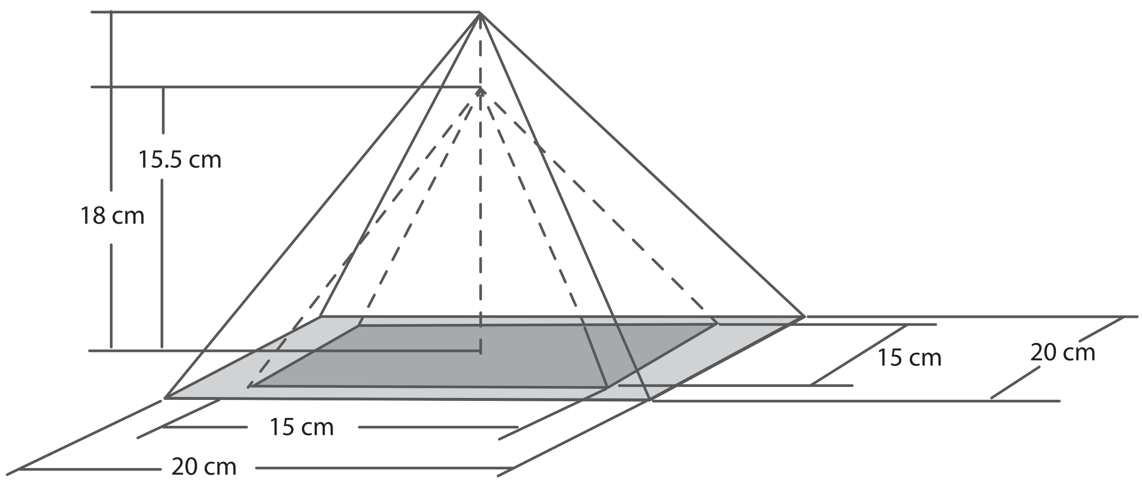
Polígono	Número de lados n	Lado l	Apotema a_b	Perímetro del polígono P_{pP}	Área del polígono a_{pP}	Altura h	Volumen V
Base mayor	6	20 cm	17,32 cm				
Base menor	6	15 cm	8,09 cm				
Promedio							

Ejercitemos lo aprendido

1. Una fábrica de velas ofrece velas piramidales huecas como se observa en la siguiente figura.

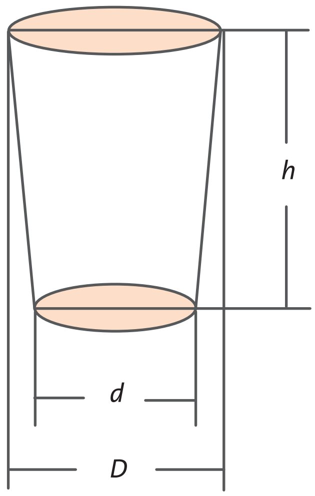
   ¿Cuánto volumen de parafina se requiere para fabricar una vela como estas?

Pirámide hueca



2. Busca un vaso que tenga el fondo más angosto que la boca. Ver la siguiente figura.

Vaso en forma de cono truncado

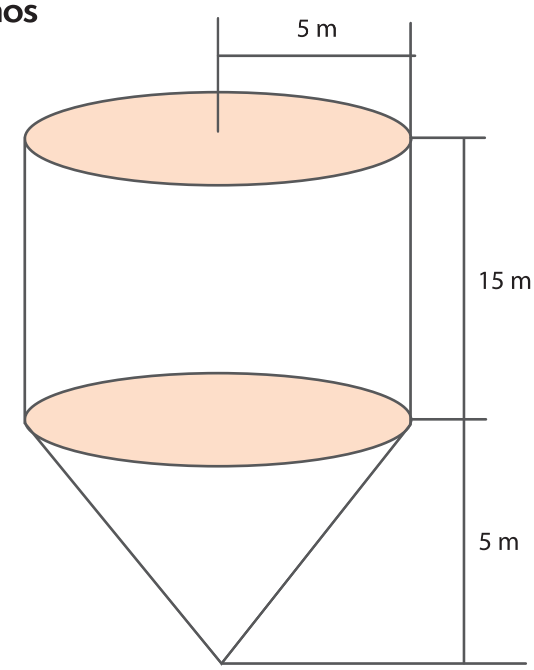


- Mide la profundidad de un vaso, el diámetro mayor D y el menor d.
- Mide la profundidad h del vaso.
- Calcula el volumen estimado por un cilindro cuya base es la boca del vaso.
- Calcula el volumen estimado por un cilindro cuya base es el fondo del vaso.
- Promedia los valores de los volúmenes de los dos cilindros.
- Llena de agua el vaso.
- Con una jeringa o una probeta mide el contenido de agua del vaso. Así obtienes el volumen del vaso.
- ¿Cuál de las estimaciones es más cercana al volumen real del vaso?
- ¿Cuánto es la diferencia entre los valores del volumen del vaso, estimado por los volúmenes de los cilindros y el medido con el instrumento?

Apliquemos lo aprendido

1. Cierto tipo de arroz pesa 700 kg por metro cúbico. Un depósito cuenta con silos cuyas dimensiones se muestran en la siguiente figura. ¿Cuántos kilogramos de arroz se pueden depositar en un silo de este tipo?

Esquema de silo para granos

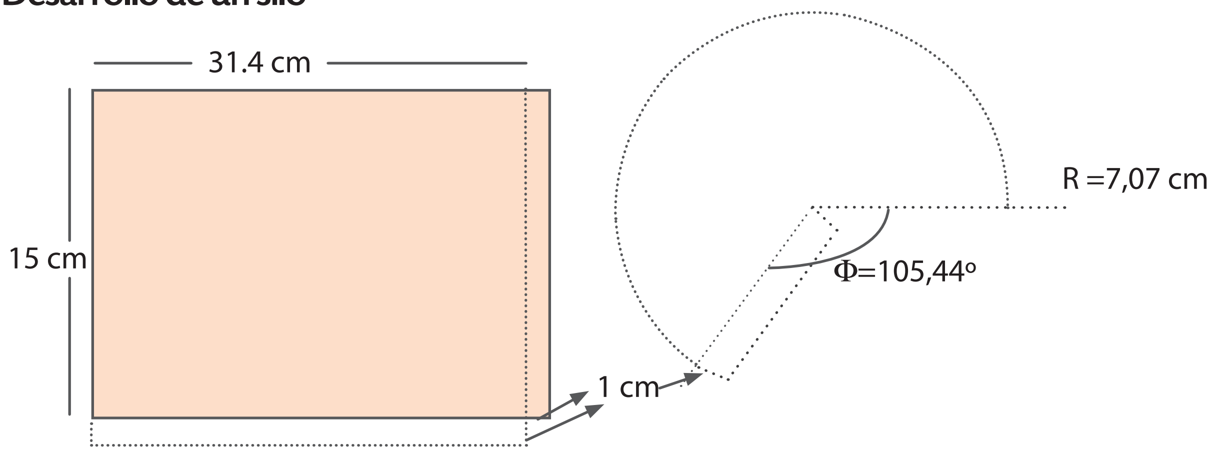


- Construye en cartón cartulina un modelo del silo con la misma forma del ejercicio anterior a escala 1 cm: 100 cm; es decir, 1 cm representa 1 m.
- ¿Cuáles son los sólidos que forman el silo?
- Verifica los valores a escala que necesitas para construir un silo semejante al original.
- Realiza los correspondientes desarrollos planos del modelo para construir el silo.

Sugerencia: Usa las pestañas para pegar el cilindro, el cono y luego unir el cilindro con el cono. Ver figura **Desarrollo de un Silo.**

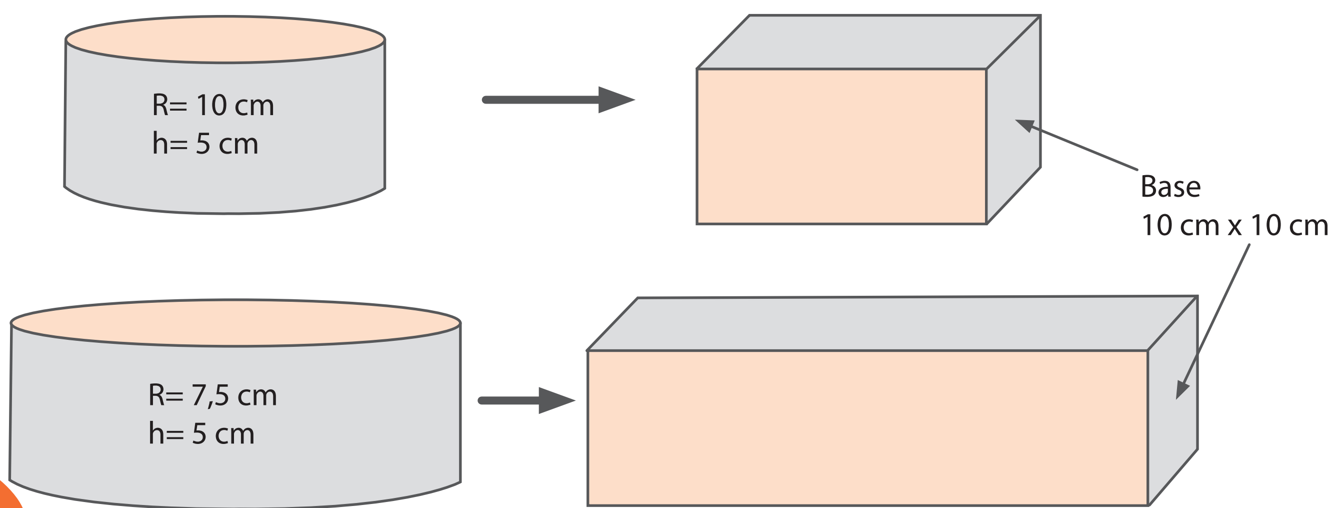
- Calcula el volumen total de este modelo a escala.
- Llena el modelo con arroz y mide el volumen de arroz contenido en el modelo a escala, vertiendo el contenido en una probeta, si no cuentas con probeta puedes usar un medidor de un insumo agrícola líquido. También puedes usar una jeringa de uso veterinario o un biberón aforado. ¿Este valor confirma los cálculos matemáticos encontrados anteriormente?

Desarrollo de un silo



2. Un productor de lácteos ofrece queso en presentación cilíndrica, pero descubre que los clientes prefieren la presentación en forma de prisma con base 10 cm x 10 cm. Ayúdale a calcular las dimensiones de los nuevos moldes para remplazar los actuales, de tal forma que el volumen de los quesos sea el mismo. Ver la siguiente figura.

Cilindros y prismas equivalentes



Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

Las preguntas del 1 al 3 se responden de acuerdo a las siguientes indicaciones. Si ambas frases son ciertas y la segunda es consecuencia de la primera marque "a". Si ambas frases son ciertas y la segunda no es consecuencia de la primera marque "b". Si sólo la primera frase es cierta marque "c". Si sólo la segunda frase es cierta marque "d".

1. La apotema de una pirámide se puede obtener usando el teorema de Pitágoras.

   La generatriz del cono es similar a la apotema de una pirámide

   a ( )   b ( )   c ( )   d ( )

2. La apotema de la base y la apotema de una pirámide son la misma medida.

   En un prisma regular la apotema de la base es la distancia del centro de la base al centro de uno de los lados del polígono base

   a ( )   b ( )   c ( )   d ( )

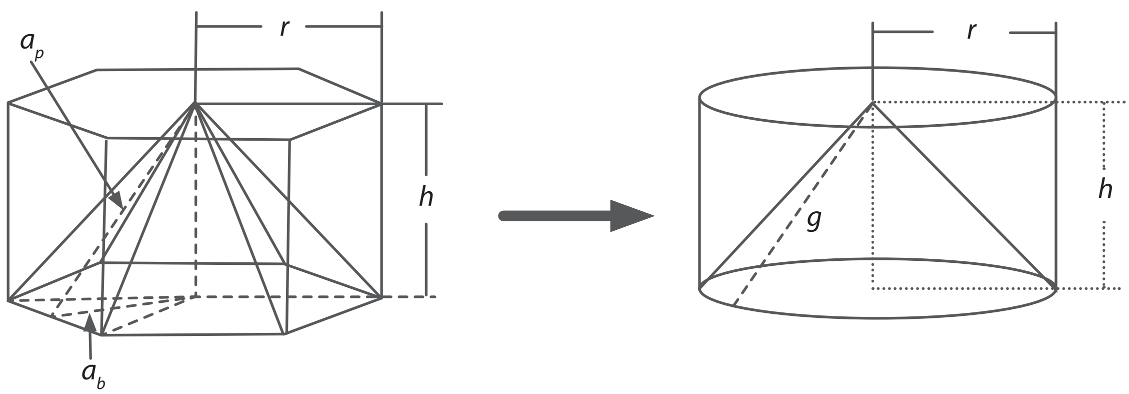
3. El volumen de los prismas se puede medir en m^2.

   El área lateral de un prisma siempre es mayor que el área de la base

   a ( )   b ( )   c ( )   d ( )

Las preguntas del 4 al 6 se apoyan en la información que presenta la siguiente figura:

Relaciones entre sólidos



1. Si se tienen dos prismas rectos regulares se puede afirmar que:
   a. Si tienen igual volumen, también deben tener la misma área lateral.
   b. Si tienen igual área lateral y altura, también deben tener el mismo perímetro.
   c. a y b son ciertas.
   d. a y b son falsas.
2. Sobre un cono se puede afirmar que:
   a. La altura de un cono es la distancia entre el círculo base y el ápice del cono.
   b. Un cono es aproximadamente igual a una pirámide cuya base tiene muchos lados.
   c. a y b son ciertas.
   d. a y b son falsas.
3. La razón entre el perímetro de una circunferencia y su radio es:
   a. π
   b. Aproximadamente 6,2832
   c. 2π
   d. b y c son correctas

Trabajo en grupo

¿Cómo me ven los demás?

En grupos de tres estudiantes realicen la siguiente actividad:

Materiales: Un pliego de cartulina, cinta adhesiva, compás, lápiz, regla o escuadra, cuaderno y lapicero.

- Cada uno debe construir uno de los sólido estudiados: prisma, pirámide cilindro o cono.
- Realicen intercambio de sólidos. Quién recibe el sólido calcula el volumen que ocupa y el área de cartulina empleada.
- Realicen de nuevo intercambio de sólidos y realicen los cálculos del volumen y el área de cartulina.

- Comparen los resultados de los cálculos que obtuvieron de cada uno de los sólidos ¿Son parecidos o distintos?
- Discutan los procedimientos empleados haciendo énfasis en las diferencias y los posibles errores.
- Cada uno escriba cuáles errores propios descubrió gracias al aporte de los compañeros y la forma de solucionarlos.
- Igualmente escriban cuáles fueron sus contribuciones para que los demás compañeros del grupo mejoraran sus procedimientos y cálculos.
- Preparen una exposición corta explicando los resultados de la actividad.

¿Qué aprendí?

Responde según la manera en la que te desenvolviste en el desarrollo del módulo y justifica tus respuestas.

	Sí	A veces	No	¿Por qué?
Elaboro dibujos o modelos geométricos para solucionar problemas de la realidad.				
Utilizo procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes de prismas, pirámides conos y cilindros.				
Reconozco las relaciones que existen entre pirámide y cono.				
Reconozco las relaciones que existen entre prisma y cilindro.				
Generalizo situaciones para determinar comportamientos de variables.				
Utilizo apropiadamente los implementos de medida y valoro el beneficio que me trae usarlos.				
Realizo mis tareas responsablemente tanto en los trabajos individuales como grupales.				
Estoy dispuesto a escuchar recomendaciones para mejorar mi desempeño y contribuyo respetuosamente con el mejoramiento del de mis compañeros.				

Con tu maestro, determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento.

Módulo 6

El mundo de lo posible

¿Qué vas a aprender?

La probabilidad es una herramienta, que nos permite establecer el porcentaje de éxito al escoger un resultado. Imaginemos por un momento estar lanzando una moneda, ¿Cuáles son los posibles resultados? cara o cruz, como resultado, pero utilizando esta rama de las Matemáticas, podemos afirmar que la posibilidad de conseguir como resultado cara, sería una de dos posibles respuestas, lo que en términos numéricos seria el 50% de las posibilidades.

Entonces, en este módulo aprenderás a representar de manera numérica las posibilidades que existen para que un evento ocurra en una situación, bajo unos criterios determinados.

Estándares básicos de competencias

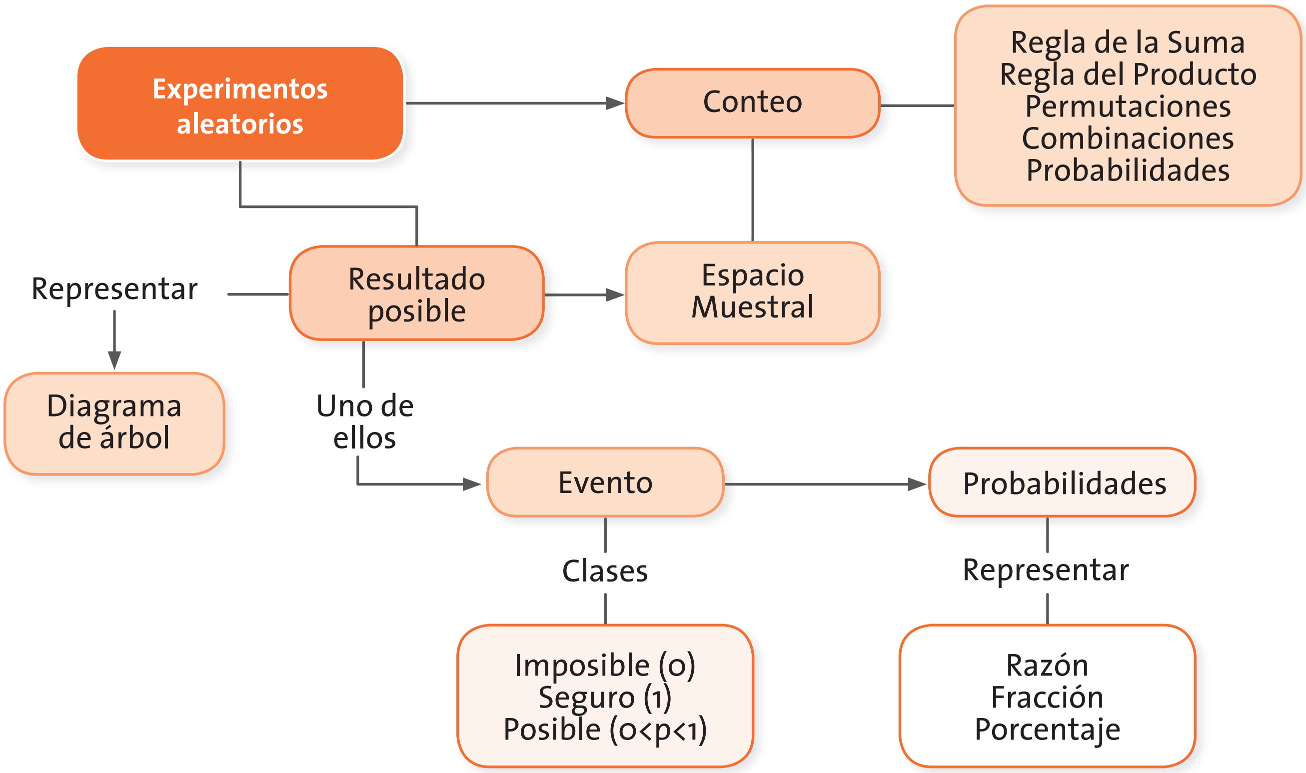
Pensamiento aleatorio

- Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).
- Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).

Este módulo te ayudará a afianzar los estándares básicos de competencias, mencionados en la parte superior, mediante los conceptos relacionados con una rama de la matemática muy importante: la probabilidad. En la siguiente tabla se especifican las guías que contiene el módulo y lo que se desarrolla en cada una de ellas.

Guías	Conceptos	Procesos
Guía 21. Lo posible en un experimento	**Experimentos aleatorios** **Espacio muestral** **Tipos de eventos: imposible y probable**	• Se favorece el proceso de **formulación, comparación y ejercitación de procedimientos** al permitir a los estudiantes la construcción y ejecución de procedimientos mecánicos o de rutina como el cálculo de la probabilidad de un evento simple o la representación mediante diagramas de árbol de diversos experimentos aleatorios. • También se favorece **la modelación** cuando se calculan probabilidades para eventos simples, usando métodos como, diagramas de árbol y conteo. • La **formulación, tratamiento y resolución de problemas,** al solucionar diferentes situaciones de la vida cotidiana relacionada con la probabilidad de un evento simple.
Guía 22. La probabilidad de un evento	**Probabilidad** **Eventos equiprobables**	
Guía 23. Formas de contar	**Conteo** **Permutaciones** **Combinaciones** **Regla de la suma** **Regla del producto**	

El siguiente esquema te muestra la manera en que se pueden relacionar los conceptos.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Hay preguntas que generalmente nos hacemos, tales como: ¿lloverá hoy?, ¿pasará rápido el bus?, ¿ganaremos el partido?, si estamos en una cancha o en un parque y vemos a un niño y nos preguntamos ¿jugará conmigo? Todas estas y muchas otras preguntas que con frecuencia nos hacemos están relacionadas con el mundo de la probabilidad; esta hermosa rama de las matemáticas relacionada con todo nuestro cotidiano vivir. Cada vez que respondemos o nos responden con frases como: es muy probable, improbable o seguramente, hacemos referencia a esta ciencia, por ejemplo, cuando vamos a subir a un avión y nos preguntamos: ¿Y qué tal que se caiga y nos accidentemos?, o si va a jugar el equipo de fútbol de Brasil contra el equipo de Perú, ¿cuál crees que ganará? Todo este corto preámbulo es para introducirnos en esta rama de la matemática, que se creía pequeña pero que no lo es; gracias a ella podemos modelar parte de las situaciones que nos relacionan con nosotros mismos y con nuestro universo; que se relacionan con el azar.

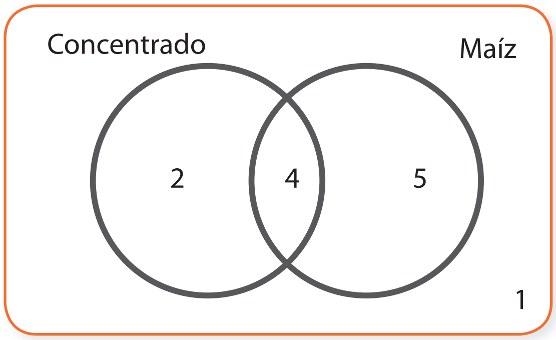
¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En el desarrollo del módulo se proponen diferentes momentos en los que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evidenciar y analizar los progresos que tuviste en cuanto al aprendizaje de los conceptos básicos relacionados con la probabilidad y el conteo.

Las actividades explicativas, al igual que las planteadas en el transcurso del módulo, tienen como finalidad desarrollar los procesos de formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, modelación y resolución de problemas, permitiendo que tanto tú como tu maestro puedan evaluar el grado de aprendizaje con el desarrollo de las actividades y de los talleres; con el fin de lograr el entendimiento y la comprensión de conceptos como evento, espacio muestral, diagrama de árbol y probabilidad; desarrollando la capacidad de establecer relaciones entre las mismas.

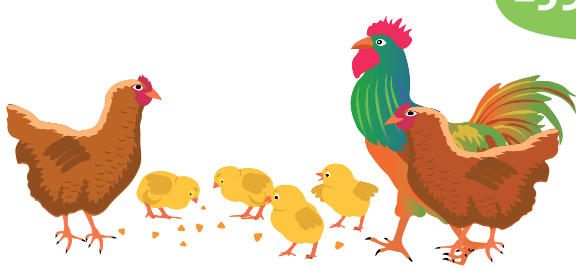
Explora tus conocimientos

Diagrama de Venn



Mauricio es un campesino que vive en el Oriente colombiano, él en su finca tiene algunas gallinas que prefieren comer concentrado y otras que prefieren comer maíz, como lo muestra el diagrama. Con base en la información suministrada por el diagrama contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas gallinas comen maíz?
- ¿Cuántas gallinas comen concentrado?
- ¿Cuántas gallinas comen maíz y concentrado?
- ¿Cuántas gallinas no consumen ninguna de las dos comidas?
- ¿Cuántas gallinas no comen maíz?
- ¿Cuántas gallinas no comen concentrado?
- ¿Cuántas gallinas comen por lo menos una de esas comidas?
- ¿Cuántas gallinas comen sólo maíz?



Guía 21

Lo posible en un experimento

Estándar:

Pensamiento aleatorio

- Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

En esta guía analizarán los resultados posibles de un experimento aleatorio y se reconocerá que uno o más de los resultados se conoce como evento.

Lo que sabemos

Mauricio está jugando parqués y lanza dos dados. Contesta:

¿Sabes cuáles pueden ser los números que caen al lanzar los dados al mismo tiempo?

¿Es posible que al sumar un par de números que salgan en los dados se obtenga como resultado uno?

¿Es posible que al sumar un par de números que salgan en los dados se obtenga como resultado un número mayor a doce?

¿Es posible decir los diferentes pares de números que salgan en los dados si al sumarlos nos dan siete?

Aprendamos algo nuevo

Mauricio ha recogido de sus árboles frutales algunas deliciosas frutas. Imagina que ha colocado en una canasta una pera, una manzana, una naranja y una granadilla, como lo muestra la figura.

Supongamos que Mauricio va a extraer una de estas frutas sin mirarlas. Como en este caso no sabemos la fruta que elegirá, llamamos a esto, un **experimento aleatorio**.

Un experimento es **aleatorio** o probabilístico si puede dar un resultado de los posibles y no se puede asegurar el resultado con anterioridad a lo que va a suceder. En este caso se dice que el resultado depende del azar.

En caso contrario, en aquellos en los que sí se puede asegurar lo que va a ocurrir con anterioridad, se les llama **experimentos determinísticos.**

Reconocer todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama espacio muestral y se representa por la letra E.

En el experimento aleatorio de Mauricio sobre seleccionar una fruta de la canasta, el espacio muestral es el conformado por: pera, manzana, naranja y granadilla y se representa de la siguiente manera:

E = {pera, manzana, naranja, granadilla}

El hecho de tomar una o dos de las frutas es conocido como evento. Es decir, un evento es un subconjunto del espacio muestral.

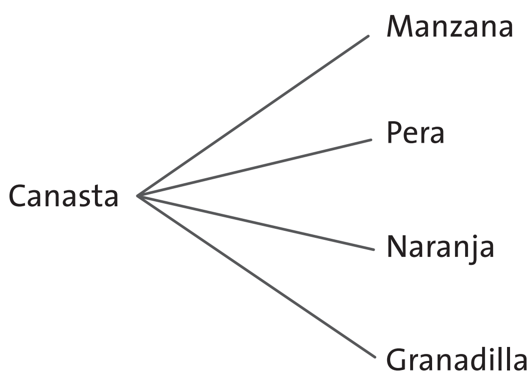
Analizando la situación de seleccionar frutas de la canasta, si se toma una de ellas, este evento se llama **evento simple o suceso elemental.** Por ejemplo: Cuando Mauricio selecciona una pera es un evento simple.

Se considera evento imposible cuando es un elemento que no está en el espacio muestral. Por ejemplo, si Mauricio sacara una fruta de la canasta y esta fuera un plátano, esto sería un **evento imposible**. Es imposible que salga una fruta que no se encuentra dentro de la canasta.

Si Mauricio saca una fruta de la canasta, es seguro que será la pera o la manzana o la naranja o la granadilla, a este evento se le llama **evento probable.**

Otra forma de representar el espacio muestral de un experimento aleatorio es por medio de un diagrama de árbol, así:

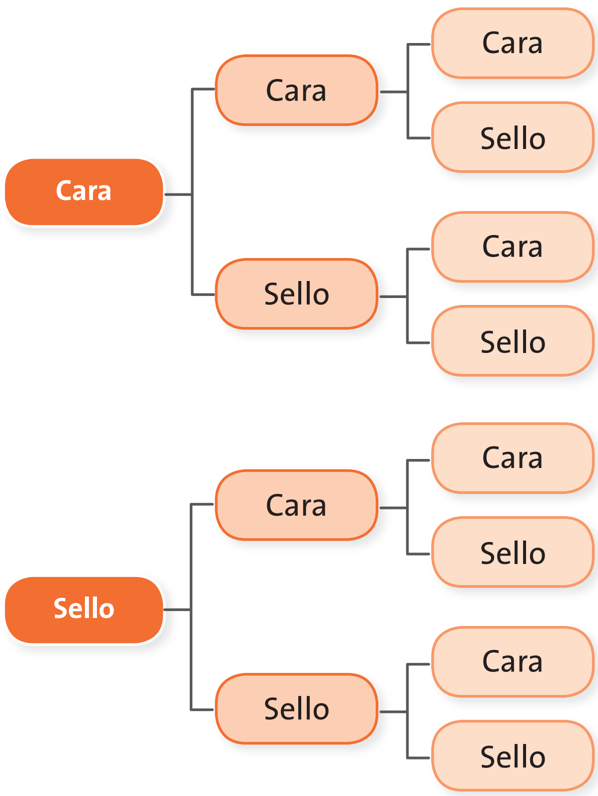
Diagrama de árbol



En la figura anterior, se puede apreciar un diagrama de árbol en el que es más fácil reconocer todos los elementos o todos los resultados del experimento que conforman su espacio muestral.

Un diagrama de árbol puede estar constituido de una o varias ramas, cada rama parte de un nodo que representa un evento aleatorio diferente.

Por ejemplo, lanzar tres monedas al mismo tiempo cuyo espacio muestral se representa en el siguiente diagrama de árbol tiene varias ramas.

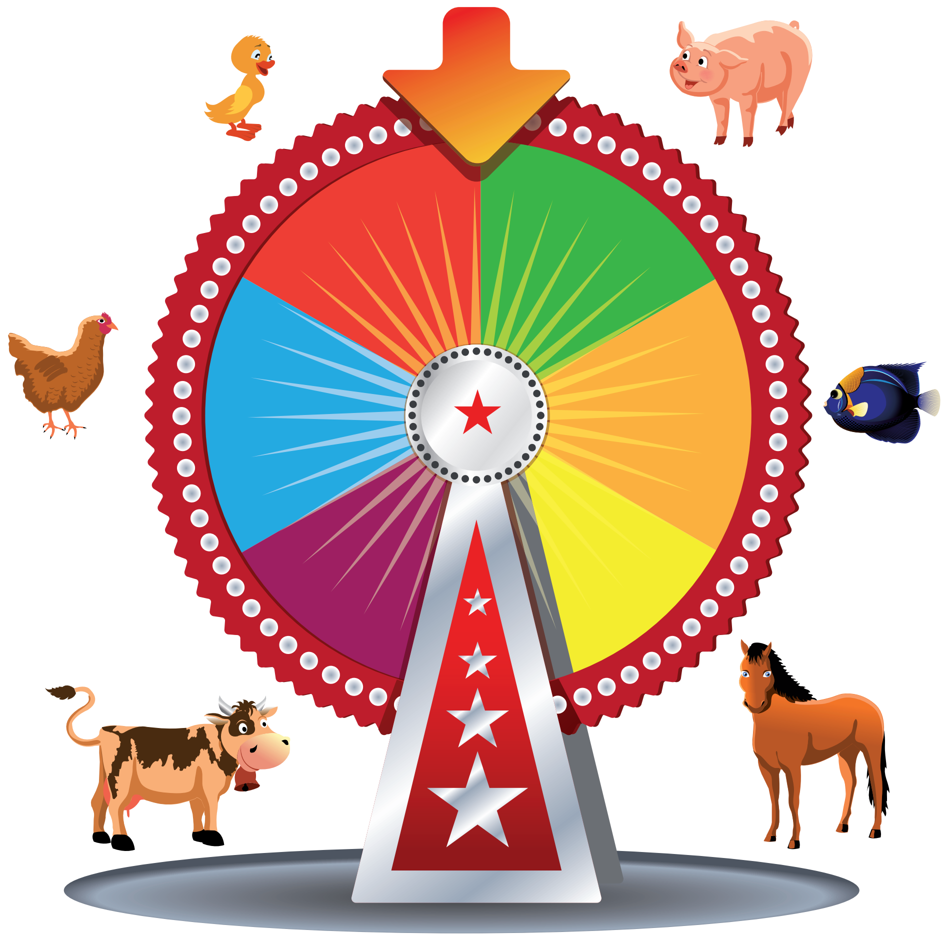


Cara se representa con C, y sello se representa con S.

E= {CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS}

Ejercitemos lo aprendido

Mauricio tiene una ruleta dividida en seis partes iguales con la que decide en qué orden alimentará a los animales, como la que se muestra a continuación.



- ¿Es este un experimento aleatorio? ¿Por qué?
- ¿Cuál es su espacio muestral?
- ¿Cuál puede ser un evento simple?
- ¿Cuál puede ser un evento imposible?
- ¿Cuál puede ser un evento probable?

Trabajo en grupo

Trabaja con dos compañeros y realicen las siguientes actividades.

1. Indiquen cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles son experimentos determinísticos.
   - Extraer una carta de una baraja española.
   - Presionar la tecla 7 de la calculadora o del control remoto.
   - Colocar agua durante 2 horas a -20 ºC.
   - Elegir un número del 1 al 100.
   - Tirar una moneda al aire.
   - Lanzar un dado Medir la cantidad de milímetros de lluvia caídos.
   - Elegir un número al azar.
2. Determinen el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.
   - Si el experimento consiste en lanzar una moneda al aire y mirar qué sale.
   - Si el experimento consiste en arrojar un dado de seis caras y observar el número que sale.
   - Si el experimento consiste en tomar un libro al azar de su biblioteca y mirar con qué letra empieza el título.
   - Si el experimento consiste en sacar una carta de la baraja española conformada por 40 cartas.

Guía 22

La probabilidad de un evento

Estándar:

Pensamiento aleatorio

- Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).

A menudo escuchamos hablar de la probabilidad de ganarnos la lotería o de la probabilidad de que llueva el día de mañana. En esta guía se abordarán las representaciones y la forma de calcular la probabilidad de un evento.

Lo que sabemos

Mauricio, el campesino que vive en el Oriente colombiano, tiene en su finca diferentes frutas, verduras y tubérculos. Supongamos que en un costal tiene una remolacha y seis papas de las cuales dos están dañadas. Si Mauricio saca al azar uno de estos tubérculos:

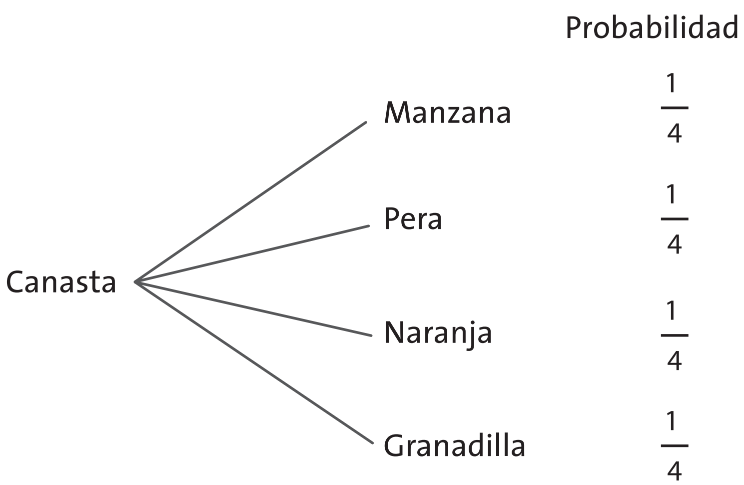
- ¿Cuál tubérculo es el más probable que salga?
- ¿Cuál es menos probable que salga?
- ¿Cuál es la probabilidad de que salga una de las papas dañadas?

Aprendamos algo nuevo

Mauricio debe sacar una de las cuatro frutas de la canasta. Sacar una pera representa una de las cuatro de posibilidades; si saca una naranja es una de las cuatro de la canasta, si es manzana es una de las cuatro de la canasta y si es granadilla es una de las cuatro canastas.
Como observamos se establecen razones 1 a 4 que se simboliza $\frac{1}{4}$.

El respectivo diagrama de árbol con su correspondiente probabilidad.

Diagrama de árbol con probabilidades iguales



La probabilidad **(P),** es una medida de la ocurrencia de un evento. En el caso de la medida de ocurrencia de la selección de una de las frutas es 1 de 4 o $\frac{1}{4}$. Con respecto a todas las frutas, todas tienen la misma probabilidad de selección.
Calcular la probabilidad de un evento es establecer una razón entre los eventos posibles favorables a una selección con respecto al total de posibles resultados que se encuentran en el espacio muestral.

$$\textit{probabilidad de un evento} = \frac{\textit{número de casos favorables del evento}}{\textit{número total de casos posibles}}$$

La ocurrencia del evento de que Mauricio saque de la canasta una pera es igual a la de sacar la manzana, la naranja o la granadilla, estos eventos tienen la misma probabilidad. Cuando las probabilidades de cada evento simple son las mismas, se dice que son equiprobables.

Las probabilidades las podemos representar como una razón, una fracción o un porcentaje.

En el caso de las frutas la probabilidad es: 1 de 4, $\frac{1}{4}$ o del 25%. Es decir:

$$P\,(pera) = P\,(manzana) = P(naranja) = P\,(granadilla) = \frac{\textit{Casos favorables}}{\textit{Número de casos del espacio muestral}}$$

Se dice que dos o más eventos de un experimento son equiprobables cuando la probabilidad de ocurrencia de cada uno es la misma.

Matemáticamente:

Probabilidad del evento (A) = Probabilidad del evento (B)= ...

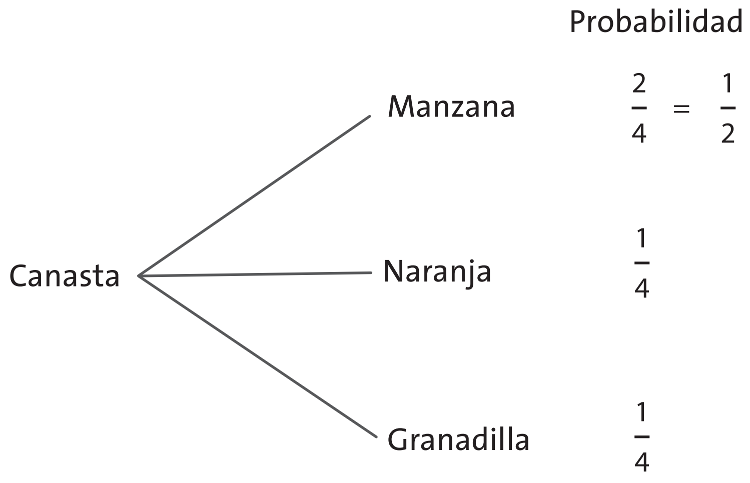
La medida de la probabilidad con la que podemos esperar que un suceso o evento ocurra es un número entre 0 y 1. Si estamos seguros de que el suceso ocurrirá decimos que su probabilidad es 100% o 1, pero si estamos seguros de que el suceso o evento no ocurre decimos que la probabilidad es cero. Por ejemplo, si la probabilidad es de $\frac{1}{4}$, es equivalente a decir que hay un 25% de probabilidad de que ocurra y un 75% de probabilidad de que no ocurra.

Mauricio ha cambiado, la pera por una manzana, es decir que en la canasta hay ahora dos manzanas, una naranja y una granadilla.

- ¿Cuál es ahora la probabilidad de sacar una naranja? ¿y la de sacar una manzana? ¿El experimento es equiprobable?

Para dar solución a este nuevo problema, nos ayudaremos de un diagrama de árbol como el siguiente:

Diagrama de árbol con probabilidades diferentes



Como podemos observar en el diagrama de árbol anterior, las probabilidades de la naranja y de la granadilla siguen siendo las mismas:

$$P(naranja) = P(granadilla) = \frac{Casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ del\ espacio\ muestral} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

Pero la probabilidad de la manzana ha aumentado debido a que ahora hay dos en la canasta:

$$P(manzana) = \frac{Casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ del\ espacio\ muestral} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

La probabilidad de sacar una naranja sigue siendo la misma de un 25% y la probabilidad de sacar una manzana aumentó a un 50%. Este nuevo experimento ya no es equiprobable.

Si ahora a la naranja y a la granadilla se les deja cáscara y a las manzanas se les quita la cáscara, y calculamos la probabilidad para que salga una fruta con cáscara o sin ella se tendría según el siguiente diagrama de árbol.

Diagrama de árbol frutas con cáscara

		Probabilidad
Canasta	Con cáscara	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
	Sin cásacara	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Como podemos observar en el diagrama, la probabilidad de que Mauricio tome una fruta con cáscara es de $\frac{1}{2}$ equivalente al 50% de las posibilidades. Lo que es igual a:

$$P(\text{fruta con concha}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Número de casos del espacio muestral}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

Ejercitemos lo aprendido

1. Si Mauricio gira la ruleta que tiene las seis divisiones para determinar cómo alimenta a los animales:

   » Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a los resultados de este experimento.

   » ¿Cuál será la probabilidad de alimentar los patos?

   » ¿Cuál será la probabilidad de alimentar los peces?

   » ¿Este experimento es equiprobable? ¿Por qué?

2. Mauricio tiene en un corral 13 pollos, si desea escoger solo uno de estos animales al azar para alimentar, contesta las siguientes preguntas:

   » Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a este experimento aleatorio.

   » ¿Cuál será la probabilidad de seleccionar uno de estos pollos?

3. Considera el experimento de lanzar una moneda y calcula la probabilidad de obtener cara después de lanzarla al aire. Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a este experimento.

4. Considera el experimento de lanzar un dado de seis caras y calcula la probabilidad de obtener el número 4. Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a este experimento.

5. En una caja hay cuatro baterías, de las cuales una es defectuosa. Con el objeto de efectuar un control de calidad, se saca una batería, al azar, y se prueba.

   » Representa el diagrama de árbol correspondiente a este experimento aleatorio.

   » ¿Cuál es la probabilidad de obtener la batería defectuosa?

   » ¿Cuál es la probabilidad de obtener una en buen estado?

6. En una caja de caramelos hay diez de menta, seis de fresa y cinco de anís. Se escoge un caramelo al azar. Halla la probabilidad de que el caramelo:

   » Sea de menta

   » Sea de anís

   » Sea de fresa

Guía 23

Formas de contar

Estándar

Pensamiento aleatorio

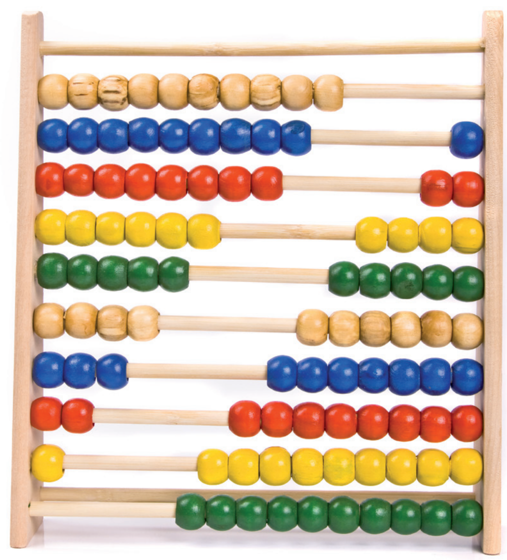
Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).

Recuerda que existen momentos en los cuales el orden resulta muy importante. Por ejemplo al esperar un turno para ser atendido, al ponerse las prendas de vestir o al respetar el turno en un juego. También en matemáticas existen eventos en los cuales el orden resulta fundamental y debe ser respetado, en esta guía estudiaremos estos fenómenos.

Lo que sabemos

- Si Mauricio tiene en su finca 19 vacas, 12 caballos, 21 cabras, 25 ovejas y 14 marranos. ¿A cuántos animales puede Mauricio desparasitar?

- ¿Para qué le sirve contar a Mauricio?
- ¿Sabes algo acerca del conteo?
- ¿Tiene alguna relación el conteo con la probabilidad?



Aprendamos algo nuevo

Principios básicos de conteo

Regla de la suma

Mauricio puede comprar el abono para sus plantas y árboles en cuatro almacenes de cadena y en siete tiendas de productos agrícolas.

- ¿Cuántos lugares tiene Mauricio para escoger y comprar el abono para sus plantas y árboles?

Para dar solución a esta pregunta basta con sumar la cantidad de lugares en donde puede comprar el abono, esto es $4 + 7 = 11$ lugares diferentes.

Regla de la suma: Si una operación se puede realizar de *x* formas, mientras que otra operación realizarse de *y* formas, y no es posible realizar ambas operaciones de manera simultánea, entonces para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de x + y formas posibles.

Otro ejemplo podría ser:

Mauricio tiene en su finca ocho caballos negros y cuatro blancos y quiere escoger uno para montar, entonces Mauricio tiene $8 + 4 = 12$ formas de elegir un caballo.

Regla del producto o principio fundamental del conteo

Mauricio tiene cinco pantalones y tres sombreros, para realizar las labores de la finca. ¿De cuántas maneras puede vestirse al combinar estas prendas?

Para dar solución a esta pregunta, se debe tener en cuenta que esta actividad tiene dos momentos, seleccionar el pantalón y seleccionar el sombrero. Podemos ayudarnos con el siguiente diagrama de árbol:

Diagrama de árbol

Pantalón	Sombrero	Vestimenta a utilizar
Pantalón 1	Sombrero 1	Pantalón 1 Sombrero 1
	Sombrero 2	Pantalón 1 Sombrero 2
	Sombrero 3	Pantalón 1 Sombrero 3
Pantalón 2	Sombrero 1	Pantalón 2 Sombrero 1
	Sombrero 2	Pantalón 2 Sombrero 2
	Sombrero 3	Pantalón 2 Sombrero 3
Pantalón 3	Sombrero 1	Pantalón 3 Sombrero 1
	Sombrero 2	Pantalón 3 Sombrero 2
	Sombrero 3	Pantalón 3 Sombrero 3
Pantalón 4	Sombrero 1	Pantalón 4 Sombrero 1
	Sombrero 2	Pantalón 4 Sombrero 2
	Sombrero 3	Pantalón 4 Sombrero 3
Pantalón 5	Sombrero 1	Pantalón 5 Sombrero 1
	Sombrero 2	Pantalón 5 Sombrero 2
	Sombrero 3	Pantalón 5 Sombrero 3

Como puede seleccionar el pantalón entre cinco formas ($n = 5$) y por cada pantalón seleccionado puede escoger un sombrero de tres formas ($m = 3$), Mauricio puede resultar vestido de $n \times m = 5 \cdot (3) = 15$ formas diferentes.

Regla del producto: Si una operación se puede llevar a cabo en ***x*** formas y si para cada una de estas se puede hacer una segunda operación en ***y*** formas, entonces las dos operaciones se pueden ejecutar juntas de **xy** formas.

Combinatorias

Si tres vacas deben entrar en un establo, ¿de cuántas formas distintas se puede? Digamos que las vacas se llaman Rosita, Clarita y Petra y las representamos por sus iniciales. Entonces las maneras en que pueden entrar al establo son:

Primera forma

1º R

2º C

3º P

Segunda forma

1º C

2º R

3º P

Tercera forma

1º R

2º P

3º C

Cuarta forma

1º C

2º P

3º R

Quinta forma

1º P

2º R

3º C

Sexta forma

1º P

2º C

3º R

Encontramos que hay seis formas de organizar las vacas para entrarlas al establo. Tipo de situaciones como estas se resuelven con *factorial*.

El símbolo **!** se lee factorial y es el producto resultante de todos los enteros positivos de 1 a n; es decir, si n es un número entero positivo, el producto $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ se llama factorial de n. y se representa $n!$

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$$

Entonces el factorial de 5 será:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Por definición $0! = 1$

Permutaciones de n elementos

Mauricio ha llevado sus vacas a una feria ganadera. ¿De cuántas maneras pueden repartirse tres premios a un conjunto de nueve vacas, suponiendo que cada vaca no puede obtener más de un premio?

Como tenemos nueve vacas que pueden recibir el primer premio. Una vez que éste ha sido entregado, restan ocho vacas para recibir el segundo, y posteriormente quedarán siete vacas para el tercer premio. De ahí que el número de maneras distintas de repartir los tres premios.

$$n_1 \times n_2 \times n_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

De las vacas que Mauricio ha llevado a una feria ganadera. ¿De cuántas maneras pueden repartirse tres premios a un conjunto de tres vacas, suponiendo que cada vaca no puede obtener más de un premio?

Podemos comprender el concepto de permutación basándonos en el siguiente diagrama:

Podemos apreciar que en cada grupo están las tres vacas y que un grupo se diferencia del otro únicamente por el orden de colocación de las vacas.

Como tenemos tres vacas que pueden recibir el primer premio. Una vez que este ha sido entregado, restan dos vacas para recibir el segundo, y posteriormente quedará una vaca para el tercer premio. De ahí que el número de maneras distintas de repartir los tres premios sea:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Por el principio fundamental del conteo podemos enunciar que el número de permutaciones de n objetos distintos tomados de n en n, es:

$$p(n, n) = nPn = n!$$

Lo cual es equivalente a decir 3 permutado 3, que se representa como

$$p(3, 3) = 3P3 = 3! = 6$$

Por ejemplo: las permutaciones de tres letras a, b, c, son:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Equivalentes a $p(3, 3) = 3P3 = 3! = 6$.

Una permutación de un conjunto de elementos, es un ordenamiento específico de todos o algunos elementos del conjunto que facilita el recuento de las ordenaciones diferentes que pueden hacerse con los elementos del conjunto. En una permutación el orden en que se disponen los elementos del conjunto es importante.

Combinaciones y permutaciones

Combinaciones	Permutaciones
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

Por tanto el número de combinaciones multiplicado por 3! es igual al número de permutaciones. Por medio de la siguiente fórmula, podemos verificar lo expuesto en la anterior tabla:

$$C(n,r) = C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

n = elementos del conjunto = 4

r = cantidad de elementos del subconjunto = 3

$$C(4,3) = C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = \frac{24}{6} = 4$$

Fórmula para la combinatoria C(n,r): Puesto que cualquier combinación de n objetos, tomados r a la vez, determina r! permutaciones de los objetos en la combinación, se puede concluir que

$$P(n,r)=r!C(n,r)$$

Por tanto, se obtiene la fórmula siguiente para *C(n,r)*

$$C(n,r)=C_r^n=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

¿Qué diferencia hay?

- Si el orden no importa es una combinación.
- Si el orden sí importa es una permutación, podría decirse que una permutación es una combinación ordenada.

Así que recordemos: ¿De cuántas maneras pueden repartirse tres premios a un conjunto de tres vacas, suponiendo que cada vaca no puede obtener más de un premio?

$$p(3,3) = 3P3 = 3! = 6$$

De seis maneras diferentes, en este caso el orden tiene importancia por esto se realiza una permutación.

Ejercitemos lo aprendido

1. Para recolectar las frutas de sus árboles Mauricio puede utilizar cinco baldes, ocho canastos y tres talegos. ¿Cuántos elementos para recolectar frutas tiene Mauricio para escoger?
2. Mauricio tiene siete baldes y cinco pares de guantes, para realizar las labores de ordeño en la finca. ¿De cuántas maneras puede utilizar estos dos elementos?
3. Mauricio llevó sus caballos de paso a una exposición. ¿De cuántas maneras pueden repartirse cuatro premios a cuatro caballos, suponiendo que cada caballo no puede obtener más de un premio?

4. Se quiere conocer el conjunto de todas las posiciones posibles de tres caballos colocadas en hilera para tomar una fotografía. Escribe todas las posiciones posibles.

5. Se cuenta con 17 sillas para montar a caballo y 13 caballos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocupar las sillas?

6. Si se tienen cinco caballos ensillados y dos jinetes. ¿Cuántas combinaciones se pueden realizar?

Apliquemos lo aprendido

1. Cuántas palabras de cinco letras se pueden formar con la palabra reloj. Aplica las permutaciones.

2. Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con las letras de la palabra reloj. Escríbelas.

3. Del grupo 8° conformado por 39 estudiantes, se quiere escoger un presidente, un secretario, y tesorero. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar?

4. El 31 de octubre se quiere hacer una repartición de dulces que consiste en cuatro frunas iguales, tres chocolatinas iguales, dos colombinas. ¿De cuántas maneras se pueden repartir estos dulces?

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

Encuentra en la sopa de letras las palabras relacionadas en la figura, y describe en tu cuaderno una idea a cerca de cada una de ellas.

Sopa de letras

Ñ	R	B	D	L	L	D	L	J	P	T	V	Q	U	M
W	G	E	U	J	Z	I	T	Ñ	J	V	Y	P	K	A
J	A	C	Q	P	A	A	O	A	Ñ	M	O	R	M	I
X	P	I	I	T	E	G	O	J	L	G	T	O	E	C
N	Y	Q	R	H	I	R	Y	C	D	D	N	B	Q	N
O	K	S	C	O	X	A	X	A	M	Y	E	A	U	E
I	Y	E	E	A	T	M	U	Ñ	C	W	V	B	I	U
C	C	I	C	L	K	A	S	E	H	F	E	I	P	C
A	O	M	F	O	U	D	N	J	Z	Ñ	U	L	R	E
T	W	H	A	E	K	E	B	I	D	X	B	I	O	R
U	K	A	Ñ	T	X	A	K	M	B	C	M	D	B	F
M	T	S	Y	N	X	R	E	Z	P	M	Q	A	A	T
R	S	A	F	O	M	B	U	X	T	Z	O	D	B	B
E	H	Q	D	C	S	O	Ñ	T	K	X	H	C	L	Z
P	S	O	G	R	O	L	S	F	I	A	C	K	E	Q

COMBINATORIA
CONTEO
DIAGRAMA DE ÁRBOL
EQUIPROBABLE
EVENTO
FRECUENCIA
PERMUTACIÓN
PROBABILIDAD

- ¿Cuál de los conceptos que se encuentran en la sopa de letras fue el que más se te facilitó?
- ¿Cuál de los conceptos que se encuentran en la sopa de letras fue el que más se te dificultó?
- De las actividades planteadas a lo largo del módulo, ¿cuál fue la que más te gustó? ¿Por qué?
- ¿Consideras que los temas estudiados en este módulo son aplicables en tu vida cotidiana? ¿En qué actividades te pueden servir?

¿Cómo me ven los demás?

1. Formen grupos de cuatro personas y en una urna ingresen diez pimpones enumerados del 1 al 10, un voluntario sacará al azar un pimpón.
   a. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento aleatorio?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?
   c. ¿Cuál puede ser un evento imposible para este experimento?
   d. Ingresen el pimpón nuevamente a la urna y repitan diez veces el experimento. ¿Es coherente lo obtenido en la práctica con los resultados teóricos?
2. En los grupos formados de cuatro personas, ingresen a una tula o bolsa seis monedas: una de \$500, dos de \$200 y tres de \$100; un voluntario saca una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?
   a. Que la moneda sea de \$500
   b. Que la moneda sea de \$100
   c. Que la moneda sea de \$200
   d. Ingresen la moneda nuevamente a la bolsa y repitan diez veces el experimento. ¿Es coherente lo obtenido en la práctica con los resultados teóricos?
3. Intercambien la información que obtuvieron de las dos actividades realizadas con otros grupos y verifiquen si los resultados son coherentes.

4. ¿Cómo te pareció desarrollar las actividades de manera grupal?

5. ¿Cómo interpretaron los resultados?

6. ¿Consideras que trabajar en grupo es una actividad divertida y enriquecedora? ¿Por qué?

¿Qué aprendí?

Responde según la manera en la que te desenvolviste en el desarrollo del módulo y justifica tu respuesta.

	Sí	No	A veces	Justificación
Identifico el espacio muestral de un experimento aleatorio simple.				
Reconozco el concepto de evento simple.				
Resuelvo situaciones que requieran calcular la probabilidad de un evento simple.				
Represento mediante diagramas de árbol, diversos experimentos aleatorios con su correspondiente espacio muestral y la probabilidad de algún evento.				
Establezco la probabilidad de un evento.				
Resuelvo situaciones que requieran el cálculo de alguna permutación o combinación para llevar a cabo un conteo.				
Soy tolerante con las diferencias de opinión cuando trabaja en grupo.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Respeto las opiniones de mis compañeros de curso.				
Participo activamente en clase, expresando mis opiniones de manera clara y respetuosa.				
Trabajo activamente en grupo y respeto la opinión de mis compañeros.				

Determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento con tu maestro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Mason, J. et al. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares*. Bogotá. MEN

Ministerio de Educación Nacional (1988). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá. MEN

Ministerio de Educación Nacional. (Agosto 3, 1994). *Decreto 1860*. Bogotá. MEN

Ravenet, J. (1992). *Silos*. Barcelona: Reverte.

Rojas, P. et al. (2002). *La transición de la aritmética – álgebra.* Bogotá: Gaia.

Uribe C., Julio A. & Berrio M., Jose I. (1998). *Elementos de matemáticas: noveno grado*. Medellín: Bedout.

VanCleave, Janice & Clark, Barbara. (2004). *Matemáticas para niños y jóvenes*. México: Limusa.

REFERENCIAS WEB

Benito, B. (S.F.). Áreas y volúmenes de figuras geométricas. Recuperado el 25 septiembre de 2010 de: http://www.bbo.arrakis.es/geom/

Levy, S. (1995). Regular Polygons. En: The Geometry Center Home Page (cap. 5). Recuperado el 24 septiembre de 2010 de: University of Minnesota: http://www.geom.uiuc.edu/

http://www.geom.uiuc.edu/docs/reference/CRC-formulas/node24.html#SECTION01530000000000000000

Levy, S. (1995). Cylinders. En: The Geometry Center Home Page (cap. 13). Recuperado el 24 septiembre de 2010 de: University of Minnesota: http://www.geom.uiuc.edu/

http://www.geom.uiuc.edu/docs/reference/CRC-formulas/node57.html#SECTION02520000000000000000

Levy, S. (1995). Cones. En: The Geometry Center Home Page (cap. 13). Recuperado el 24 septiembre de 2010 de: University of Minnesota: http://www.geom.uiuc.edu/

http://www.geom.uiuc.edu/docs/reference/CRC-formulas/node58.html

Zapata, F. (2002). Geometría. Recuperado el 25 septiembre de 2010 de: http://www.monografias.com/trabajos10/geom/geom.shtml#pri

REFERENCIAS DE IMÁGENES

Módulo 5

Pág. 200
Formas de velas: Prisma cuadrangular.jpg. Recuperada el 18 de agosto de 2010 de:http://4.bp.blogspot.com/-PADRofuKf-k/Tbv7AqSn1VI/AAAAAAAAAQU/zsM5oD-843wY/s1600/IMAG0182.jpg

Pirámide.jpg. Recuperada el 18 de agosto de 2010 de: http://1.bp.blogspot.com/_3Ce70oovg7o/S_VtFspfooI/AAAAAAAAAEA/uanqUQw3GHc/s1600/018_13x18.jpg

Cilindro.jpg. Recuperada el 18 de agosto de 2010 de: http://somos.vicencianos.org/chento/files/2008/10/enciende_una_luz.jpg

Pág. 209
Pirámides de Egipto.jpg. Recuperada el 18 de agosto de 2010 de: http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:All_Gizah_Pyramids.jpg

Módulo 6

Pág. 240
Mauricio jugando parqués.jpg. Recuperada el 18 de agosto de 2010 de: http://4.bp.blogspot.com/-QuI8rjx4yQE/TeRqKMb9VWI/AAAAAAAAAGw/qfQNfd_siSw/s1600/003.JPG