7º

Matemáticas

Libertad y Orden
Ministerio de
Educación Nacional
República de Colombia

María Fernanda Campo Saavedra
Ministra de Educación Nacional

Mauricio Perfetti del Corral
Viceministro de Educación Preescolar, Básica y Media

Mónica López Castro
Directora de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media.

Heublyn Castro Valderrama
Subdirectora de Referentes y Evaluación de la Calidad Educativa

Heublyn Castro Valderrama
Coordinadora del Proyecto

Clara Helena Agudelo Quintero
Gina Graciela Calderón
Luis Alexander Castro
María del Sol Effio J
Omar Hernández Salgado
Edgar Martínez Morales
Jesús Alirio Naspirán
Emilce Prieto Rojas
Equipo Técnico

María Fernanda Dueñas Álvarez
Diego Fernando Pulecio Herrera
Autores de la adaptación

ISBN libro: 978-958-691-420-8
ISBN obra: 978-958-691-411-6

Dirección de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media
Subdirección de Referentes y Evaluación de la Calidad Educativa
Bogotá, Colombia, 2010
www.mineducacion.gov.co

Fundación Manuel Mejía
Andrés Casas Moreno
Aura Susana Leal Aponte
Catalina Barreto Garzón
Coordinación del proyecto

Solman Yamile Díaz
Coordinación pedagógica

Erika Mosquera Ortega
Paula Andrea Ospina Patiño
Coordinación editorial

Ángela Duarte Pacheco
Coordinadora del libro

Carlos Andrés Robles Montenegro
César Andrés Pacheco Chaparro
Ángela Duarte Pacheco
Nelson Rodríguez
Eusebia Vega García
Juan Gabriel Duarte Pacheco.
Autores

Marta Osorno Reyes
Edición

Víctor Leonel Gómez Rodríguez
Diseño de arte

Leidy Joanna Sánchez
Víctor Leonel Gómez Rodríguez
Fransue Escamilla Pedraza
Diseño y diagramación

Richard Rivera Ortiz
Ilustración
Shutterstock
Fotografía

Agradecimientos especiales a: Raquel Suárez Díaz, Wilson Giral, Guido Delgado Morejón, Geovana López y Eliana Catalina Cruz, quienes contribuyeron al desarrollo de esta publicación.

Presentación

El Ministerio de Educación Nacional, presenta a la comunidad educativa la nueva versión del modelo **Postprimaria Rural**, en su propósito de disminuir las brechas educativas del país en cuanto a permanencia y calidad en todos los niveles. Este material se presenta como una alternativa que busca dar respuesta, a las necesidades de formación y desarrollo educativo en poblaciones de las zonas rurales y urbano-marginales.

La propuesta pedagógica del modelo Postprimaria, se desarrolla a través de una ruta didáctica que permite a los estudiantes analizar e interpretar diversas situaciones problema, para aproximarse a su cotidianidad, construir saberes y convertir los contenidos en aprendizaje significativo para sus vidas.

Para el logro de este objetivo, se ha diseñado un conjunto de materiales de aprendizaje que abordan las áreas obligatorias y fundamentales, las cuales desarrollan contenidos actualizados que incorporan los referentes de calidad del MEN, especialmente los Estándares Básicos de Competencias. También el modelo brinda material educativo, que permite a los establecimientos educativos implementar proyectos de alimentación, tiempo libre, salud y nutrición. Adicionalmente, teniendo en cuenta la necesidad de las nuevas generaciones de las zonas rurales, se propone el trabajo con Proyectos Pedagógicos Productivos, el cual ofrece un doble beneficio: por un lado, se convierte en la oportunidad de desarrollar aprendizajes prácticos, con lo que se fomenta no solo el saber sino el saber hacer en el contexto del estudiante; y por otro, se promueve el espíritu empresarial, que permite a los jóvenes comprender distintas posibilidades productivas.

Postprimaria rural cuenta con un Manual de implementación en el que se presenta el enfoque pedagógico y alternativas didácticas que se pueden aplicar en cada área curricular. Éstas son una herramienta de apoyo para el docente porque le facilita, con ayuda de su creatividad e iniciativa personal, promover una educación pertinente para el estudiante de la zona rural y urbano marginal, e incrementar el interés por ampliar su escolaridad, hasta alcanzar la culminación del ciclo básico.

Este modelo es una oportunidad para impulsar la participación activa de los estudiantes como ciudadanos colombianos, toda vez que con ello se contribuye a ampliar sus posibilidades de vida digna, productiva y responsable, lo que repercutirá en la construcción de una sociedad colombiana más justa y con mayores posibilidades de desarrollo humano.

Ministerio de Educación Nacional

Así es esta cartilla

Querido estudiante:

Bienvenido a este nuevo curso de **Matemáticas** de la Postprimaria rural. Esperamos que esta experiencia sea enriquecedora tanto para ti, como para todos los integrantes de la comunidad.

Lee con atención el siguiente texto. Te ayudará a entender cómo están organizadas las cartillas que se utilizarán para el trabajo en las áreas fundamentales, en los proyectos transversales y en los proyectos pedagógicos productivos.

Esta cartilla te acompañará durante todo el curso y orientará tu proceso de enseñanza-aprendizaje. El conocimiento y uso adecuado de ella te permitirá obtener un mejor desempeño, que se verá reflejado en tu formación personal.

En cada una de las guías que componen los módulos, encontrarás unos íconos que indican el tipo de trabajo que vas a realizar:

Lo que sabemos

Las actividades acompañadas por este ícono te permiten indagar los conocimientos que has adquirido en años anteriores y en tu vida diaria. Esta sección te servirá como punto de partida para construir nuevas formas de conocer el mundo.

Aprendamos algo nuevo

En esta sección encontrarás información y actividades con las cuáles podrás construir nuevos y retadores aprendizajes. Es importante que hagas tu mejor esfuerzo en su realización, y compartas con tu docente y compañeros las dudas que se te presenten. Recuerda que los nuevos aprendizajes y el uso que hagas de ellos, te permitirán mejorar tus competencias como estudiante y como ciudadano responsable, y comprometido en la comunidad en la que vives.

Ejercitemos lo aprendido

Este ícono identifica las actividades que te permitirán poner en práctica tus aprendizajes y ganar confianza en el uso de los procedimientos propios de cada área.

Apliquemos lo aprendido

Encontrarás identificadas con este ícono las actividades de aplicación a través de las cuales podrás ver cómo lo que has aprendido, te sirve para solucionar situaciones relacionadas con tu vida cotidiana, con el área que estás trabajando y con otros campos del saber.

Evaluemos

En esta sección se te presentarán tres preguntas fundamentales:

- ¿Qué aprendí? Dónde explicarás la forma como vas desarrollando tus competencias.
- ¿Cómo me ven los demás? Esta pregunta la responderás con la ayuda de tus compañeros.
- ¿Cómo me ve mi maestro? Aquí tu maestro te apoyará para establecer tus niveles de desempeño.

El análisis de estas respuestas te ayudará a identificar acciones para superar dificultades y determinar diferentes maneras para mejorar tus competencias y las de tus compañeros.

Trabajo en grupo

Cuando las actividades estén acompañadas de este ícono, debes reunirte con uno o más de tus compañeros. Recuerda respetar sus opiniones, sus ritmos de trabajo y colaborar para que la realización de estas actividades favorezca el desarrollo de competencias en todos los integrantes del grupo.

Te invitamos a hacer un buen uso de esta cartilla y a cuidarla de manera especial, para que pueda ser usada por otros estudiantes en años posteriores.

Contenido

Módulo 1

Representro relaciones matemáticas

¿Qué vas a aprender?

Una de las herramientas más utilizadas de la matemática es la facilidad de representar relaciones entre cantidades. A nivel histórico las expresiones simbólicas como las ecuaciones fueron motivos de concursos y de retos para muchos matemáticos. Muchas expresiones matemáticas han permitido la evolución teórica de otras ciencias como es el caso de la física.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

- Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.
- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas)
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

Pensamiento numérico y sistemas numéricos

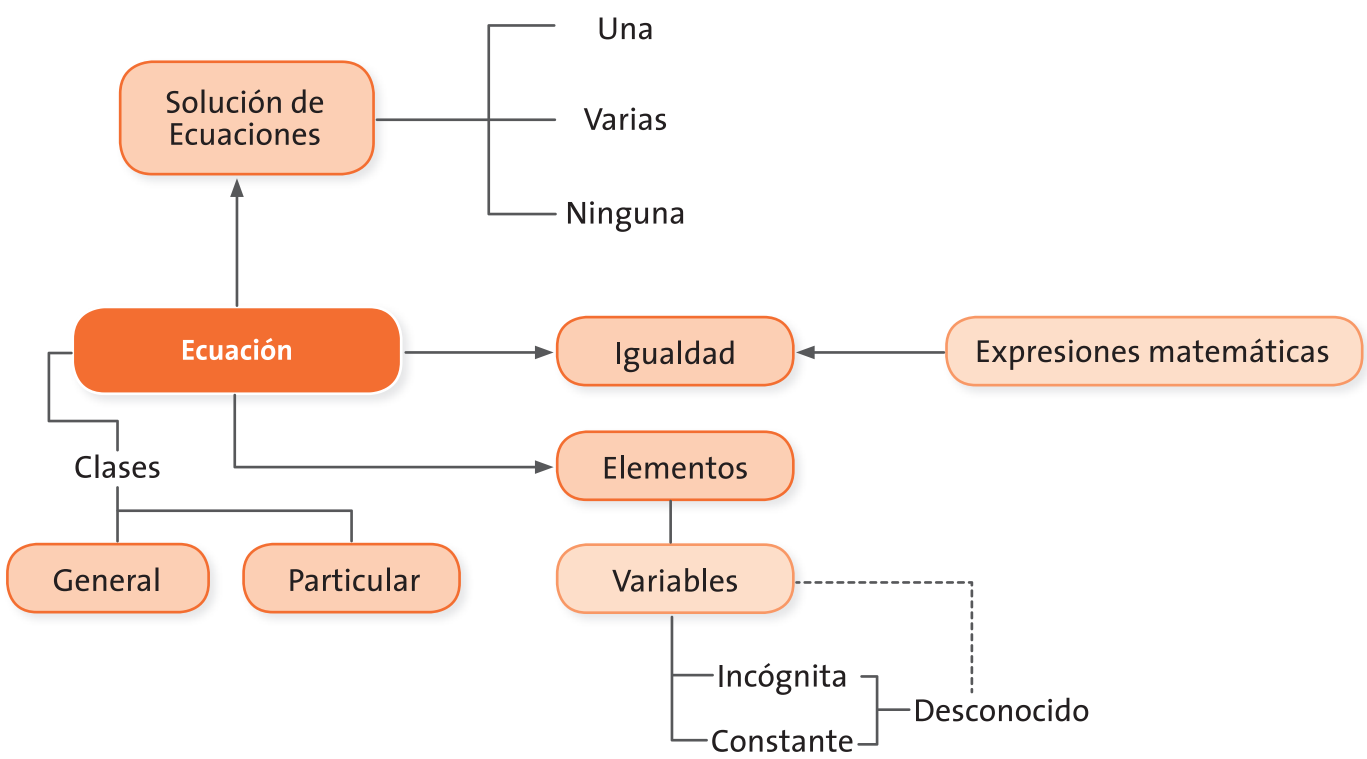
- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en diferentes contextos y dominios numéricos
- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.

La realización de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo permitirá alcanzar estándares básicos de competencias que privilegian el desarrollo de los pensamientos numérico y variacional y de los sistemas algebraicos y analíticos, a través de los conceptos asociados a las ecuaciones y su resolución. A continuación se muestran los conceptos y procesos desarrollados. La gráfica posterior esquematiza la forma en que relacionan los conceptos.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Concepto</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 1.
Algunas variables</td><td>Constantes, variables e incógnitas</td><td rowspan="3">
La formulación tratamiento y resolución de problemas: Se presentan algunas situaciones problema que pueden resolverse mediante el sentido común o con el uso de ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros.
La comunicación: Se introducen paulatinamente elementos comunicativos propios de las matemáticas como el uso de letras para representar variables, el uso de igualdades y ecuaciones para representar situaciones, así como el uso de gráficas y tablas que representan situaciones cambiantes.
El razonamiento: Se introducen elementos de estudio del cambio y en ese sentido se invita al estudiante a tratar de descubrir cambios ocultos partiendo cambios conocidos. Constantemente se le invita a razonar acerca de los procedimientos y actividades realizadas y sobre la validez de las conclusiones y conjeturas en situaciones diferentes a las consideradas.
La modelación: Se muestra cómo las ecuaciones generales, pueden representar diferentes situaciones y se pueden obtener ecuaciones particulares a partir de ellas y de información específica de la situación estudiada.
La formulación comparación y ejercitación de procedimientos y algoritmos: En algunos tópicos, se presentan ejercicios con el objetivo de ganar destreza, en la aplicación de procedimientos para despejar incógnitas.
</td></tr>
<tr><td>Guía 2.
Cómo hallar información oculta</td><td>Igualdades y ecuaciones</td></tr>
<tr><td>Guía 3.
Otro tipo de ecuaciones</td><td>Ecuaciones con una incógnita de las formas

$x + a = by$

$ax + b = c$</td></tr>
</table>



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Las ecuaciones sirven básicamente para resolver problemas. Son utilizadas para describir fenómenos de la naturaleza, desde el movimiento del aire o del agua o la resistencia de las estructuras.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En el desarrollo del módulo se proponen diferentes momentos en los que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evidenciar y analizar los progresos en cuanto a la capacidad para identificar variables, constantes e incógnitas y para plantear problemas cotidianos donde haya información oculta, expresarlos en lenguaje matemático y encontrar su solución a partir del planteamiento y solución de ecuaciones.

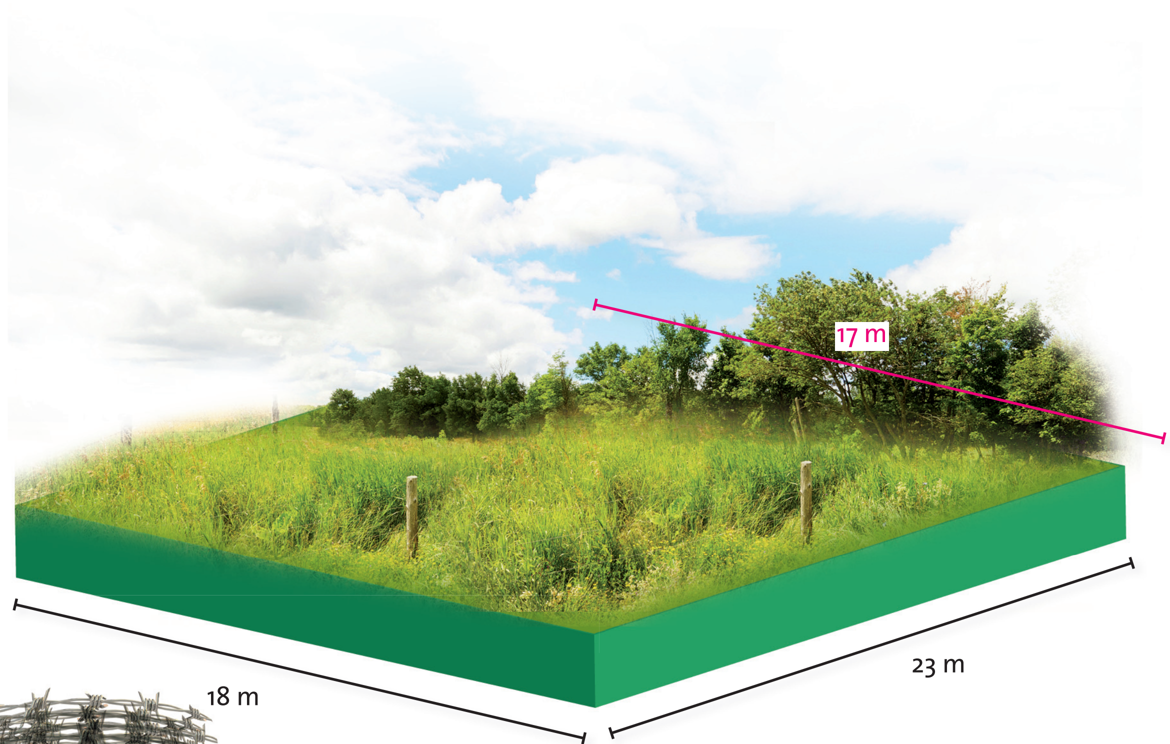
En cada una de las guías encontrarás la sección "Ejercito lo aprendido", que te permitirá probar tu destreza realizando ejercicios relacionados con el tema tratado. Al final del módulo encontrarás "Aplico lo aprendido" con situaciones problema que se resuelven aplicando los procedimientos aprendidos y la sección evaluación en las que se proponen diferentes actividades, ejercicios y problemas para ser realizados en forma individual o grupal, que te permitirán reflexionar acerca de cómo vas y qué debes reforzar.

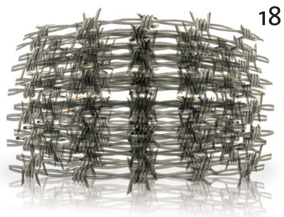
Explora tus conocimientos

Doña Olga tiene un terreno con forma de cuadrilátero irregular que quiere cercar con tres hiladas de alambre de púas. Tres de los lados del terreno miden 18 m, 23 m y 17 m (Ver figura).

A. Sabiendo que en una hilada se emplearían 78 m de alambre, plantea una expresión matemática para conocer la medida del cuarto lado y calcula su valor.

B. ¿Cuánto es el total de longitud de alambre que debe comprar?





Alambre de púa.

Guía 1

Algunas variables

Estándares:

Pensamiento variacional

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

Pensamiento numérico

- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.

Lo que sabemos

Tus padres saben que cambias constantemente: En cada etapa de tu vida requieres una alimentación diferente, aprender cosas nuevas y asumir nuevas responsabilidades. Si ellos no comprendieran tu naturaleza cambiante no podrían acompañar tu proceso de formación. De la misma forma es importante, comprender la naturaleza cambiante de los seres vivos y de los fenómenos de la naturaleza y sociales. Podríamos decir que el éxito en la ciencia y en la vida cotidiana consiste en observar, estudiar y predecir cambios. La presente guía te presenta situaciones de cambio y algunas herramientas matemáticas para describirlas y estudiarlas.

Trabajo en grupo

- En grupos de tres estudiantes, lean la siguiente información y respondan las preguntas.

En una huerta escolar a cinco niños se les asignó un surco. Cada uno tenía un surco de 5 m y sembraron una semilla de maíz cada 20 centímetros. Algunas semillas no germinaron pero ninguna planta se murió. Cada uno marcó una planta para hacerle seguimiento de la altura y apuntó los datos. Cada cuatro semanas cada uno contó las plantas de su propio surco; y estableció una clasificación entre pequeñas, medianas y altas.

- ¿Qué situaciones podrían anotarse de la huerta escolar que no necesiten medir?

- ¿Qué situaciones no cambiaron durante el cultivo?
- ¿Todas las plantas marcadas en los diferentes surcos tendrán al mismo tiempo la misma altura?
- ¿Cuántas semillas se sembraron en un surco?
- ¿Una planta siempre tendrá la misma altura?
- ¿Todos los surcos cosecharán la misma cantidad de mazorcas?
- ¿Se puede establecer una relación numérica entre el tiempo y la altura de la planta? Justifiquen su respuesta.
- ¿Se puede establecer una relación entre la cantidad de semillas con respecto al tamaño de la superficie del surco?
- Realicen el seguimiento de crecimiento de una planta desde que germina hasta que su altura sea igual o menor a 15 cm. Anoten la altura que va alcanzando cada tres días.

Hagan una lista de diez características que se podrían medir, contar o calificar en las plantas de maíz; por ejemplo: altura, número de tallos, número de hojas, número de mazorcas, etc. Luego clasifiquen las características en las que se alteran al trascurrir el tiempo y las que no se alteran.

Aprendamos algo nuevo

- Hagan una lista de características de quince personas que se podrían medir, contar o calificar en los estudiantes de la escuela. Por ejemplo color de los ojos, edad, género, altura, número de hermanos, número de personas que viven en la casa, etc. Organicen esa información por cada una de las características, por ejemplo: ojos de color claro o color oscuro.

  En su escuela o colegio pregúntenles a diez personas: la edad, la altura, el color de ojos, su género, el color de cabello. Diligencien los datos en una tabla similar a la siguiente:

Datos de características de alumnos de séptimo

	Edad	Estatura	Color de ojos	Color de cabello	Género
Persona 1					
Persona 2					
Persona 3					
Persona 4					
Persona 5					
Persona 6					
Persona 7					
Persona 8					
Persona 9					
Persona 10					

Cuando **una característica toma diferentes valores o el mismo, en la experiencia;** esta característica se denomina variable y se representa con una letra. Por ejemplo, la variable *t* define un conjunto de valores posibles que puede tomar el tiempo.

Cuando una característica sólo tiene un valor, es decir **no cambia,** se denomina **constante.**

Por ejemplo, el número de tallos de plantas del maíz siempre es 1 y es una constante.

- Observen los valores que toman las características y clasifíquenlas en variables y valores constantes.

- Debajo del nombre de cada característica escriban una letra para que represente todos los datos correctamente.

- Para cada característica, hagan una lista de posibles valores y definan un conjunto que los contenga todos.

Doy a lo desconocido valores aproximados

En el caso considerado en la sección "Lo que sabemos", uno de los estudiantes quiso hacerle seguimiento al número de hojas de su planta de maíz. Los estudiantes desconocían que en la huerta, el maíz produce aproximadamente una hoja semanal durante 14 semanas, a partir de la cual ya no produce hojas.

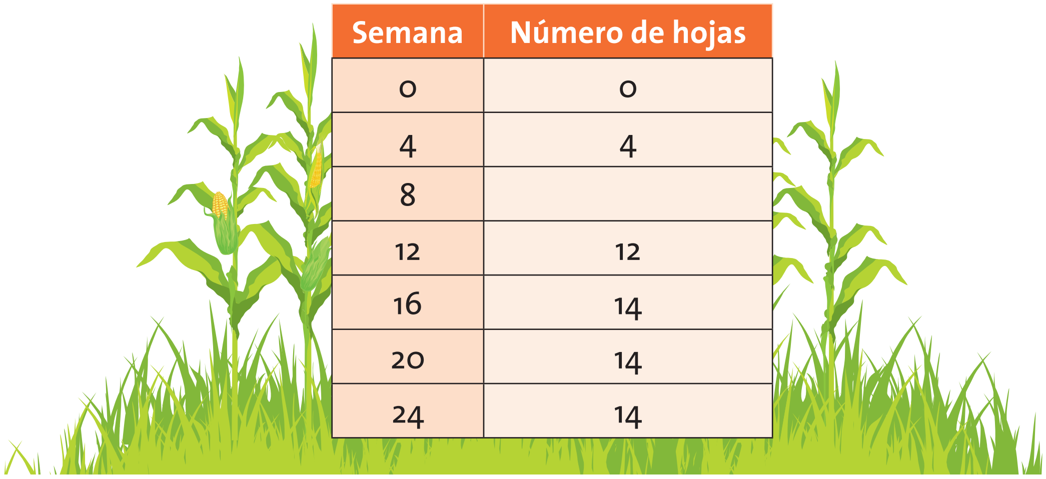
El seguimiento del cultivo es interrumpido por las vacaciones, por eso la tabla de datos quedó incompleta.

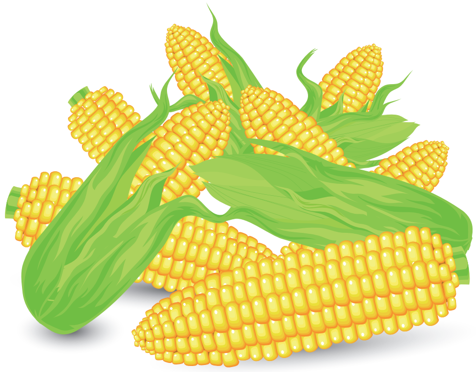
Incógnitas: Son valores, números u otros objetos que no se conocen en una expresión. Comúnmente se representan con letras.

Las variables como incógnitas: Cuando se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La incógnita interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido.

Número de hojas en una planta de maíz en diferentes épocas

Semana	Número de hojas
0	0
4	4
8	
12	12
16	14
20	14
24	14

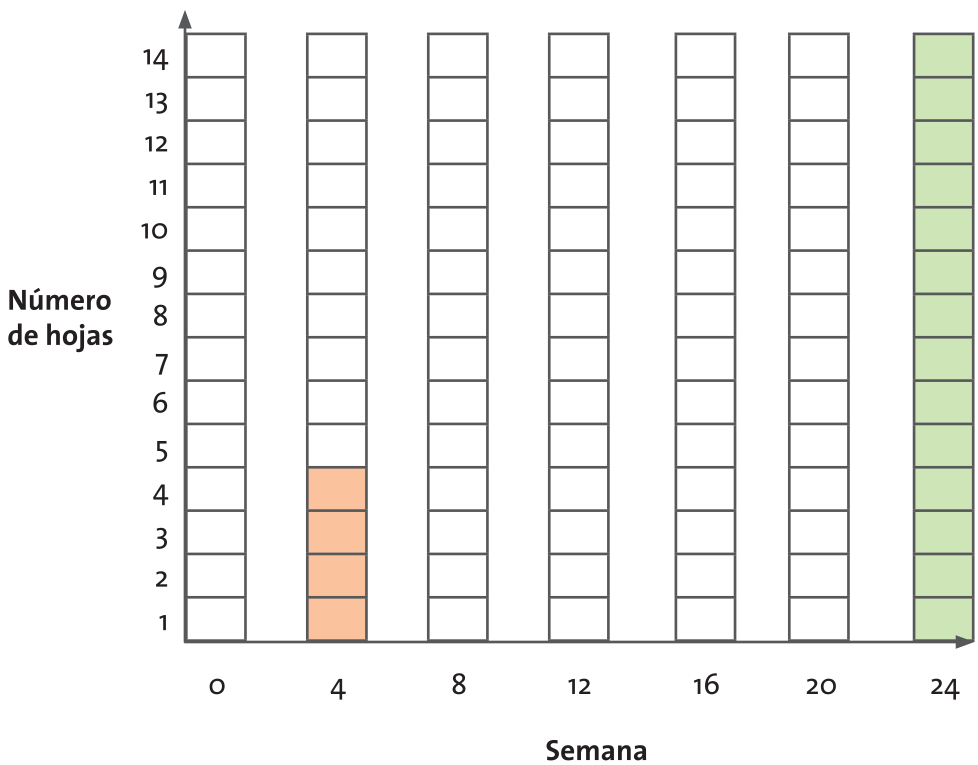




- Debajo del nombre de cada columna escribe una letra que represente los datos.
- Utiliza una letra para representar el valor faltante.
- ¿Cuál de los siguientes valores crees que puede ser el valor desconocido (0, 3, 4, 8 u 11)? ¿Por qué?
- ¿Cuáles valores puede tomar la variable semana? Define un conjunto que los contenga a todos, incluyendo las semanas impares.
- ¿Cuáles valores puede tomar la variable número de hojas? Define un conjunto que los contenga todos, incluyendo los posibles valores cuando las semanas son impares.

En la siguiente figura, el eje *x* representa las semanas transcurridas en el cultivo de maíz y el eje *y* el número hojas. Según los datos de la tabla anterior, colorea de abajo hacia arriba tantos cuadros como hojas haya en la planta. ¿Qué significa la longitud de cada sección coloreada?

Número de hojas en plantas de maíz en diferentes épocas



Ejercitemos lo aprendido

1. Escribe una lista con las características de una persona y clasifícalas en variables que cambian y en constantes.

2. En la siguiente tabla hay datos de producción diaria de leche de una vaca, de acuerdo con los meses que ha cumplido su ternero.

Leche que produce una vaca y edad del ternero

Mes	Litros de leche
1	32
2	29
3	26
4	
5	20
6	17

- Debajo del nombre de cada columna escribe una letra que represente los datos que hay en ella y otra letra para el dato faltante.

- De los valores 27, 23, 21 y 19, ¿cuál crees que es el más apropiado para completar la tabla? ¿Por qué?

Guía 2

Cómo hallar la información oculta

Estándares:

Pensamiento variacional

- Utilizo métodos informales (ensayo – error, complementación) en la solución de ecuaciones.
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

Pensamiento numérico

- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en diferentes contextos y dominios numéricos.

Lo que sabemos

Las expresiones matemáticas se utilizan para establecer relaciones numéricas entre los datos involucrados. En esta guía reconocerás una de las herramientas de las matemáticas más utilizadas: las ecuaciones.

Trabajo en grupo

En grupos de tres estudiantes lean la siguiente información y respondan la preguntas que se encuentran a continuación.

Doña Olga debe determinar el peso de un bulto de maíz y uno de arroz pero no dispone de una báscula adecuada para ello. Sin embargo, logró establecer algunas relaciones que le permitirán calcular los pesos mencionados.

Situaciones que requieren hallar información desconocida

- ¿Qué significado tiene el signo igual en las relaciones planteadas por doña Olga?
- ¿Qué cantidad deben sumar a 25 kilogramos para obtener 100?
- ¿Qué cantidad deben sumar a 50 para obtener 150 kilogramos?
- ¿Qué procedimiento siguieron para determinar estos valores? Expliquen.
- ¿Cuántos kilogramos pesa el bulto de maíz? ¿Y el de arroz?

Comparen los procedimientos utilizados por ustedes con los utilizados por otro grupo para responder las siguientes preguntas.

- ¿Los resultados obtenidos son iguales a los de ustedes?
- ¿El procedimiento utilizado es igual o diferente?
- Junto con el resto de curso socialicen los procedimientos y con ayuda del maestro determinen cuál de ellos es más apropiado para resolver la situación.

Dos expresiones matemáticas son iguales cuando ambas tienen el mismo valor. Se conocen como igualdad.

Aprendamos algo nuevo

Toda igualdad consta de dos miembros:

$$\underbrace{23 + 45}_{\text{Miembro izquierdo}} = \underbrace{37 + 31}_{\text{Miembro derecho}}$$

Realiza lo que se indica en cada caso.

- Suma a cada miembro de la igualdad anterior el número 7.
- Resta a cada miembro de la igualdad el número 12.

- Suma a cada miembro de la igualdad el número -5.
- Resta a cada miembro de la igualdad el número -8.

¿En qué casos se conserva la igualdad?

Analiza las situaciones ilustradas en la siguiente figura:

Situaciones de equilibrio y desequilibrio entre pesos con valores conocidos y valores desconocidos

- ¿En cuáles de las situaciones hay equilibrio y en cuáles no?
- ¿Podrías identificar cuáles objetos tienen peso conocido y cuáles no?

Escribe expresiones usando letras números y signos que representen lo que ocurre en las situaciones de equilibrio.

Las igualdades en las que hay una o más incógnitas, se denominan ecuaciones. El conjunto solución de una ecuación está compuesto por los valores de las incógnitas que hacen verdadera la igualdad.

Trabajo en grupo

- Consideren la ecuación $\boldsymbol{m + (-53) = 71}$. Comprueben la validez de la igualdad remplazando a $\boldsymbol{m}$ por cada uno de los valores señalados en la siguiente tabla. ¿Cuál de los valores de $\boldsymbol{m}$ hace verdadera la igualdad?

Posibles valores de la incógnita m

m	Ecuación $m + (-53) = 71$
18	$\boxed{}$ - 53 = 71
-18	$\boxed{}$ - 53 = 71
124	$\boxed{}$ - 53 = 71
-124	$\boxed{}$ - 53 = 71

- Consideren ahora la ecuación $45 + n = 169$. Encuentren la solución entre los siguientes valores: 174, -174, 124, -124.
- ¿Qué tienen en común las ecuaciones $m + (-53) = 71$ y $45 + n = 169$?

Cuando dos o más ecuaciones tienen el mismo conjunto solución, se dice que son ecuaciones equivalentes.

- Seleccionen la solución de cada ecuación e indiquen cuáles ecuaciones son equivalentes.

Diferentes ecuaciones y posibles soluciones

Ecuación	Posibles soluciones		
$x + (-13) = 35$	-48	48	-22
$78 + p = 56$	-48	48	-22
$(-8) + s = -30$	-48	48	-22
$y + 25 = 73$	-48	48	-22

Trabajo en grupo

Ecuación general

Reúnete con un compañero y consideren el siguiente caso.

Doña Olga hizo un retiro de $50.000 de su cuenta y le queda un saldo de $125.000, ¿cuánto dinero tenía antes del retiro?

Una ecuación general es aquella que se convierte en otras ecuaciones, las cuales son casos particulares de la ecuación general.

La ecuación general que se relaciona con la situación planteada se muestra en la figura.

Ecuación general

Valor desconocido.

$$x + b = c$$

En la ecuación generalizada las letras b y c representan valores conocidos. Estos valores pueden ser enteros positivos o negativos.

Un procedimiento para resolver una ecuación de la forma $x + b = c$, es transformarla en ecuaciones equivalentes de manera que se obtenga una expresión en la que la incógnita esté despejada. Es decir, en la que la incógnita esté sola en uno de los miembros de la igualdad.

Resolver una ecuación significa encontrar el conjunto solución de dicha ecuación. Las ecuaciones de la forma $x + b = c$, tienen un conjunto solución unitario.

- La siguiente figura, muestra cómo se relaciona la ecuación general $x + b = c$, con la situación del dinero de doña Olga.

  Usen el **esquema para resolver una ecuación con una incógnita** y sigan las instrucciones que allí se plantean para saber cuánto dinero tenía doña Olga antes del retiro, mediante transformaciones sucesivas en ecuaciones equivalentes.

Interpretación de los elementos de una ecuación con una incógnita

$$\underbrace{x}_{\text{Cantidad de dinero que tenía en el banco.}} + \underbrace{b}_{\text{Cantidad de dinero que retiró (con signo negativo.)}} = \underbrace{c}_{\text{Dinero que le quedó en la cuenta.}}$$

Esquema para resolver una ecuación con una incógnita

Ecuación general	x	+	b	=	c
Reemplacen a b por la cantidad de dinero que retiró doña Olga (con signo negativo) y a c por el dinero que le quedó en la cuenta.	x	+	_____	=	_____
Sumen el opuesto del sumando que acompaña a la incógnita a ambos lados de la igualdad.	x +	_____	_____	=	_____ + _____
Realicen los cálculos matemáticos correspondientes.			x	=	_____

Con respecto al procedimiento realizado en la tabla anterior:

- ¿Qué resultado se obtiene al sumar un número entero con su opuesto?
- ¿Qué resultado se obtiene al sumar un número entero con cero?
- ¿Qué resultado obtuvieron al lado derecho del igual?
- ¿Cuál es el valor de la incógnita?
- Comprueben que el valor encontrado de la incógnita hace que se verifique la igualdad.

De forma individual responde las siguientes preguntas:

- ¿La expresión $x = x$, es una igualdad? ¿Es una ecuación?
- ¿Cuales valores que pertenecen a los números enteros satisfacen dicha expresión?
- ¿Las ecuaciones tienen siempre una única solución?, ¿pueden tener varias soluciones?, ¿pueden tener infinitas soluciones?
- Observa la expresión $x + 2 = x + 8$. ¿Podrías encontrar valores enteros para x que hagan que la igualdad sea verdadera?
- ¿Existen ecuaciones donde no hay solución dentro de los números naturales?

Ejercitemos lo aprendido

1. Determina si las siguientes igualdades son *verdaderas o no.* ¿Cómo verificas en cada caso? Explica.

   » $23 + 45 = 37 + 31$

   » $(-32) + (-16) = -20 - 28$

   » $74 + 25 = 68 + 21$

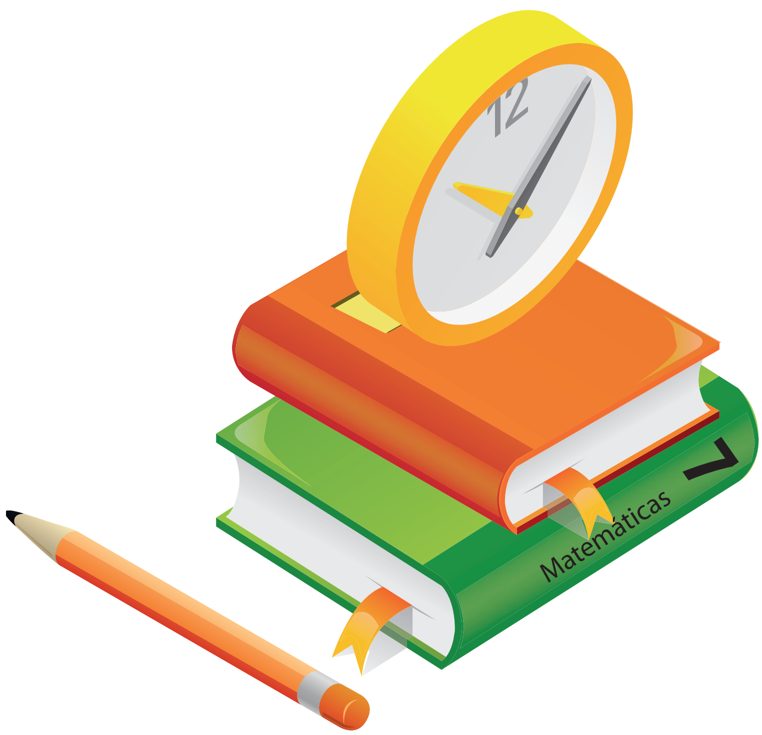
   » $53 - 34 = 34 - 53$

2. Si se tiene la expresión $4 + 5 = 8 + 1$, determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

    - Al sumar un número entero a ambos miembros de una igualdad, esta se conserva.
    - Al restar un número entero a ambos miembros de una igualdad, esta se conserva.

3. Escribe una ecuación que represente cada situación.

    - La edad de Julia aumentada en 13 años es 35.
    - Si a la estatura de Pablo se le disminuyen 15 cm, se obtiene 148 cm.
    - La temperatura inicial de una ciudad era 13 ºC. Si esta varió algunos grados y quedó en –4 ºC.
    - A un número se le suma (-21) y se obtiene (-48).



Guía 3

Otro tipo de ecuaciones

Estándares:

Pensamiento variacional

- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
- Utilizo métodos informales (ensayo – error, complementación) en la solución de ecuaciones.

Pensamiento numérico

- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en diferentes contextos y dominios numéricos.

Lo que sabemos

Las ecuaciones expresan variadas relaciones matemáticas entre las cantidades involucradas, facilitando la solución de diferentes situaciones.

Trabajo en grupo

Reúnete con dos de tus compañeros y resuelvan la siguiente situación.

En una competencia un pesista levantó en su primer intento 90 kg en total, la barra pesa 10 kg y usó dos discos del mismo peso, como se ilustra en la figura.

Propongan algunos pesos para los discos y verifiquen que el peso de la barra más el peso de los dos discos sea 90 kg.

¿Cuál debe ser el peso de cada disco?

Un pesista levanta dos discos de peso desconocido

Aprendamos algo nuevo

En el segundo intento el pesista desea levantar un peso total de 110 kg, utilizando la misma barra de 10 kg, los asistentes han sustituido los dos discos usados anteriormente por cuatro discos del mismo peso. Para averiguar el peso de cada disco desarrollen la siguiente actividad:

- Identifiquen las incógnitas y los valores conocidos.
- Completen la información de la siguiente tabla:

Equivalencia del lenguaje cotidiano y el matemático

Lo qué se representa	Cómo se representa
Peso de cada disco	
Número de discos	
Peso de la barra	
Peso total	

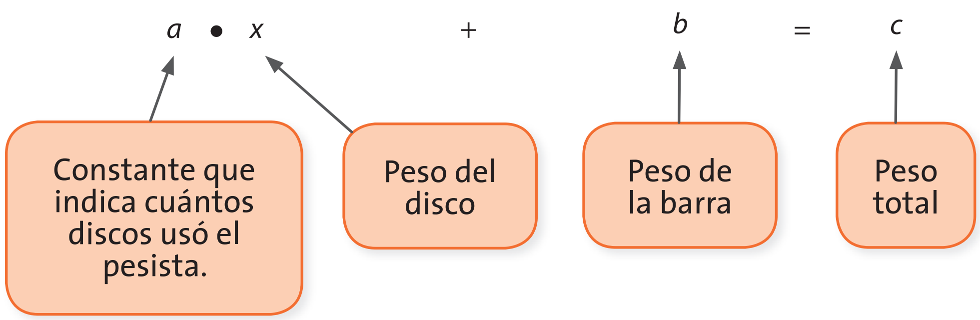
¿Es posible incluir todos los elementos identificados de la situación en la siguiente ecuación general $x + b = c$ donde *b* y *c* son números conocidos?

Las ecuaciones de la forma *a*•*x* + *b* = *c*

Tienen un término aditivo *b* que se suma al término *a* • *x*. Esto indica que se requiere restar *b* para solucionar la ecuación y un término multiplicativo *a* • *x* donde la constante conocida *a* multiplica a la incógnita *x*, lo cual implica la necesidad de dividir por *a* para solucionar la ecuación. Requerimos de una nueva constante *a* para representar cuántas veces se encuentra la incógnita.

- ¿Cómo se podría representar correctamente la situación en una ecuación?
- El siguiente esquema, muestra una ecuación general y la forma como se relaciona cada uno de sus elementos con la situación del segundo intento del pesista.

Interpretación de los elementos de una ecuación con una incógnita y un término multiplicativo



- Comprueben si la ecuación que representa la situación, tiene dicha forma.
- Escriban los valores correspondientes a las letras *a*, *b*, y *c* en la siguiente tabla.

Sustitución de constantes en una ecuación de la forma $a \bullet x + b = c$

Letra a sustituir	Valor (Escribir el número correspondiente)
***a*: Constante que multiplica a la incógnita *x*.**	
b: Constante que se suma al término ***ax*.**	
c: Constante a la derecha del igual.	
Sustituyan las letras *a*, *b* y *c* por los valores encontrados en la ecuación ***ax* + *b* = *c*.**	

- ¿Cuál es la letra que representa a la incógnita?
- ¿Qué operación está realizando el número 10 en la ecuación hallada?
- ¿Qué operación está cumpliendo la incógnita en el término 4*x*?
- ¿Qué significa el valor 110?

Completen el procedimiento de la tabla **Sustitución de constantes en una ecuación de la forma $a \cdot x + b = c$,** para resolver la ecuación:

$$4x + 10 = 110$$

Operaciones para hallar la solución

Ecuación general	$ax + b = c$
Ecuación particular	$4x + 10 = 110$
Resta ***b*** en ambos miembros de la ecuación.	$4x + 10$ ___ $= 110$ ___
Calcula las restas a ambos lados.	$4x +$ ___ $=$ ___
Divide por ***a*** en ambos lados de la ecuación.	$x \div$ ___ $=$ ___ $\div$ ___ $x =$ ___

Considera la siguiente situación:

Inicialmente el pesista levanta un máximo de 110 kilogramos pero realiza un plan de entrenamiento de seis meses que le permite levantar dos kilogramos más por cada mes de entrenamiento. ¿Podrías calcular cuánto peso podrá levantar al final de cada uno de los seis meses?

En la siguiente tabla, se muestra una ecuación que permite calcular el peso ***p*** conociendo el número de meses que el pesista ha entrenado. Completa la tabla reemplazando la letra ***t*** por el número de meses y calcula el peso.

Ecuación para el peso y el tiempo de entrenamiento

Tiempo de entrenamiento en meses (t)	Ecuación para calcular el peso que levanta el pesista $p = 110 + 2t$	Peso en kg p
1		
2		
3		
4		
5		
6		

En la ecuación $p = 110 + 2t$:

- ¿Cuántos meses se necesitarán de entrenamiento para que el pesista logre levantar 136 kg?
- ¿Cuántas incógnitas hay?
- ¿Qué ocurre con el valor de ***p*** cuando cambia el valor de ***t***?

Ejercitemos lo aprendido

1. Soluciona las siguientes ecuaciones:

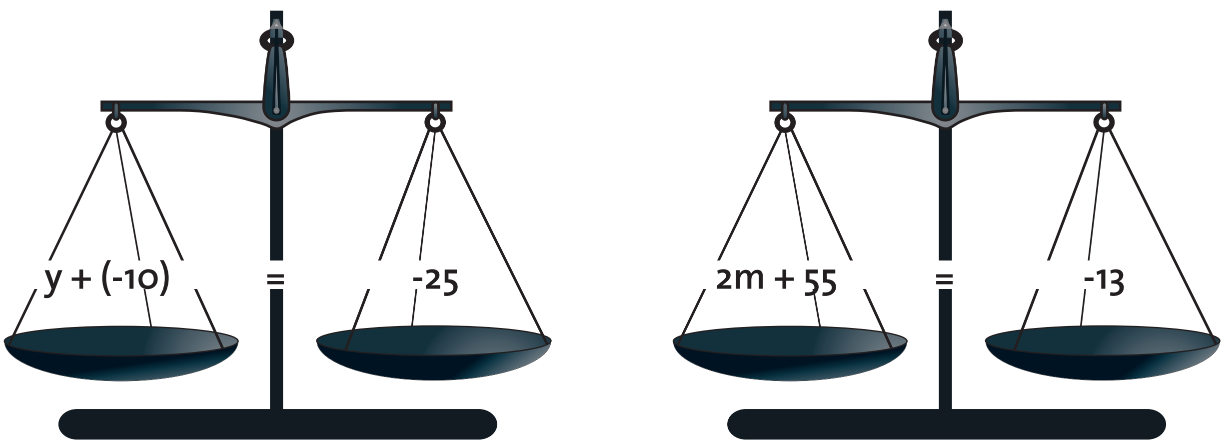
   » $8 + 3x - 5 = 6$

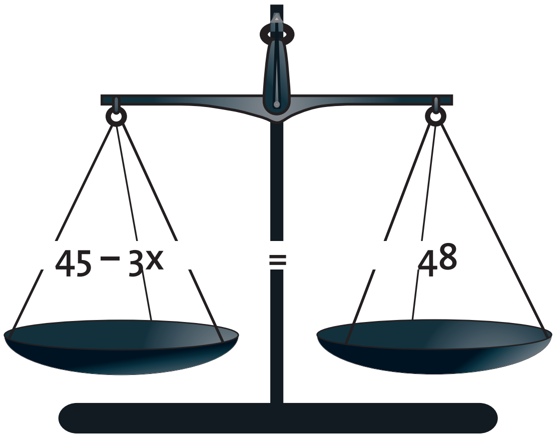
   » $2x = 10$

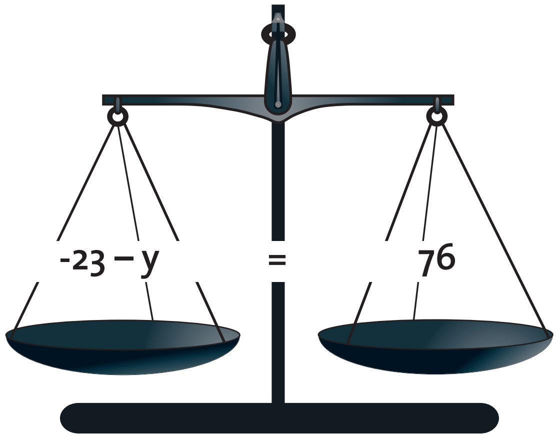
   » $6x - 17 = 1$

2. Halla el valor la incógnita que mantiene en equilibrio cada balanza.

Equilibrio entre pesos







3. Completa la tabla indicando la operación realizada como muestra el ejemplo.

Completar los espacios vacíos

Ecuación	Operación	Solución
$x + 37 = -29$	Restar 37 a ambos lados de la igualdad.	$x = -56$
$24 + x = 16$		
$x + 83 = -10$		
$-28 + x = 35$		

4. Escribe una ecuación que represente cada situación. ¿Cuál es el valor de la incógnita en cada caso?

   a. La suma de un número con (–8) es 36. ¿Cuál es el número?

   b. Si a cierto número se le resta 24, se obtiene (–18). ¿Cuál es el número?

   c. Si Marcos hizo un retiro de \$ 50.000 de su cuenta y le quedan \$125.000, ¿cuánto dinero tenía antes del retiro?

5. Daniel tiene tres billetes de \$ 10.000 y dos billetes de \$ 20.000. Lucía tiene un billete de \$ 50.000 y un billete de \$ 20.000. Ambos reciben \$ 150.000 al final de la semana por su trabajo. ¿Con cuánto dinero queda cada uno?

Apliquemos lo aprendido

1. Al nacer un niño una enfermera llena un formulario con los siguientes datos: Nombre de la madre, fecha y hora de nacimiento, estatura, peso y color de ojos. La madre debe llevar a control al bebé cada mes durante seis meses pero no pudo llevarlo en el cuarto mes. En la siguiente tabla, se ilustra qué datos se deben tomar. Con ayuda de familiares y amigos llena tu tabla con datos razonables. Cuando hayas completado tu tabla, clasifica la información en variables y constantes. Encuentra valores aproximados de los datos del cuarto mes.

Algunos datos de seguimiento del desarrollo de un niño

Nombre de la madre___________________
Fecha de Nacimiento___________________
Hora de nacimiento___________________

Mes	Estatura	Peso	Color de los ojos
1			
2			
3			
4			
5			
6			

2. Dos mineros encontraron cuatro piezas de oro, con los pesos indicados en la siguiente tabla:

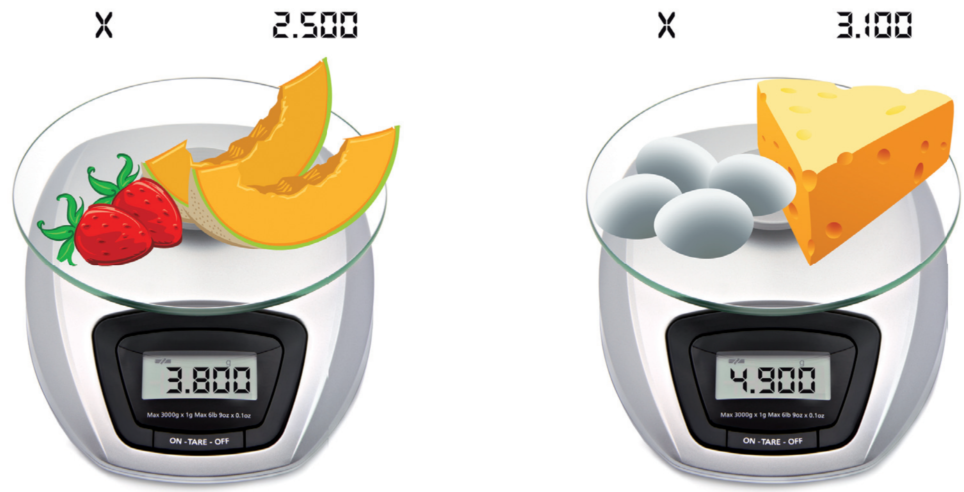
Pesos de cuatro piezas de oro halladas por dos mineros

Pieza	Peso en gramos
1	5
2	6
3	4
4	3

Representa gráfica y analíticamente cómo deben repartir las piezas entre ellos dos, en forma equitativa.

3. Plantear ecuaciones es un procedimiento que se utiliza para resolver problemas. Escribe una ecuación que represente cada situación. Y halla la solución para cada caso. Ver la siguiente figura.

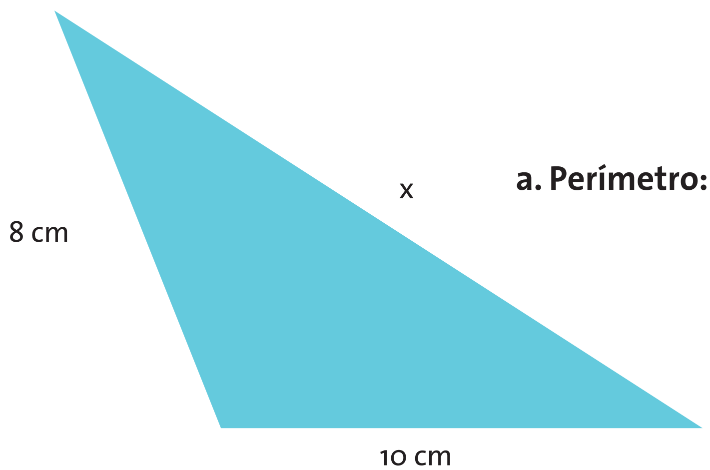
Pesaje simultaneo de cuerpos, incluidos pesos desconocidos



4. Javier envía a su madre como regalo un juego de 24 copas en un embalaje de 200 gramos. El paquete pesó en total 1.400 gramos. Identifica los valores conocidos y desconocidos. ¿Cuál es el peso de una copa?

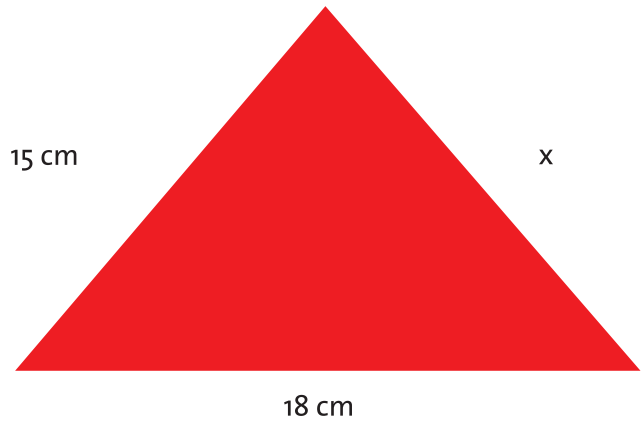
5. Encuentra el valor del lado desconocido de los triángulos mostrados en la siguiente figura.

Triángulos escalenos con un lado desconocido

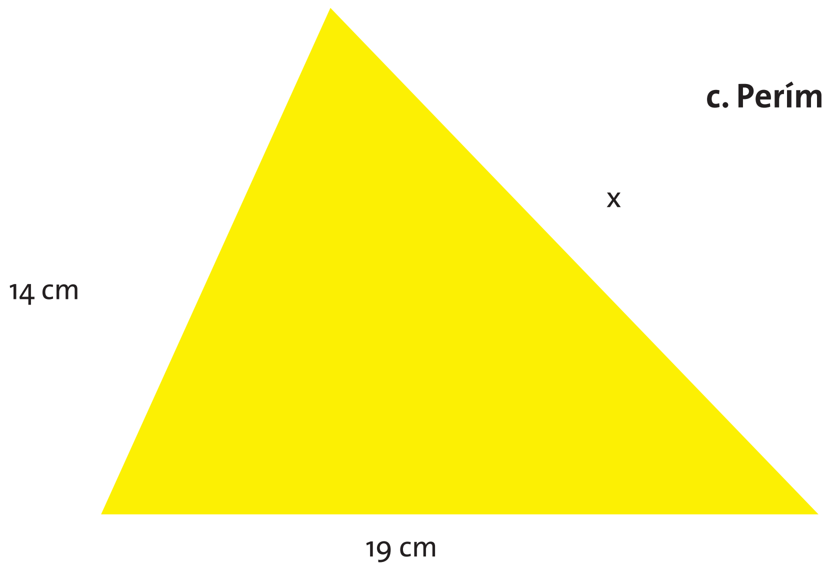


a. Perímetro: 25 cm

b. Perímetro: 45 cm



c. Perímetro: 48 cm



6. Asocia cada ecuación de la columna A con la respuesta correspondiente de la columna B.

A	B
a. $5x + 3 = 23$	$x = -1$
b. $14 + 3x - 5 = 6$	$x = 2$
c. $4x + 6 = 14$	$x = 4$
	$x = 2$

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

Para las preguntas 1 a 3 selecciona la mejor respuesta de acuerdo con el siguiente texto, el cual fue adaptado de Godino y Font (2003).

"Generalmente, una ecuación de primer grado con una incógnita tiene una única solución, por ejemplo $2x + 3 = 5$. Pero hay excepciones. Por ejemplo, $5x - 4 = 5x$ es una ecuación sin solución, porque es imposible que, restando cuatro a un número obtengamos este mismo número. Por otra parte hay ecuaciones como, por ejemplo, $5x + 7 - 3 = 5x + 4$ que tienen infinitas soluciones porque la igualdad se cumple para cualquier valor de la incógnita. Si en el primer miembro substituimos $7 - 3$ por 4, la ecuación anterior se convierte en: $5x + 4 = 5x + 4$. Esta igualdad se verifica para cualquier valor de x porque en realidad lo que afirma esta igualdad es que un número ($5x + 4$) es igual a él mismo y esto se cumple siempre".

1. Las ecuaciones de primer grado con una incógnita:

   a. Tienen única solución.

   b. Tienen infinitas soluciones.

   c. No tienen solución.

   d. Generalmente tienen una solución pero pueden tener infinitas o ninguna.

2. Una incógnita es:

   a. Una letra que representa un único valor desconocido, que satisface una igualdad.

   b. Una letra que representa uno o más valores desconocidos que satisfacen una igualdad.

   c. Una letra que representa todos los valores desconocidos que satisfacen una igualdad.

   d. Una letra que siempre representa una variable.

3. La expresión $5x + 7 - 3 = 5x + 4$ equivale a:

   a. Todo número es igual a sí mismo.

   b. Cuatro es igual a cuatro.

   c. Hay un número x tal que al multiplicarlo por 5, sumarle 7 y restarle 3, da el mismo resultado que multiplicarlo por 5 y sumarle 4

   d. $7 – 3 = 4$

¿Cómo me ven los demás?

1. En grupos de tres estudiantes, seleccionen una persona del grupo, o un objeto del salón de clase.

   - Hagan una lista de características de dicho objeto; identifiquen la clase de variables que se pueden establecer con esas características.
   - Discutan si las clasificaciones de las características son correctas.
   - Corrijan las listas anotando cuáles características decidieron quitar o agregar y por qué lo decidieron.
   - Presenten a todo el grupo sus conclusiones.

2. Se puede estimar la estatura promedio de personas entre 6 y 17 años conociendo la edad de acuerdo con la ecuación:

   $\boldsymbol{y} - 5\,\boldsymbol{x} = 82$, donde ***y*** es la estatura y ***x*** la edad.

   - En una hoja, cada miembro del grupo debe usar la ecuación para estimar su propia estatura partiendo de su edad.
   - Intercambien las hojas, revisen los procedimientos realizados.

- Registren cuáles fueron los errores cometidos y cómo corregirlos.
- Presenten al grupo sus conclusiones.
- Expresen su opinión acerca de las ventajas y desventajas al realizar este trabajo en grupo.

¿Qué aprendí?

Responde según la manera en la que te desenvolviste en el desarrollo del módulo. Esto te ayudará a identificar en qué aspectos debes reforzar tu estudio, justifica tu elección.

Aspecto	Sí	A veces	No	Justifico
Identifico cuál es el dato desconocido en una situación y lo represento usando una letra.				
Interpreto enunciados verbales y los modelo utilizando ecuaciones con enteros.				
Identifico las operaciones que me permiten hallar la solución de ecuaciones.				
Modelo situaciones aditivas con ecuaciones de la forma $x + b = c$.				
Identifico y soluciono ecuaciones de la forma $ax + b = c$.				
Realizo mis tareas responsablemente tanto en los trabajos individuales como grupales.				
Participo de manera activa en clase y respeto la participación de mis compañeros.				

Determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento con tu maestro.

Módulo 2

Avanzando sobre grandes sistemas numéricos

¿Qué vas a aprender?

Supongamos que dos niños se encuentran tres naranjas. ¿Cómo harían los niños para repartirlas equitativamente? Situaciones como esta, imponen la necesidad de un conjunto donde sea posible realizar operaciones como $3 \div 2$. A este conjunto se le denomina números racionales $\mathbb{Q}$ en el cual todos los elementos se pueden expresar como la razón de números enteros.

Durante mucho tiempo se creyó que cualquier cantidad se podía expresar como un número racional $\frac{p}{q}$ llamándose *lo conmensurable*, puesto que era posible encontrar una unidad que midiera exactamente a la otra, pero se encontraron situaciones en las cuales las cantidades no podían ser expresadas de esta forma. Por ejemplo no se pudo encontrar un par de números enteros p y q y tales que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. A estos números se les denominó Irracionales $\mathbb{I}$, porque no pueden ser expresados como la razón de dos números enteros, a esto se le llamó *inconmensurabilidad*, es decir no se encontraba una unidad que permitiera dividir exactamente a esta.

La unión de los números racionales e irracionales conforman el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

En el presente módulo desarrollarás los conceptos relacionados con las operaciones suma, resta, multiplicación y división de los números racionales y e irracionales, así como las propiedades de tales operaciones dentro de cada uno de estos conjuntos.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento numérico

- Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
- Utilizo números Racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medidas.
- Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.
- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.

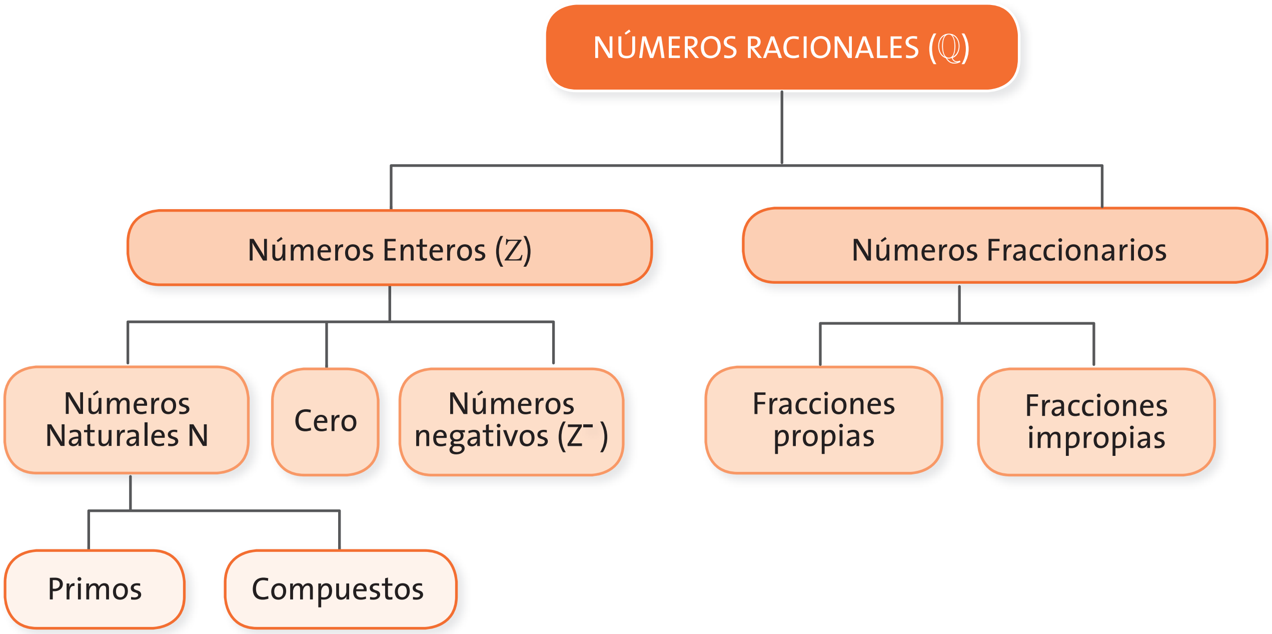
Pensamiento espacial

- Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

La realización de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo permitirá alcanzar estándares básicos de competencias que privilegian el desarrollo del pensamiento numérico y geométrico, a través de los conceptos asociados a las operaciones básicas de números racionales y reales así como algunas representaciones y resolución de situaciones que emplean dichos números. La tabla que se presenta a continuación muestra los conceptos desarrollados y los procesos fortalecidos a través de las diferentes guías.

Guías	Conceptos	Procesos
Guía 4. Un nuevo conjunto numérico	**Parte, todo** **Fracciones equivalentes** **Representante de la clase** **El conjunto de los racionales** **Representación de racionales en la recta**	El trabajo de estos estándares permitirá el fortalecimiento de los procesos de: • **Formulación, tratamiento y resolución de problemas,** mediante el planteamiento de situaciones que impliquen el uso de operaciones básicas con números racionales y reales. Por otra parte se presentan secciones donde se presentan problemas y ejercicios para ser resueltos mediante operaciones de números reales y racionales. • La **comunicación,** por cuanto se introducen diferentes notaciones y formas de representar cantidades y operaciones básicas con números racionales y reales • El **razonamiento,** ya que se invita a los estudiantes a verificar y discutir las propiedades de los diferentes conjuntos numéricos usados, basándose en sus propiedades. Se presentan demostraciones formales, seguidas por una discusión y una serie de preguntas para que el estudiante confronte con su propio razonamiento.
Guía 5. Operaciones aditivas con números racionales	**Adición y sustracción con racionales** **Propiedades que cumple la adición**	
Guía 6. Operaciones multiplicativas con números racionales	**Multiplicación y división con racionales** **Propiedades que cumple la multiplicación**	
Guía 7. Las expresiones decimales de los números racionales	**Conversión de a/b a expresiones decimales y viceversa** **Relaciones de orden de los racionales como decimales**	
Guía 8. Operaciones con los números racionales como expresiones decimales	**Adición, sustracción, multiplicación y división con expresiones decimales de números racionales**	

En el siguiente esquema observarás la relación existente entre los conceptos que vas a estudiar en el módulo.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

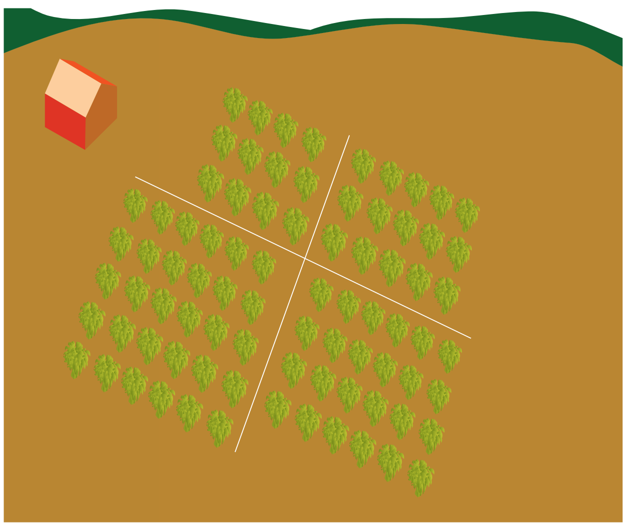
Los números racionales son utilizados frecuentemente, ya sea con su notación fraccionaria o decimal, en múltiples situaciones de la vida cotidiana: al partir una torta en partes iguales, en la administración del dinero, en ciencias como la física, química y biología, y, de manera general, en la interpretación y expresión de resultados de mediciones, grandes y pequeñas, apoyadas en magnitudes diferentes. Los números irracionales son un conjunto de números ampliamente usados en diferentes ciencias exactas y aplicadas; su utilidad es similar a la de los decimales y racionales pero permite dar respuestas exactas a problemas que no pueden ser resueltos dentro del conjunto de los racionales. Juntos, números racionales e irracionales forman un conjunto denominado números reales cuyo estudio y conocimiento es requisito para el entendimiento de ciencias e ingeniería.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En el desarrollo del módulo se proponen diferentes momentos en los que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evidenciar y analizar los progresos que tuviste en cuanto al aprendizaje de los conceptos relacionados con los números racionales e irracionales, sus expresiones decimales y las operaciones que se pueden efectuar con ellos así como la propiedades de las mismas.

Encontrarás las secciones *Aplico lo aprendido* y *Evaluación*, en las que se proponen diferentes actividades, problemas y situaciones que te invitarán a poner en práctica tus conocimientos relacionados con las operaciones suma, resta, multiplicación y división de números racionales e irracionales, así como sus propiedades. También podrás realizar trabajos individuales o grupales que pondrán a prueba tus habilidades para expresar tus ideas y razonamientos a cerca de los mismos temas.

Explora tus conocimientos



Un caficultor tiene una finca de 2.472 m^2, separada en cuatro parcelas para sembrar diferentes variedades de café de acuerdo con la siguiente distribución:

Con café arábigo $\frac{1}{9}$ del terreno; con café Borbón, $\frac{5}{12}$; con café caturra, $\frac{1}{4}$ y el resto con variedad Colombia.

- ¿Cuántos m^2 no están sembrados de variedad Colombia?
- ¿Cuántos m^2 están sembrados de cada variedad de café?

Guía 4

Un nuevo conjunto numérico

Estándares:

Pensamiento numérico

- Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.
- Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.

Lo que sabemos

Cuando se habla de un cuarto de hora, de la mitad de una torta o de las dos terceras partes de un depósito de gasolina, se hace referencia a las partes iguales en que se puede dividir un total. Estos ejemplos hacen evidente que el uso de las fracciones en la vida cotidiana es más común de lo que se cree. Pero el uso de las fracciones en determinados contextos da su potencialidad en las situaciones de diferentes ciencias como de la cotidianidad. En matemáticas, los fraccionarios dan los cimientos para construir un nuevo conjunto numérico denominado números racionales.

Trabajo en grupo

Organícense en grupos de cuatro estudiantes y desarrollen las siguientes actividades.

- Completen la siguiente tabla con los datos solicitados.

Datos de estudiantes de una escuela

(I)	(II) Número de estudiantes	(III) Parte o fracción del total de estudiantes de la escuela
De la escuela		
De sexto grado		
De séptimo grado		
De octavo grado		
De noveno grado		

- ¿Qué clase de números utilizaron para completar la tercera columna de la tabla?
- ¿Han estudiado este tipo de números antes? ¿Qué significado tienen? Expliquen sus respuestas.

Aprendamos algo nuevo

Si en el curso de Juliana hay 36 estudiantes, y doce de ellos son hombres, la parte del total que representan se puede escribir como la **fracción** $\frac{12}{36}$.

En la fracción $\frac{a}{b}$ anterior, 12 es el **numerador** y 36 es el **denominador**.

Una fracción $\frac{a}{b}$ es el cociente indicado de dos números naturales en el que el divisor nunca va a ser cero.

$\frac{a}{b}$

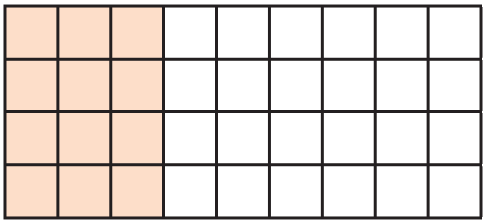
a ← **Numerador:** número de partes que se toman.

b ← **Denominador:** número de partes en que se divide la unidad.

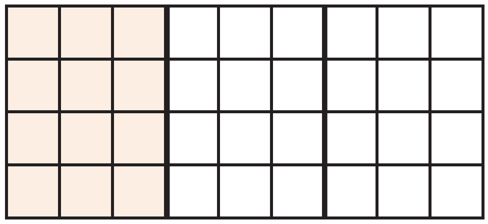
Juliana, afirma que la cantidad de hombres corresponde a $\frac{1}{3}$ del total de estudiantes del curso. ¿Es cierta esta afirmación?

- Para responder la pregunta anterior, copien las cuadrículas de la siguiente figura, y discutan acerca de la representación de las fracciones $\frac{12}{36}$ y $\frac{1}{3}$.

Fracciones equivalentes



$\frac{12}{36}$



$\frac{1}{3}$

- ¿Estas fracciones están representando la misma parte sombreada con respecto a la totalidad? Expliquen su respuesta.

Si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan la misma parte con respecto a la totalidad, se dice que son **fracciones equivalentes**. La equivalencia de fracciones se verifica cuando el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\begin{array}{rcccl} \text{Extremo} \rightarrow & a & & c & \leftarrow \text{Medio} \\ & \overline{} & = & \overline{} & \\ \text{Medio} \rightarrow & b & & d & \leftarrow \text{Extremo} \end{array}$$

si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$

A continuación se muestran parejas de fracciones. Estudien si son equivalentes o no.

$\frac{8}{6}$ y $\frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{10}{12}$ y $\frac{15}{18}$ $\quad$ $\frac{21}{30}$ y $\frac{9}{10}$ $\quad$ $\frac{14}{3}$ y $\frac{21}{9}$

1. Martín, un compañero de Juliana, dice que el número de mujeres del curso representan $\frac{2}{3}$ del total de los estudiantes. ¿Es cierta esta afirmación? ¿Por qué?

- Si en el curso hay 36 estudiantes y 12 de ellos son hombres, entonces hay 24 mujeres.

  Por lo tanto, la fracción del total del curso que corresponde a las mujeres es $\frac{24}{36}$.

- Dividan el numerador y el denominador de $\frac{24}{36}$ por un divisor común a los dos términos. ¿Cuál es ese número y cómo queda la nueva fracción?

- Copien y completen la siguiente secuencia. Escriban en los interrogantes los resultados que van obteniendo de cada división.

$$\frac{24}{36}=\frac{24 \div 2}{36 \div 2}=\frac{?}{?}=\frac{? \div 2}{? \div 2}=\frac{?}{?}=\frac{? \div 3}{? \div 3}=\frac{?}{?}$$

$$\frac{24}{36}=\frac{?}{?}=\frac{?}{?}=\frac{?}{?}$$

Se pueden obtener fracciones equivalentes a una dada multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número. (Este método es conocido como amplificación).

O, dividiendo el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número. (Este método es conocido como simplificación).

Amplificando

$$\underbrace{\frac{1}{3}}_{\uparrow}=\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}=\underbrace{\frac{2}{6}}_{\uparrow}$$

Fracciones equivalentes

Simplificando

$$\underbrace{\frac{6}{9}}_{\uparrow}=\frac{6 \div 3}{9 \div 3}=\underbrace{\frac{2}{3}}_{\uparrow}$$

Fracciones equivalentes

Cuando una fracción no se puede simplificar más se dice que se obtiene una fracción **irreducible**.

Por ejemplo:

$$\frac{18}{24}=\frac{18 \div 2}{24 \div 2}=\frac{9}{12}=\frac{9 \div 3}{12 \div 3}=\frac{3}{4} \leftarrow \text{Fracción irreducible}$$

2. Calculen tres fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ ¿Pueden encontrar más?

Una fracción y todas las fracciones equivalentes a ella determinan un conjunto denominado clase y el número que representa la clase es la fracción irreductible. Cada representante de la clase es conocido como número racional.

Por ejemplo, $\frac{1}{3}$ es el número racional ya que es el representante de la clase que se define en el siguiente conjunto de fracciones equivalentes:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \ldots$$

Si se extiende este conjunto a numeradores y denominadores que pertenecen a los enteros. Se tendría que $\frac{1}{3}$ también representa al siguiente conjunto de fracciones equivalentes que tienen tanto el numerador como el denominador números enteros negativos.

$$\frac{1}{3}=\frac{-3}{-3}, \frac{-2}{-6}, \frac{-3}{-9}, \frac{-4}{-12}, \frac{-5}{-15}, \frac{-6}{-18}, \frac{-7}{-21}, \frac{-8}{-24}, \frac{-9}{-27}, \ldots$$

Como toda fracción a su vez representa una división; y como ya sabemos que la división entre enteros negativos el cociente es un entero positivo; esta regla se traslada a las fracciones. Por esa razón, decimos que son la misma fracción.

Observa los siguientes ejemplos:

$$\frac{1}{3}=\frac{-1}{-3} \qquad \frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}$$

Al extender las equivalencias de las fracciones con enteros positivos a enteros negativos encontramos otro tipo de clases de fracciones equivalentes que corresponde a números racionales negativos.

Estudia el siguiente ejemplo:

Escribir las posibles fracciones equivalentes para que el representante del conjunto de la clase sea el número racional $-\frac{2}{5}$.

Para ello, se tiene que los conjuntos de clase sean:

$$-\frac{2}{5}=\frac{-2}{5}, \frac{-4}{10}, \frac{-6}{15}, \frac{-8}{20}, \frac{-10}{25}, \quad \text{o} \quad -\frac{2}{5}=\frac{2}{-5}, \frac{4}{-10}, \frac{6}{-15}, \frac{8}{-20}, \frac{10}{-25}$$

- Encuentren el conjunto de fracciones equivalentes que determinan de qué clase es el número racional $-\frac{7}{5}$.
- El número racional $-\frac{3}{7}$ es el representante de clase de un conjunto de fracciones equivalentes. Escriban el conjunto de fracciones equivalentes.

En general, todos los números racionales se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$ siendo *a* y *b* números enteros y *b* es diferente de cero.

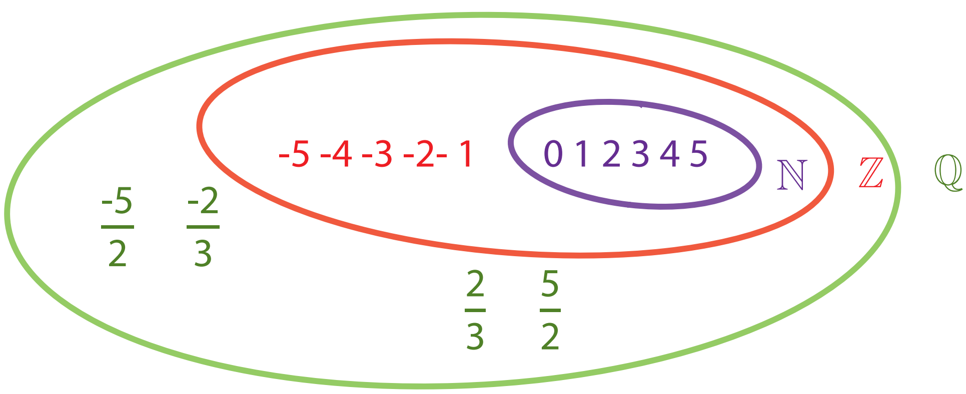
Por lo tanto, algunos ejemplos de números racionales son los siguientes:

$$4, \frac{5}{14}, -9, \frac{7}{4}, 0, 10, \text{ y } \frac{3}{5}$$

El conjunto de los números racionales se denota por el símbolo $\mathbb{Q}$.

El conjunto que resulta de unir todas las clases de los conjuntos de las fracciones equivalentes que determinan los números racionales es el **conjunto de los números racionales**. Ver el diagrama a continuación.

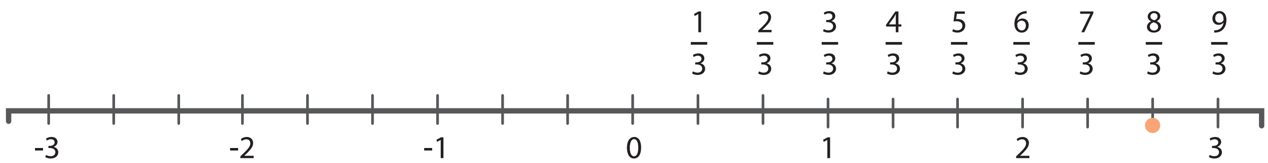
Diagrama representativo de conjuntos de números



Representación de los números racionales en la recta numérica

Sigan este proceso para representar un número racional en la recta numérica.

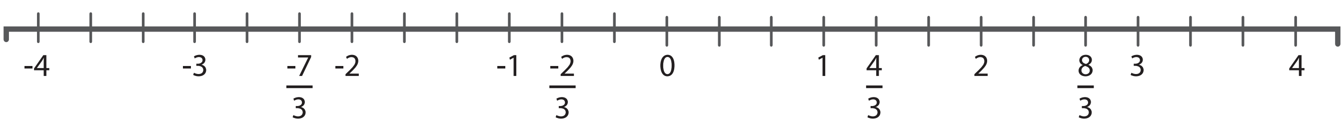
- Tracen una recta horizontal y ubiquen el punto correspondiente a 0 y determinen la ubicación de números enteros positivos y enteros negativos a la misma distancia uno del otro.
- Dividan cada unidad en el número de partes que indica el denominador.
- Cuenten el número de partes que indica el numerador. Si es positivo, se avanza hacia la derecha y si es negativo, hacia la izquierda. Donde termine el conteo ahí se representa el racional solicitado.
- El número racional se representa con un punto. En la siguiente figura, se representa el racional $\frac{8}{3}$ en la recta numérica, cuyas unidades positivas se han dividido en tercios.



Representación de racionales en la recta numérica

Cuando la recta es horizontal, los números racionales positivos (Q^+) se representan a la derecha del 0 y los números racionales negativos (Q^-), a la izquierda de 0. Como se muestra en la siguiente figura.

Representación de racionales positivos y negativos en la recta numérica



Cuando la recta es vertical, los números racionales positivos (Q^+) se representan arriba del 0 y los números racionales negativos (Q^-), abajo del 0.

- Representen en una recta horizontal cada uno de los siguientes números racionales:

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{13}{4} \qquad -\frac{10}{2} \qquad -\frac{8}{15}$$

Ejercitemos lo aprendido

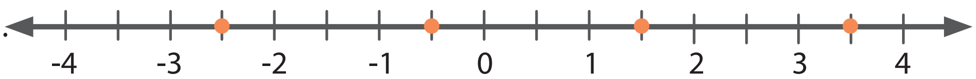
1. Responde las preguntas y explica cada respuesta.
   - El número 0, ¿es un número racional?
   - Explica la diferencia entre los números enteros y los números racionales.
   - ¿Todos los números enteros son racionales?
   - ¿Todos los números racionales son enteros?
   - ¿Se puede afirmar que el conjunto de los números enteros es subconjunto del conjunto de los números racionales? ¿Por qué?
2. Resuelve las situaciones.
   - Un curso está conformado por 42 estudiantes. ¿Se puede afirmar que $\frac{3}{6}$ del total son hombres y $\frac{4}{7}$ son mujeres? ¿Por qué?
   - En un curso de noveno se encuentra el número de materias pendientes y su correspondiente frecuencia relativa. Escribe la frecuencia absoluta (número de estudiantes) que perdieron esa cantidad de materias. Ver la siguiente tabla.

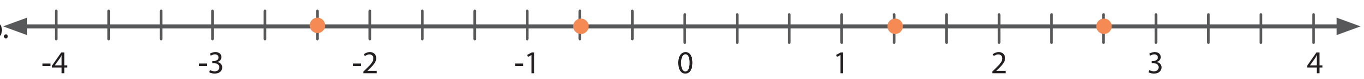
Nivel académico de un curso de 30 estudiantes

	Número de materias pendientes					
	0	1	2	3	4	5
Parte del total de los estudiantes (frecuencia relativa)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$
Número de estudiantes (Frecuencia absoluta)						

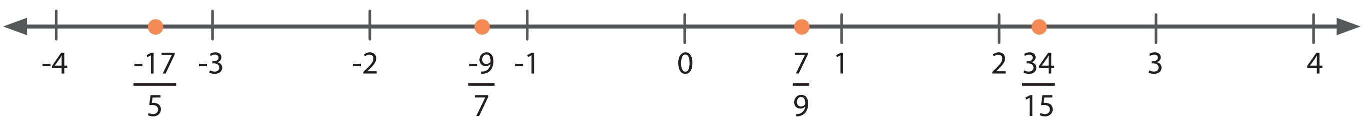
3. Escribe los números racionales que corresponden a los puntos que están representados en cada recta numérica de la figura a continuación.

Representación de racionales en la recta numérica

a.


b.


4. Verifica cuáles números racionales están correctamente representados en la recta:



Guía 5

Operaciones aditivas con números racionales

Estándares

Pensamiento numérico

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.

Lo que sabemos

En muchas ocasiones nos enfrentamos a situaciones que exigen adición y/o sustracción con números racionales. Cuando los racionales están expresados de la forma $\frac{a}{b}$ hay situaciones como un tractorista que trabaja todos los días pero no logra completar una hectárea por día, al finalizar la semana debe sumar las fracciones de hectárea trabajadas para conocer el total de hectáreas trabajadas en la semana. Situaciones como esta le dan sentido al estudio de las sumas y restas que se pueden efectuar con fracciones y cuya estructura es expandida a los números racionales. En la presente guía se abordarán las operaciones aditivas (adición y sustracción) de los números racionales.

Trabajo en grupo

Organícense en grupos de tres integrantes y desarrollen las siguientes actividades.

1. La producción de café de cierta finca cafetera del Quindío se muestra en la siguiente tabla. Complétenla.

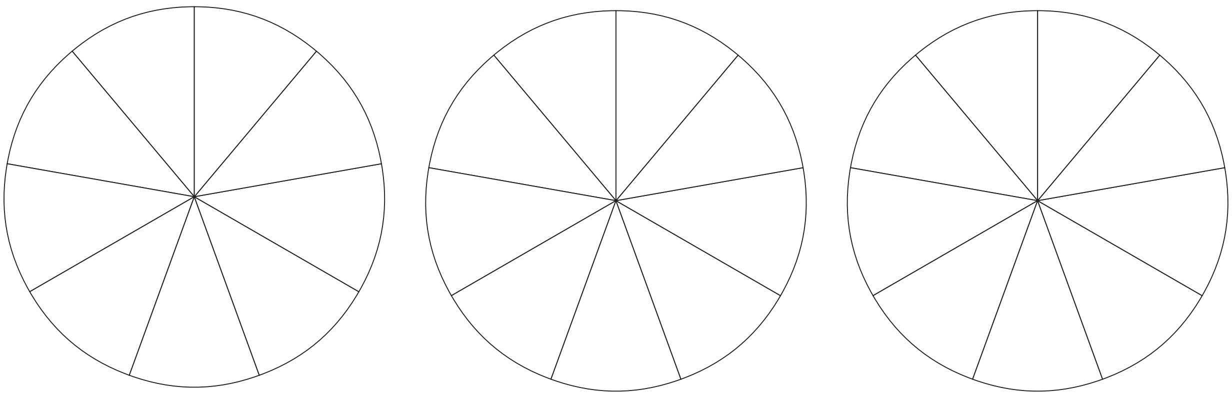
Datos de producción de café

	Distribución en la finca de la producción de café	Fracción
Café para exportación	Cuatro novenos	
Café que se vende en el Quindío	Dos novenos	
Café que se vende en otros departamentos	Un tercio	

- ¿Qué fracción representa la producción de café que se destina para exportación y la venta en el Quindío?

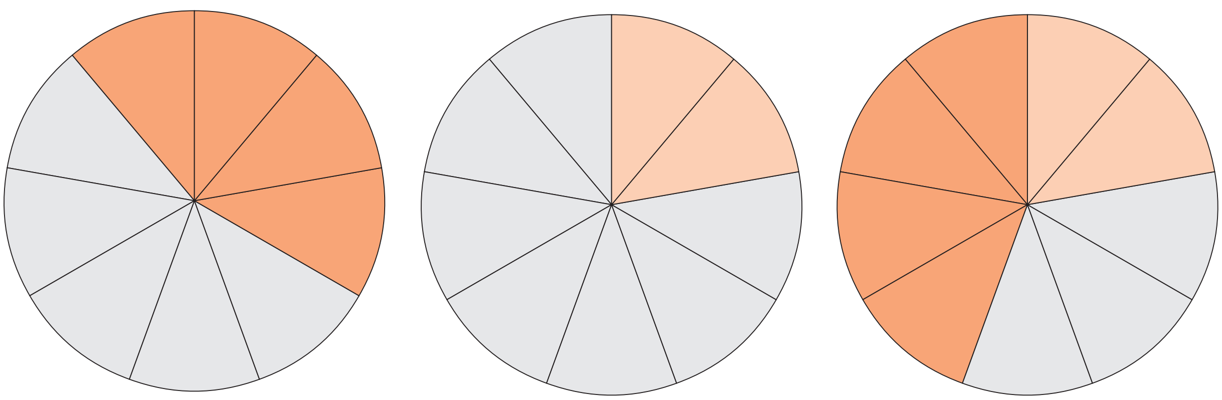
- ¿Qué fracción de la producción de café se vende en el país?¿Cuál es la diferencia en la producción de café entre la fracción que se vende en otros departamentos y la fracción que se vende en el Quindío?

- Representen cada una de las fracciones en las regiones circulares de las siguientes figuras:



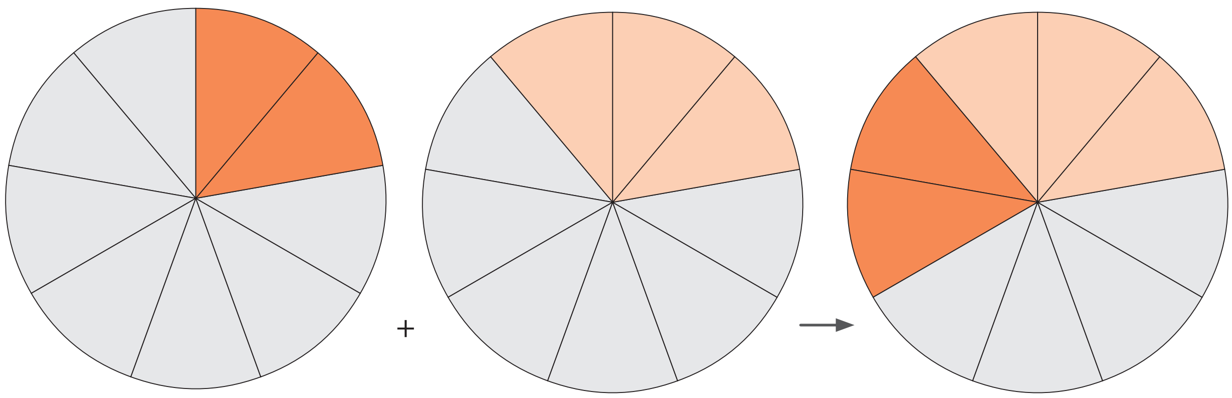
Aprendamos algo nuevo

La parte de la producción de café que se destina para exportación y a la venta en el Quindío se calcula efectuando una **adición de fracciones**. En la siguiente figura se muestra la correspondiente representación de la adición en regiones circulares:



$$\frac{4}{9} \quad + \quad \frac{2}{9} \quad = \quad \frac{6}{9}$$

Para calcular la parte de la producción de café que se vende en el país, se deben sumar las fracciones $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}$. En la figura se muestra la correspondiente representación de esa suma:



$$\frac{2}{9} \quad + \quad \frac{1}{3}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2}{9} \quad + \quad \frac{3}{9} \quad = \quad \boxed{\frac{5}{9}}$$

¿Por qué $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$?

La diferencia en la producción de café entre la fracción que se vende en otros departamentos y la fracción que se vende en el Quindío se puede calcular efectuando una **sustracción de fracciones**: $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}$.

Recuerda que para restar se requiere que el minuendo y sustraendo ($\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{9}$ respectivamente), tengan el mismo denominador. Para ello, calculamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) entre 3 y 9; el cual es 9. Lo que hace que se realice la resta entre las fracciones $\left(\frac{3}{9}-\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{9}$

La manera como se realiza las operaciones adición y sustracción en las fracciones se extiende a las operaciones con los números racionales.

Para realizar las operaciones adición o sustracción de números racionales expresados en forma $\frac{a}{b}$, se debe:

1. Transformar las fracciones a fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

2. Sumar o restar los numeradores como se realiza con los números enteros.

Estudien los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Sumar $\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{-3}{7}\right)+\left(\frac{-1}{10}\right)$

El m.c.m de 5, 7 y 10 es 70. Entonces, las fracciones equivalentes son:

$$\left(\frac{14}{70}\right)+\left(\frac{-30}{70}\right)+\left(\frac{-7}{70}\right)=$$

Se suman los numeradores como los números enteros:

$$\left(\frac{14-30-7}{70}\right)=\left(\frac{-23}{70}\right)$$

Ejemplo 2: Restar $\left(\frac{7}{12}\right)-\left(\frac{-5}{18}\right)$

El m.c.m. de 12 y 18 es 36. Entonces las fracciones equivalentes son:

$$\left(\frac{21}{36}\right)-\left(\frac{-10}{36}\right)$$

Se restan los numeradores como se hace con la sustracción de los números enteros:

$$\left(\frac{21-(-10)}{36}\right)=\left(\frac{21+(+10)}{36}\right)=\left(\frac{21+10}{36}\right)=\left(\frac{31}{36}\right)$$

Propiedades que cumple la adición de los racionales

Las propiedades que cumplen tanto los números naturales como los números enteros se extienden a los números racionales.

Propiedad clausurativa. Siempre que sumas dos números racionales se obtiene como resultado un número racional.

Simbólicamente: $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{e}{f}\right)$

- Verifica la propiedad clausurativa las siguientes adiciones:

$$-\frac{5}{9}+\frac{4}{6} \qquad \frac{3}{10}+\left(-\frac{13}{12}\right) \qquad -\frac{7}{12}+\left(-\frac{7}{4}\right)$$

Propiedad conmutativa. Al cambiar el orden de los sumandos el resultado de la adición no cambia.

Simbólicamente: $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)$

- Verifica la propiedad conmutativa en las siguientes adiciones:

$$-\frac{2}{7}+\frac{5}{14} \qquad \frac{5}{14}+-\frac{2}{7}$$

¿Obtienes el mismo resultado?

$$\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(-\frac{5}{14}\right) \qquad \left(-\frac{5}{14}\right)+\left(-\frac{2}{7}\right)$$

Propiedad asociativa. Cuando se presentan tres sumandos se puede agrupar los dos primeros o los dos últimos y el resultado no se altera.

Simbólicamente: $\left[\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\right]+\left(\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)+\left[\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{e}{f}\right)\right]$

- Verifica la propiedad asociativa en las siguientes adiciones

$$\left[\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{-4}{7}\right)\right]+\left(\frac{3}{14}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{-2}{5}\right)+\left[\left(\frac{-4}{7}\right)+\left(\frac{3}{14}\right)\right]$$

¿Obtienes el mismo resultado?

$$\left[\left(\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{-5}{12}\right)\right]+\left(\frac{4}{18}\right) \qquad \left(\frac{3}{10}\right)+\left[\left(\frac{-5}{12}\right)+\left(\frac{4}{18}\right)\right]$$

Propiedad modulativa. Cuando uno de los sumando es cero, el resultado de esa suma es el sumando que es diferente de cero.

Simbólicamente: $\left(\frac{a}{b}\right)+0=\left(\frac{a}{b}\right)$ y $0+\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)$

- Verifica la propiedad modulativa:

$$-\frac{3}{14}+0 \qquad 0+\left(-\frac{7}{10}\right)$$

Propiedad del opuesto aditivo. Al sumar un racional con su opuesto aditivo da como resultado cero.

Simbólicamente: $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$ y $\left(-\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)=0$

Verifica la aplicación de la propiedad del opuesto aditivo:

$$\frac{5}{9}+\left(-\frac{5}{9}\right) \qquad -\frac{8}{13}+\frac{8}{13}$$

Ejercitemos lo aprendido

1. Realiza las siguientes adiciones:

$$\frac{-2}{5}+\frac{1}{10}; \qquad \frac{-3}{7}+\frac{-1}{14}; \qquad \frac{12}{13}+\frac{1}{3};$$

$$\frac{-3}{4}+\frac{-1}{4}; \qquad \frac{1}{7}+\frac{2}{7}; \qquad \frac{-4}{9}+\frac{-8}{12},$$

2. Realiza las siguientes sustracciones mostrando las correspondientes adiciones para hallar su resultado:

$$\frac{-7}{18} - \frac{-6}{15} \qquad \frac{1}{6} - \frac{-3}{8} \qquad \frac{-5}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{11} - \frac{-6}{11} \qquad \frac{-1}{5} - \frac{-7}{15} \qquad \frac{3}{14} - \frac{5}{28}$$

3. Escribe y verifica con ejemplos las propiedades que cumple la sustracción de los números racionales.

4. Propón una estrategia para resolver cada una de las siguientes expresiones matemáticas:

$$-\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{2}\right) \qquad \left(\frac{2}{5}-\frac{3}{10}\right)-\frac{9}{4} \qquad -\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{6}\right)-\frac{2}{3}$$

5. Resuelve las siguientes situaciones:

- El lunes se ocuparon $\frac{7}{10}$ de la capacidad de una bodega y el martes $\frac{1}{4}$ de lo que faltaba por llenar el lunes.
  - » ¿Cuál es la fracción que representa lo que está ocupado de la bodega?
  - » ¿Cuál es la fracción que representa lo que falta por llenar de la bodega?
- Un agricultor plantó tomates en $\frac{1}{4}$ de su terreno; habichuelas en los $\frac{2}{5}$ y papas en los 280 m^2 restantes. ¿Cuál es la fracción que representa el terreno que plantó papas? ¿Cuáles son las superficies correspondientes a las fracciones del terreno para habichuelas y para tomates?
- Un camión recorre la distancia entre dos ciudades en tres horas. En la primera hora recorre $\frac{1}{8}$ del trayecto, en la segunda los $\frac{3}{16}$ y en la tercera los 80 km restantes. ¿Cuál es la distancia que separa las dos ciudades? ¿Cuáles son los kilómetros correspondientes a cada una de las fracciones dadas para los trayectos?
- He gastado las tres cuartas partes de mi dinero y me quedan \$ 90.000. ¿Cuánto tenía?

Guía 6

Operaciones multiplicativas con los números racionales

Estándares:

Pensamiento numérico

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.

Lo que sabemos

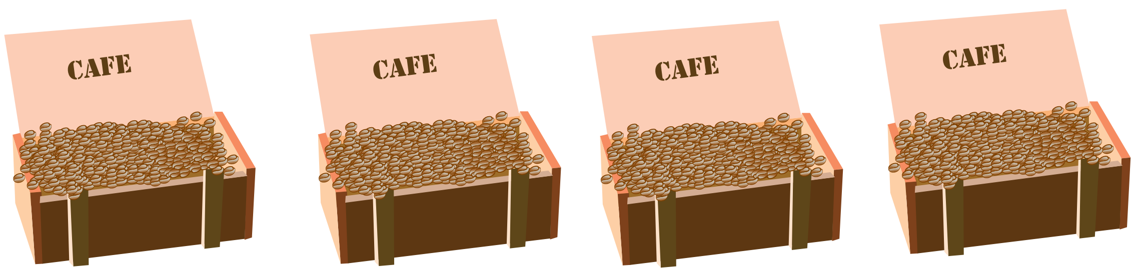
El desarrollo de las operaciones de las fracciones se usa en situaciones cotidianas que exigen operaciones como la multiplicación o la división. En esta guía se abordará la extensión de estas operaciones a los números racionales; es decir, la operación multiplicación y división con los números racionales.

Trabajo en grupo

Reúnete con un compañero y desarrollen las siguientes actividades.

Un recolector completa cuatro cajas de café. Cada caja le cabe $\frac{25}{2}$ de kilogramos de café.

- Si se recoge diariamente cuatro cajas, ¿cuántos kilogramos de café recoge en total?
- Si tiene 50 kg de café, ¿cuántas cajas necesitan para empacarlo?



Aprendamos algo nuevo

Una de las formas de resolver el anterior problema es resolver una adición de sumandos iguales o una multiplicación.

En el primer caso, se tiene:

$$\frac{25}{2}+\frac{25}{2}+\frac{25}{2}+\frac{25}{2}=\frac{25+25+25+25}{2}=\frac{100}{2}=50 \text{ kg}$$

Es decir, que en total se recogería en un día 50 kg de café.

En el segundo caso, se tiene

4 veces $\frac{25}{2}$ se expresa el número 4 como una fracción y se tiene:

$$4 \text{ x } \frac{25}{2}=\frac{4}{1} \text{ x } \frac{25}{2}=\frac{4 \text{ x } 25}{2}=\frac{100}{2}=50 \text{ kg}$$

Muchas situaciones se pueden resolver como una multiplicación de fracciones que consiste en multiplicar los valores de los numeradores como de los denominadores y se simplifica el resultado. En el caso, de extenderse esta operación a los racionales se tendría en cuenta la forma de multiplicar de los números enteros.

El **producto de dos números racionales** que están expresados de la forma $\frac{a}{b}$ es el número que se obtiene al multiplicar los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Se tiene en cuenta la regla de los signos usadas en los números enteros.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\ \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplos de multiplicación de racionales

- Factores racionales positivos

$$\frac{3}{7} \bullet \frac{2}{9} = \frac{3 \bullet 2}{7 \bullet 9} = \frac{6}{63} = \frac{2}{21}$$

- Factores racionales negativos:

$$\frac{-1}{5} \bullet \frac{-4}{7} = \frac{(-1) \bullet (-4)}{5 \bullet 7} = \frac{4}{35}$$

- Un factor negativo y otro positivo

Son iguales

Se simplifica si es posible

$$\frac{4}{9} \text{ x } \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{9} \text{ x } \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{4 \text{ x } (-3)}{9 \text{ x } 5} = \frac{-12}{45} = -\frac{4}{15}$$

Como en todas las operaciones se debe revisar las propiedades que cumple. A continuación se desarrolla las propiedades que cumple la operación multiplicación de los racionales.

Clausurativa: La operación multiplicación de los racionales cumple esta propiedad porque **siempre** que se multiplican dos números racionales el resultado es otro número racional.

Simbólicamente: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ pertenecen a los racionales entonces , $\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{a \bullet c}{b \bullet d}$ donde $\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d}$ es un número racional.

- Verifica la propiedad clausurativa:

$$\frac{3}{5} \text{ x } \left(-\frac{10}{9}\right) = \longleftarrow$$ ¿Es un número racional?

Asociativa. Esta propiedad la cumple la operación multiplicación de los números racionales **siempre,** ya que al presentarse una multiplicación de tres factores o más, se pueden agrupar de diferentes maneras y el resultado no se altera.

Simbólicamente; $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)\right]\cdot\left(\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left[\left(\frac{c}{d}\right)\cdot\left(\frac{e}{f}\right)\right]$

- Verifica la propiedad conmutativa:

$$-\frac{2}{7}\times\frac{21}{10}=\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{21}{10}\times\left(-\frac{2}{7}\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_$$

¿Son iguales o diferentes los resultados?

- Verifica la propiedad asociativa:

$$\left(-\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{2}=\boxed{} \qquad -\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)=\boxed{}$$

¿Son iguales o diferentes?

Modulativa. Esta propiedad la cumple la operación multiplicación de racionales porque existe el 1 como racional que al multiplicar cualquier número racional por él, se obtiene ese número racional.

Simbólicamente, $\left(\frac{a}{b}\right)\cdot 1 = 1\cdot\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)$

- Verifica la propiedad modulativa:

$$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 1=\_\_\_\_ \text{ y } 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\_\_\_\_$$

¿Los resultados son el mismo número racional?

$$\left(\frac{-2}{25}\right) \bullet 1 = \_\_\_ \text{ y } 1 \bullet \left(\frac{-2}{25}\right) = \_\_\_$$

¿Los resultados son el mismo número racional?

Todo número racional tiene un inverso multiplicativo o recíproco.

Simbólicamente:

$\left(\frac{a}{b}\right) \bullet \left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{b}{a}\right) \bullet \left(\frac{a}{b}\right) = 1$, Donde $\left(\frac{b}{a}\right)$ es el inverso multiplicativo de $\left(\frac{a}{b}\right)$ y $\left(\frac{a}{b}\right)$ es el inverso multiplicativo de $\left(\frac{b}{a}\right)$.

Por ejemplo:

$\frac{7}{9}$ Es el inverso multiplicativo es de $\frac{9}{7}$ y $\frac{9}{7}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{7}{9}$.

$\frac{-3}{4}$ Es el inverso multiplicativo es $\frac{-4}{3}$ y $\frac{-4}{3}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{-3}{4}$.

Como observas en todo racional el inverso multiplicativo o recíproco, el numerador de uno, es el denominador del otro. Lo mismo sucede con el denominador de uno es el numerador del otro.

Invertiva. Esta propiedad la cumple la multiplicación de los números racionales ya que al tener factores que son inversos multiplicativos uno con respecto al otro. Su resultado **siempre** es uno.

Simbólicamente;

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{b}{a} = 1 \quad \text{como} \quad \frac{b}{a} \bullet \frac{a}{b} = 1$$

- Verifica la propiedad invertiva:

$$\frac{-3}{7} \bullet \frac{-7}{3} = \_\_\_$$

$$\frac{2}{9} \bullet \frac{9}{2} = \_\_\_$$

Anulativa: Esta propiedad la cumple la operación multiplicación ya que al ser uno de los factores el número cero el resultado de esa multiplicación es cero.

Simbólicamente, $\left(\frac{a}{b}\right) \bullet\ 0 = 0$ como $0 \bullet \left(\frac{a}{b}\right) = 0$

- Verifica la propiedad anulativa:

$$\left(\frac{-5}{7}\right) \bullet 0 = \_\_\_\_$$

$$\left(\frac{6}{7}\right) \bullet 0 = \_\_\_\_$$

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición Esta propiedad la cumplen los números racionales y consiste: el producto de un número racional por una suma, es igual a la suma de los productos de este número racional por cada uno de los sumandos.

Simbólicamente, $\frac{a}{b} \bullet \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \bullet \frac{e}{f}$

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción

Esta propiedad la cumplen los números racionales y consiste en: el producto de un número racional por una resta, es igual a la resta de los productos de este número racional por el minuendo y por el sustraendo.

Simbólicamente, $\frac{a}{b} \bullet \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \bullet \frac{e}{f}$

Observa los ejemplos:

Para la suma

$\frac{-4}{7} \bullet \left(\frac{2}{3} + \frac{-1}{4}\right) = \frac{-4}{7} \bullet \frac{2}{3} + \frac{-4}{7} \bullet \frac{-1}{4} = \frac{-8}{21} + \frac{-4}{28}$, simplificando

$\frac{-8}{21} + \frac{-4}{28} = \frac{-8}{21} + \frac{-1}{7}$, hallando común denominador

$\frac{-8 \bullet 1 + 1 \bullet (-3)}{21} = \frac{-8+(-3)}{21} = \frac{-11}{21}$,

Para la resta:

$\frac{-5}{8} \bullet \left(\frac{-2}{7} - \frac{-3}{5}\right) = \frac{-5}{8} \bullet \frac{-2}{7} - \frac{-5}{8} \bullet \frac{-3}{5} = \frac{10}{56} - \frac{15}{40}$, simplificando

$\frac{10}{56} - \frac{15}{40} = \frac{5}{28} - \frac{3}{8}$, hallando común denominador

$\frac{5}{28} - \frac{3}{8} = \frac{5 \bullet 2 - 3 \bullet 7}{56} = \frac{10 - 21}{56} = \frac{-11}{56}$.

- Aplica la propiedad distributiva de los números racionales:

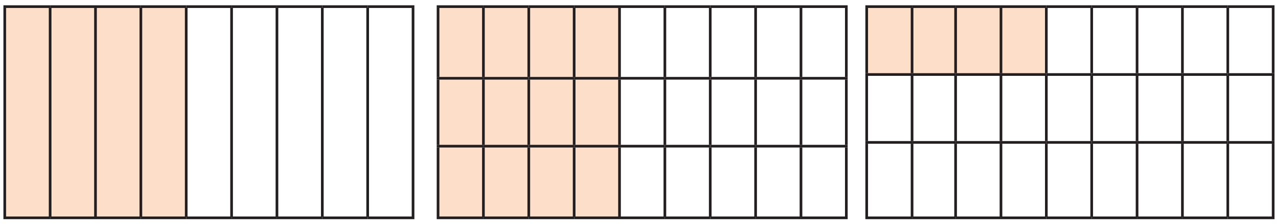
$\frac{-2}{3} \bullet \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right] =$ _____

$\frac{5}{8} \bullet \left[\frac{-3}{4} - \frac{5}{6}\right] =$ _____

Estudia cómo se resuelve la siguiente situación:

- En el terreno de cultivo de la finca cafetera los $\frac{4}{9}$ están sembrados con semilla de café de Colombia. Si estas partes se dividen en tres secciones iguales, ¿qué fracción del terreno le corresponde cada sección?

  Si resolvemos la situación con representaciones del terreno (ver figura) tenemos:



a. Se sombrean $\frac{4}{9}$ del rectángulo que representa el terreno.

b. Se divide la región sombreada en tres partes iguales y se toma una.

c. Lo sombreado nuevamente corresponde a $\frac{4}{27}$ del total del terreno.

Si se resuelve como la operación división de las fracciones, tenemos:

$$\frac{4}{9} \div 3 = \frac{4}{9} \div \frac{3}{1} = \frac{4}{9} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{Inverso multiplicativo de 3}} = \frac{4 \times 1}{9 \times 3} = \frac{4}{27}$$

Estas situaciones las podemos resolver como división entre fracciones. Ahora se extenderá dicha operación a los números racionales.

La división entre los racionales o el cociente de dos números racionales se define como el producto del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. Recuerde que se aplica la ley de los signos de los enteros en la división.

$$\underbrace{\boxed{\frac{a}{b}}}_{\text{Dividendo}} \div \underbrace{\boxed{\frac{c}{d}}}_{\text{Divisor}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Por ejemplo la división de $-\frac{8}{12} \div \frac{3}{4}$,

Se realiza así:

Inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$

$$-\frac{8}{12} \div \frac{3}{4} = -\frac{8}{12} \times \frac{4}{3} = \frac{-8}{12} \times \frac{4}{3} = \frac{-8 \times 4}{12 \times 3} = \frac{-32}{36} = -\frac{8}{9}$$

Ejercitemos lo aprendido

1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

$$\frac{-5}{2} \cdot \frac{5}{8} \qquad \frac{-2}{3} \cdot \frac{-7}{11} \qquad \frac{12}{13} \cdot \frac{7}{3}$$

$$\frac{-3}{6} \cdot \frac{-3}{7} \qquad \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} \qquad \frac{-9}{3} \cdot \frac{-6}{15}$$

2. Realiza las siguientes divisiones mostrando las correspondientes multiplicaciones para hallar su resultado:

$$\frac{-7}{3} \div \frac{-4}{5} \qquad \frac{2}{9} \div \frac{-3}{9} \qquad \frac{-5}{12} \div \frac{6}{8}$$

$$\frac{-7}{12} \div \frac{6}{12} \qquad \frac{-1}{5} \div \frac{5}{3} \qquad -6 \div \frac{-1}{6}$$

3. Escribe y verifica con ejemplos las propiedades que cumple la división de los números racionales.

4. Propón una estrategia para resolver cada una de las siguientes operaciones:

$$-\frac{3}{4} \div \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{2}\right) \qquad \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right) \times \frac{9}{4} \qquad -\left(\frac{5}{8} + \frac{2}{6}\right) \div \frac{2}{3}$$

5. A cuál de las propiedades corresponde cada uno de los siguientes enunciados generales:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \times \frac{e}{f}\right)$$

6. Expresa cada enunciado como una expresión matemática y halla el resultado:

   » Los cuatro quintos de siete octavos.

   » Los tres décimos de menos quince veinteavos.

   » Los nueve quinceavos de treinta dieciochoavos.

   » Los cinco séptimos de menos nueve catorceavos.

7. Completa los siguientes enunciados para que sean verdaderos.

   » El signo del producto de dos números racionales de igual signo es…

   » El signo del producto de dos números racionales de diferente signo es…

   » El signo del cociente de dos números racionales de igual signo es…

» El signo del cociente de dos números racionales de diferente signo es…

8. Responde las siguientes preguntas. Propón ejemplos que las argumenten.

» ¿Qué signo tiene el inverso multiplicativo de un número racional positivo?

» ¿Qué signo tiene el inverso multiplicativo de un número racional negativo?

9. Resuelve las siguientes situaciones.

- En una parcela de $\frac{456}{7}$ m^2, se destina la cuarta parte para el cultivo de cereales y el resto para el cultivo de hortalizas. ¿Cuál es el área total del terreno destinada para el cultivo de cereales? ¿Y cuál al cultivo de hortalizas?

- El paso de cierta persona equivale a $\frac{7}{8}$ de 1 metro. ¿Qué distancia recorre con 1.000 pasos? ¿Cuántos pasos debe dar para recorrer una distancia de 1.400 m?

Guía 7

Las expresiones decimales de los números racionales

Estándares:

Pensamiento numérico

- Utilizo números Racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medidas.

Pensamiento espacial

- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.

Lo que sabemos

Los números racionales pueden expresarse en forma decimal o en forma fraccionaria en ocasiones necesitaremos pasar de una forma a otra, generalmente porque así lo requerimos para poder comunicarnos, o para aplicar a un mismo caso información que está escrita en diferentes formas. En esta guía trabajarás las expresiones decimales que corresponden a los números racionales expresados en forma fraccionaria.

Trabajo en grupo

Reúnanse en grupos de tres integrantes y resuelvan las siguientes actividades.

- A nivel mundial, Colombia es el tercer país productor de café y el mayor productor de café suave en el mundo. En la siguiente tabla, se muestra el precio (en dólares) de la libra de café colombiano durante la semana del 5 al 9 de abril de 2010.

Precio del café colombiano en dólares

Fecha	Precio de una libra (en dólares)
5 de abril de 2010	2,02
6 de abril de 2010	2,05
7 de abril de 2010	2,03
8 de abril de 2010	2,03
9 de abril de 2010	2,01

- ¿Cómo se expresa el valor del precio del café en dólares?
- ¿En qué día de esa semana se presentó el mayor precio del café? ¿Y el menor?
- Si se sabe que un dólar es equivalente a 100 centavos de dólar, ¿qué se debe entender de la expresión 2,02?

Aprendamos algo nuevo

Más de los $\frac{75}{100}$ de la producción de café en Colombia son destinados a las exportaciones. ¿Cuál es la expresión decimal de la fracción $\frac{75}{100}$?

Por lo tanto, la expresión decimal de $\frac{75}{100}$ se encuentra como sigue:

$$75 \div 100 = 0{,}75$$

¿Qué relación observan entre el número de ceros del denominador de la fracción y el número de cifras de su correspondiente expresión decimal?

Expliquen.

La **expresión decimal** de un número racional se obtiene al dividir el numerador entre el denominador. Una expresión decimal consta de:

Parte entera	Parte decimal
25,	784

La parte entera va antes de la coma y la parte decimal va después de la coma.

Trabajo en grupo

- Encuentren la expresión decimal de los siguientes números racionales. Luego contesten las preguntas.

$$\frac{3}{4}, \frac{8}{3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16} \text{ y } \frac{13}{90}$$

- ¿Cuántas cifras decimales tienen los números $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{16}$?
- ¿Cuántas cifras decimales encontraron en la expresión decimal de $\frac{8}{3}$? ¿Podrían encontrar más?
- En la expresión decimal de $\frac{13}{90}$, ¿encontraron cifras decimales repetidas? ¿Cuántas? ¿Podrían encontrar más?

Las expresiones decimales se clasifican en:

- **Exactas.** El número de cifras decimales es finito, es decir, hay un número definido de las cifras.

  Ejemplo: la expresión decimal 4,35 o -0,01

- **Periódicas puras.** Hay un grupo de cifras decimales se repiten indefinidamente, ese grupo de cifras se conoce como periodo.

  Ejemplos:

  $65,232323\ldots\ldots = 65,\overline{23}$

  $5,15151515\ldots\ldots = 5,\overline{15}$

- **Periódicas mixtas.** Se identifica un periodo antecedido por cifras decimales que no se repiten Ejemplo: $8,53222\ldots = 8,53\overline{2}$

  Todas estas expresiones corresponden a racionales positivos aunque sucede lo mismo con expresiones decimales negativas que corresponde a racionales negativos.

En el caso, que se tengan expresiones decimales que no sean ni exactas, periódicas puras o periódicas mixtas no se consideran que corresponda a números racionales.

- Resuelvan la situación.

Javier dice que los racionales que generan las expresiones decimales 5,6 y $5,\overset{\frown}{6}$ son respectivamente $\frac{28}{5}$ y $\frac{46}{90}$. ¿Javier tiene razón? Expliquen su respuesta.

El racional generatriz de una expresión decimal exacta

Es un racional decimal (aquel cuyo denominador es una potencia de 10), tal que:

- El numerador es la parte entera seguida de la parte decimal sin la coma.
- El denominador es el número formado por una potencia de 10 que tiene tantos ceros como cifras decimales tiene la parte decimal.

Ejemplos: $5{,}32 = \frac{532}{100}$; $\quad -0{,}345 = -\frac{345}{1000}$;

El racional generatriz de una expresión decimal periódica pura es la suma de la parte entera con el racional cuyo numerador es el periodo y cuyo denominador es el número formado por tantos nueves como cifras decimales tenga el periodo.

Ejemplos: $4{,}\overline{25} = 4 + \frac{25}{99}$; $\quad -5{,}\overline{178} = -\left(5 + \frac{178}{999}\right)$

El racional generatriz de una expresión decimal periódica mixto es la suma de la parte entera con el racional que:

- El numerador es la diferencia entre dos números. El minuendo es el número formado por las cifras no periódicas y las periódicas de la parte decimal de la expresión; y el sustraendo es el número que forma parte de las cifras no periódicas de la parte decimal de la expresión.
- El denominador es el número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo seguido de tantos ceros como cifras tenga las cifras no periódicas de la parte decimal.

Ejemplos:

$$5{,}2\overline{7} = 5 + \frac{27 - 2}{90} = \frac{475}{90}$$

$$-1{,}418686\ldots\ldots = -1.41\overline{86} = -\left(1 + \frac{4186 - 41}{9900}\right)$$

$$-1{,}418686\ldots\ldots = -\left(\frac{9900}{9900} + \frac{4145}{9900}\right) = -\frac{14045}{9900}$$

Existe otro método para hallar el racional que le corresponde a dicha expresión decimal, para ello utilizamos las ecuaciones así:

Ejemplo 1:

Si se tiene 3,1212121212,…. Es una expresión periódica pura.

Decimos que es igual a x = 3,121212…

Debemos multiplicar por una potencia de 10 que tenga tantos ceros como cifras existen en la parte periódica. En este caso son dos cifras entonces multiplicamos por 100. Se obtiene entonces que:

$$100\,x = 312{,}1212\ldots$$

Ahora realizamos la siguiente resta: 100 x –x, obteniéndose:

$$\begin{aligned} 100\,x &= 312{,}1212 \\ -x &= 3{,}121212 \\ 99\,x &= 309 \end{aligned}$$

Despejamos x, se tiene que:

X = 309/99, lo mismo que $\frac{103}{33}$

Ejemplo 2:

Si se tiene el racional 4,5671717171717….. que es una expresión decimal mixta, decimos que es igual a $x = -\ 4{,}56\overline{71}$.

Multiplicamos por 10.000 ya que esa es la cantidad de cifras que forman parte de las cifras no periódicas y las dos periódicas estas son: 5671por eso se colocan cuatro ceros al uno.

Nos queda:

$$10.000\ x = 45671{,}717171\ldots.$$

Pero necesitamos que nos quede las cifra periódica definida, entonces tenemos que multiplicar por 100 x, obteniéndose

$$100\ x = -\ 456{,}717171\ldots$$

Ahora realizamos la siguiente resta: 10.000 x – 100x, obteniéndose:

$$\begin{aligned} 10.000x &= 45671{,}71717171\ldots \\ -\ 100x &= -\ 456{,}717171\ldots \\ 9.900\ x &= 45215 \end{aligned}$$

Despejamos x, se tiene que:

$$x = \frac{45215}{9900}$$

- Comprueben con una calculadora que dichas fracciones corresponden a las expresiones decimales dadas.

- Las expresiones decimales que corresponden a números racionales se ordenan de la siguiente forma:

- Si son dos expresiones decimales negativas, el número racional mayor es el correspondiente a la expresión decimal más cercana al cero.

  Ejemplo: -1,21 > -3,1548

- Si son dos expresiones decimales positivas, el número racional mayor es el correspondiente a la expresión más lejana del cero: En el caso, que tengan la misma parte entera, se compara cada una de las cifras de la parte decimal, una a una, hasta que se pueda determinar cuál es la mayor de estas.

  Ejemplo: $2{,}2145 < 2{,}2193$

- Si es una expresión decimal negativa y la otra positiva, el número racional mayor es el correspondiente a la expresión decimal positiva.

  Ejemplo: $-1{,}11212121\ldots < 0{,}12121212121\ldots$

Ejercitemos lo aprendido

1. Contesta las preguntas.

   - ¿Cuál es la expresión decimal que le corresponde al número racional $\frac{3}{8}$? ¿Es exacta, periódica pura o periódica mixta?
   - ¿Cuál es el racional generatriz de $25{,}\overline{43}$? ¿Qué clase de expresión decimal esta?

2. Resuelve las situaciones.

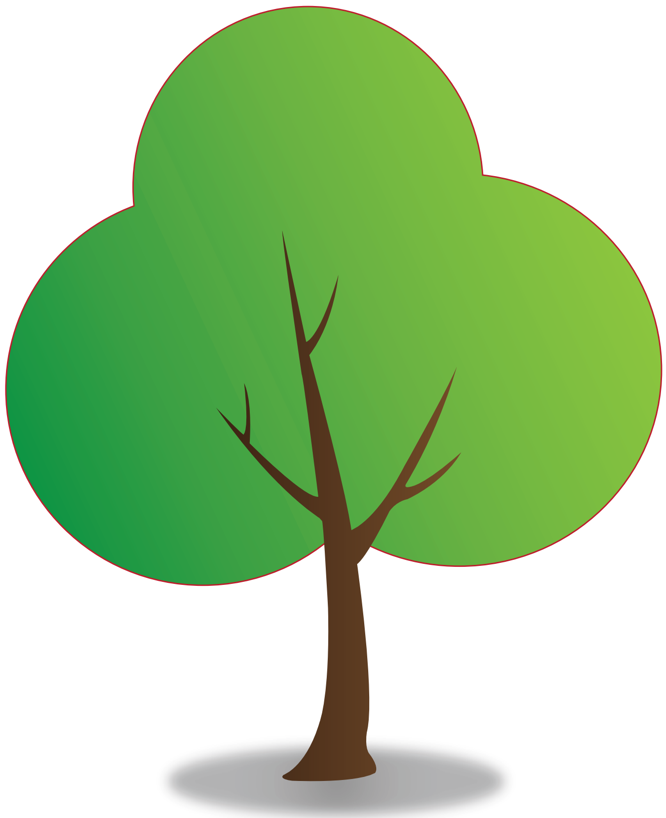
   - En la siguiente tabla, se muestran algunas variedades de café y su contenido de cafeína por taza. ¿Cuál es el orden de estas variedades de menor a mayor contenido de cafeína?

Contenidos de cafeína de algunas variedades de café

Variedad	Arábiga fuerte	Arábiga suave	Robusta suave	Robusta fuerte	Café soluble	Café descafeinado
Contenido de cafeína (g)	0,075	0,025	0,15	0,225	0,1	0,0125

- Liliana debe recorrer 1,075 km de su casa a la escuela. ¿Cuál es la aproximación de esa distancia a la cifra de las décimas? ¿Y a la cifra de las unidades? Escribe la misma distancia en término de los hectómetros.

- Antonio, Marcos y Ricardo hacen una estimación de la altura de un árbol. Si respectivamente dicen 9,69 m 9,58 m y 9,73 m, ordena de mayor a menor las estimaciones dadas.



Guía 8

Operaciones con los números racionales como expresiones decimales

Estándares:

Pensamiento numérico

- Utilizo números Racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medidas.
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.

Lo que sabemos

Es innegable la utilidad de los números decimales para el desenvolvimiento social de las personas. Es el caso de la interpretación de los indicadores económicos, tales como el comportamiento del precio del dólar, las equivalencias entre monedas de diferentes países, el precio del café en el mercado internacional, o el índice de precios al consumidor. Situaciones tan comunes como el manejo de una calculadora, exigen cierta destreza en el uso de números decimales. En esta guía se abordarán las cuatro operaciones básicas que se desarrollan con expresiones decimales que corresponden a números racionales.

Trabajo en grupo

Organicen grupos de tres estudiantes y resuelvan las actividades propuestas.

1. Lean la información y contesten.

En la tabla siguiente tabla, se registró la producción de una pequeña finca cafetera durante seis meses.

Producción de café en una finca durante 6 meses

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Producción (kg)	98,73	79,56	85,475	86,45	102,05	97,65

- ¿Cuántos kilogramos de café se produjeron de enero a marzo?
- ¿De cuántos kilogramos fue la producción de abril a junio?
- ¿Cuál fue la producción total durante los seis meses?
- Si se espera una producción de 300 kg para los seis meses, ¿cuánto sobra o falta para obtener la producción esperada?
- Si se sabe que el precio esperado era 100 kg para enero, ¿cuánto le faltó para completar lo esperado?
- Si para cumplir la meta esperada en mayo faltaron 48, 3 kg, ¿cuánto era la meta esperada para mayo?

Aprendamos algo nuevo

Existen situaciones que requieren expresiones decimales de signo negativo o positivo, que exige, se tengan en cuenta las reglas de las operaciones relacionadas con los números enteros.

- Realicen las adiciones con expresiones decimales:

98,730 79,560 + 85,475 263,765 ↑ Kilogramos producidos de enero a marzo	86,45 102,05 + 97,65 286,15 ↑ Kilogramos producidos de abril a junio	263,765 + 286,150 549,915 ↑ Kilogramos producidos en seis meses

Para realizar **adiciones de racionales** en la forma decimal se realiza como en los números enteros; y si se ordenan en forma vertical de tal forma que la coma quede siempre alineada entre una expresión a otra.

Estudien los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

$$(-4{,}51) + (+3{,}2172) = -4{,}51+3{,}2172$$

Al colocarlos en forma vertical se tiene:

$$\begin{array}{r} -4{,}51 \\ +\ 3{,}2172 \\ \hline -1{,}2928 \end{array}$$

Ejemplo 2 :

$(-1{,}0001)+ (-7{,}804) = -1{,}0001 – 7{,}804$

Al colocarlos en forma vertical se tiene:

$$\begin{array}{r} -1{,}0001 \\ -7{,}804 \\ \hline -8{,}8041 \end{array}$$

Ejemplo 3:

$(-1{,}03)+ (+7{,}8) = -1{,}03 + 7{,}8$

Al colocarlos en forma vertical se tiene:

$$\begin{array}{r} -\ 1{,}03 \\ +\ 7{,}8 \\ \hline +\ 6{,}77 \end{array}$$

En el caso de **la sustracción** de las expresiones decimales que corresponden a números racionales, se tiene que:

Al minuendo se le suma el opuesto del sustraendo. Así como se hace con los números enteros y; si se ordenan en forma vertical de tal forma que la coma quede siempre alineada entre una expresión a otra.

Ejemplo:

(-5,01) - (-12,45) = (-5,01) + (+12,45)

Al colocarlo de forma vertical se tiene:

$$\begin{array}{r} -5{,}01 \\ +12{,}45 \\ \hline +7{,}44 \end{array}$$

En el caso de la **operación multiplicación** de los números racionales como expresiones decimales, se realiza:

Se multiplica como en los números enteros y se aplica la regla de los signos con sus factores. Al resultado o producto se colocan tantas cifras como hay en cada uno de los factores.

Ejemplo:

1,75 x 2 se realiza:

$$\begin{array}{rll} 1{,}75 & \longleftarrow & \text{2 cifras decimales} \\ \times \quad 2 & \longleftarrow & \text{0 cifras decimales} \\ \cline{1-1} 3{,}50 & \longleftarrow & 2 + 0 = \text{2 cifras decimales} \end{array}$$

En el caso de la **operación división** entre expresiones decimales que corresponden a números racionales, lo más importante es colocar tanto el dividendo como el divisor con la misma cantidad de cifras en la parte decimal de cada una de las expresiones. Se aplica la regla de los signos de los números enteros.

Realicen una división de expresiones decimales siguiendo estos pasos.

- Multipliquen el dividendo y el divisor por 10, 100, 1.000,… para obtener números enteros o la misma cantidad de cifras decimales.

- Efectúen la división.

- La división se termina cuando se obtiene un residuo igual a cero o cuando el cociente tiene las cifras decimales que se quieren.

$$\begin{array}{r|l} 1.852{,}2 & 24{,}5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18522 & 245 \\ \cline{2-2} 1372 & 75{,}6 \\ 1470 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \times 10 & \times 10 \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 18522 & 245 \\ \hline \end{array}$$

Apliquemos lo aprendido

1. Resuelve las siguientes situaciones.

   - Antioquia, Huila y Tolima son los departamentos colombianos con mayor cantidad de superficie cultivada de café.

   En miles de hectáreas, los datos son los siguientes:
   Antioquia: 130,6
   Huila: 105
   Tolima: 103,9

     » ¿Cuál es la diferencia, en miles de hectáreas, entre las superficies cultivadas de café en Antioquia y Tolima?

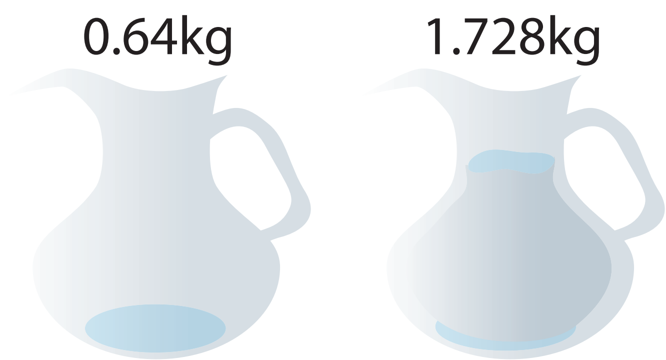
     » Si el total de cultivos de café en Colombia ocupa 887,6 miles de hectáreas, ¿cuál es el área cultivada en otros departamentos?

   - La variedad arábica de café se considera el más selecto por sus cualidades aromáticas y su suave sabor. Este tiene un contenido de cafeína máximo de 1,75%; mientras que la variedad Robusta, considerado menos sabroso y aromático que el Arábica, contiene el doble de cafeína. ¿Cuál es el porcentaje de cafeína que contiene la variedad Robusta?

- En una competencia ciclística de cuatro etapas, un ciclista recorrió 145,8 km en la primera etapa, 136,65 km en la segunda y 162,62 km en la tercera. ¿Cuántos kilómetros le quedan por recorrer si la carrera es de 1 000 km?

- ¿Cuál es el peso del agua contenido en las jarras llenas, de la figura?

Jarra vacía y jarra llena



- De un tanque lleno de agua se sacan 184,5 l el lunes; 128,75 l el martes, y 84,5 l el miércoles. Si aún quedan 160 l, ¿cuál es la capacidad total del tanque?

- En una prueba de atletismo los cuatro atletas de un equipo obtuvieron los siguientes tiempos: 9,945; 10,983; 10,028 y 9,924. ¿Cuál es el tiempo total del equipo?

- Una pera pesa 0,120 kg. ¿Cuánto pesan nueve peras de igual tamaño?

- La Tierra gira alrededor del Sol a 29,8 kilómetros por segundo. Marte lo hace a 0,81 veces la velocidad de la Tierra. ¿A qué velocidad gira Marte alrededor del Sol?

- Un mural cuadrado tiene 0,5625 m^2 de superficie. ¿Cuántas piezas cuadradas de papel cubren el mural, si el lado de cada pieza es de 1,5 m?

2. Calcula los siguientes productos y responde las preguntas.

3,208 x (–4,5)   –15,47 x (–5,731)

- ¿Qué signo tiene el producto de dos expresiones decimales de igual signo?

- ¿Qué signo tiene el producto de dos expresiones decimales de diferente signo?

3. Calcula los resultados de las siguientes expresiones:

(-1,1)+(-5,47)+(8,701)	(-4,1) - (-3,01)
(-4,1)(-0,01)	(3,48)÷(-1,1)
(-1,4008)+(-47,84)	(+1,7) - (+1,001)
(3,1) • (-1,11)	(4)÷ (-2,01)
(+78,945)+(15,01)	(+2,14) - (+3)
(2,15) x (3,004)	(-1,0456)÷ (0,2)
(10/15) + (-1,2121)	(-4/7) + (1,5)
(-2/7) x (3,41)	(-2/5) ÷ 2,101

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

1. Resuelve las siguientes situaciones:

Dos automóviles A y B hacen un mismo trayecto de 892 km. El automóvil A lleva recorridos los 4/12 del trayecto cuando el B ha recorrido los 3/14 del mismo. ¿Cuál de los dos va primero? ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos cada uno?

2. Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es 13/8.

¿Cómo me ven los demás?

Organiza un grupo de tres compañeros.

- Cada integrante del grupo debe escribir los temas que se desarrollaron en el módulo.
- Luego escogerá el aspecto que más comprendió en lo tratado en el módulo y justificar su respuesta.
- Investiga cuáles son algunas de las aplicaciones de ese aspecto a nivel de matemáticas, otras ciencias y la vida cotidiana.

- Compartan las respuestas con sus compañeros de grupo y elaboren un mapa conceptual que relacione cada uno de los aspectos seleccionados y como se conectan por sus aplicaciones.

- El grupo elabora una cartelera y presenta una exposición de 10 minutos al curso para enriquecer lo estudiado en el módulo.

¿Qué aprendí?

Responde según la manera en la que te desenvolviste en el desarrollo del módulo. Justifica tu respuesta.

	Sí	No	A veces	Justifico
Utilizo diferentes representaciones de números racionales en diversos contextos.				
Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los conjuntos de los números racionales.				
Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas.				
Participo activamente en clase y expreso mis opiniones de manera respetuosa.				
Aporto en las actividades que son trabajo en grupo.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Respeto las opiniones de mis compañeros de curso.				
Me preocupo por preparar sus trabajos y exposiciones.				
Me intereso por aprender de manera significativa.				

Determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento con tu maestro.

Módulo 3

Algo sobre la variación entre magnitudes

¿Qué vas a aprender?

En muchas ocasiones has realizado comparaciones entre las magnitudes que manejas. Por ejemplo, la cantidad de galletas que vienen por paquete, la cantidad de camisas de la misma clase que se puede comprar con cierta cantidad de dinero, la cantidad de lanchas que se requieren para pasar un río, la cantidad de obreros que se necesitan para una obra, la cantidad de medicamento que se tiene que ingerir para mejorarse, la frecuencia del mismo, la cantidad de fertilizantes y químicos en una cosecha, la cantidad de materiales para la construcciones de edificaciones, la medición de terrenos, entre muchas otras situaciones.

En este módulo reconocerás muchos conceptos relacionados con la variación entre magnitudes, determinarás de qué manera se relacionan, aprenderás cómo establecer proporciones de manera adecuada y cómo obtener el valor de un dato desconocido en alguna de las magnitudes que se comparan.

Los temas de este módulo aportan al desarrollo de los estándares básicos de competencia relacionados especialmente con el pensamiento numérico, mediante el manejo de cantidades que pertenecen a distintos pensamientos como el variacional y sistemas numéricos mediante el estudio de magnitudes que manifiestan relación de dependencia.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento numérico

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.

- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.

Pensamiento variacional

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).

- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

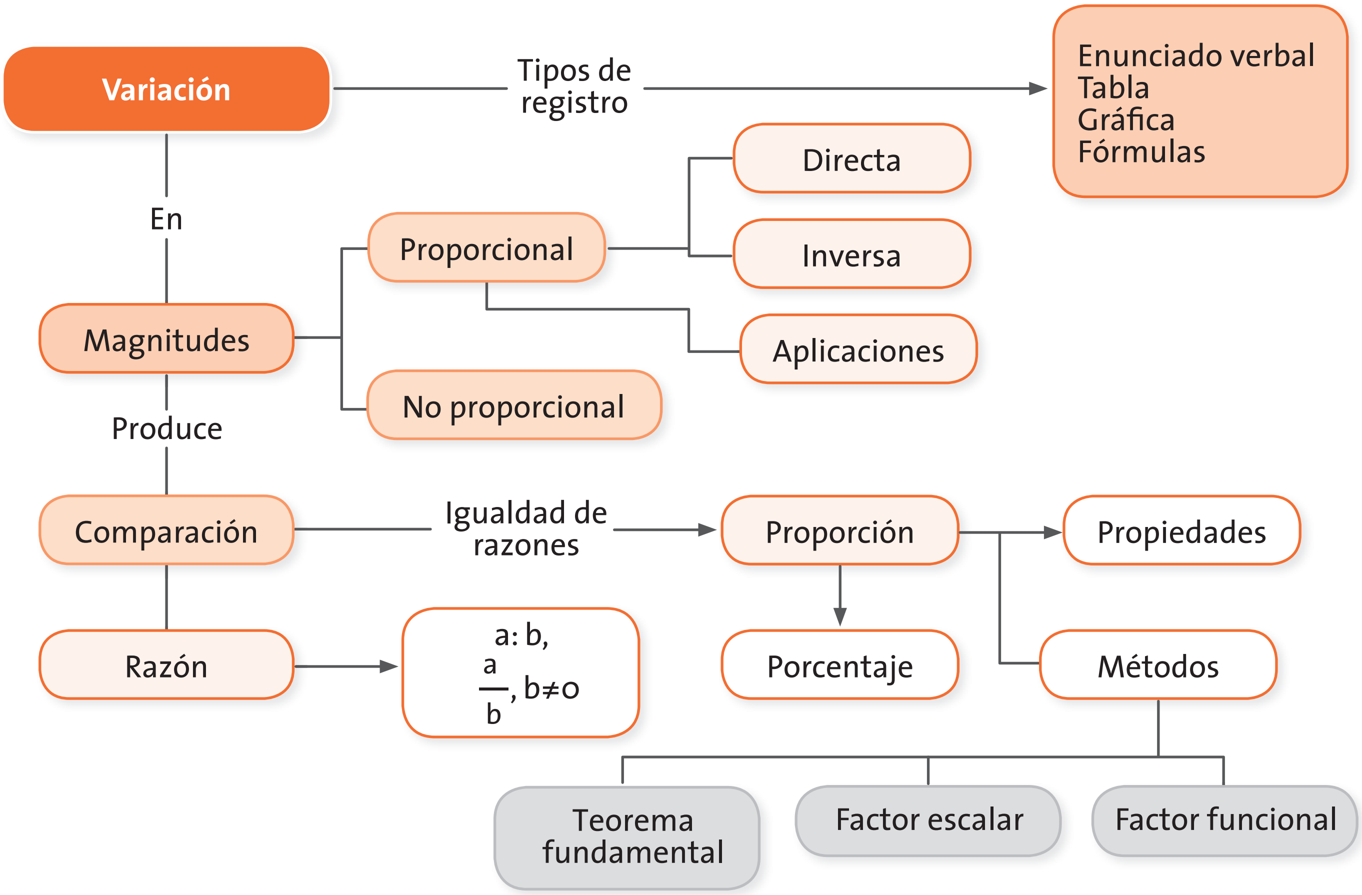
Pensamiento espacial:

- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.

La realización de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo te permitirá alcanzar los estándares básicos de competencias mencionados anteriormente, a través de situaciones prácticas que trabajarás individualmente y en grupo. Estas actividades privilegian el desarrollo de procesos asociados a la actividad matemática como: la comunicación, la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, el razonamiento, la modelación y la resolución de problemas.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 9.
Estableciendo comparaciones</td><td>Definición de unidad
Enunciados de una comparación</td><td rowspan="6">• La comunicación, al expresar ideas matemáticas relacionadas con la comparación de magnitudes.
• La modelación, al reconocer patrones y regularidades que se establecen entre las magnitudes que se relacionan.
• El razonamiento, al argumentar con validez los procesos que se aplican en la resolución de problemas.
• La resolución de problemas, al solucionar diferentes situaciones de la vida cotidiana relacionada con las relaciones de comparación.
• La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, al desarrollar en el estudiante la ejecución de procedimientos rutinarios, que permitan un desarrollo significativo y comprensivo de los conceptos matemáticos como unidad, magnitud, razones y proporciones.</td></tr>
<tr><td>Guía 10.
Escribiendo las comparaciones</td><td>Razones
Razones equivalentes</td></tr>
<tr><td>Guía 11.
Sobre proporciones</td><td>Proporción
Propiedades
Métodos: teorema fundamental
Factor escalar
Factor funcional</td></tr>
<tr><td>Guía 12.
Tanto por ciento de una cantidad</td><td>Porcentaje
Relación con razón
Fracción decimal y numero decimal</td></tr>
<tr><td>Guía 13.
Algo sobre variación proporcional directa</td><td>Correlación directa
Registros: tabla, gráfica y fórmula
Constante de proporcionalidad
Magnitudes dependientes continuas</td></tr>
<tr><td>Guía 14.
Algo sobre variación proporcional inversa</td><td>Correlación inversa
Registros: tabla, gráfica y fórmula
Constante proporcional inversa
Magnitudes dependientes continuas</td></tr>
</table>

El siguiente esquema te muestra la manera en que se pueden relacionar los conceptos.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Por medio de las proporciones es posible establecer las relaciones entre dos magnitudes que pueden ser inversas o directas, siendo así, estas son utilizadas a menudo en nuestra vida. De esta forma cuando necesitamos saber cuánto vale un paquete de frunas, conociendo el valor de la unidad y la cantidad de unidades que trae el paquete, o cuando queremos saber cuál es la edad de una persona que es tres veces mayor que otra, por medio de la aplicación de las propiedades que poseen las proporciones nos es fácil saber la respuesta.

En cartografía, para la elaboración de mapas se requiere del uso de escalas numéricas, las cuales se determinan estableciendo razones entre la distancia real entre un punto y otro, de un sitio geográfico, y la unidad que se tomará para representar esa distancia en el papel.

De otra parte, las proporciones son herramientas necesarias en muchas de las actividades la vida diaria; por ejemplo, para saber la cantidad de semillas que se siembran por metro cuadrado en un terreno, para la preparación de recetas, para saber la cantidad de medicina que necesita una persona según el peso y la edad o para la elaboración de mezclas y de reacciones químicas, entre otras.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En el desarrollo del módulo se proponen diferentes momentos en los que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evidenciar y analizar los progresos en cuanto al aprendizaje de la variación entre magnitudes con relación a lo proporcional.

Todas las actividades, ejercicios y problemas planteados en este módulo, pretenden desarrollar en el estudiante los procesos de comunicación, modelación, razonamiento, resolución de problemas y formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, permitiendo que el maestro y el alumno puedan evaluar el grado de aprendizaje logrado con el desarrollo de todas las actividades planteadas; esto con el fin de lograr el entendimiento y la comprensión de conceptos como: razones, proporciones, magnitudes y fracciones equivalentes; así como establecer relaciones entre las mismas.

Explora tus conocimientos

Venta de víveres

Joaquín tiene una tienda de víveres en su pueblo. La semana pasada relacionó en una tabla el peso en kilogramos del arroz y el precio correspondiente.

Precio de arroz por kilogramo

Arroz	
Peso (Kg)	Precio ($)
1	1.250
2	2.500
3	3.750
4	5.000
5	6.250

Analiza los datos de la tabla.

- ¿Cuál es el precio de un kilogramo de arroz?
- ¿Cuál es el precio de cinco kilogramos?
- ¿Se puede afirmar que si se compran tres libras de arroz, se paga tres veces lo que cuesta una libra? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el precio de 10 kilogramos de arroz? Con los datos que te muestra la tabla, ¿puedes inferir el valor? Justifica tu procedimiento.
- ¿Cuál es el precio de una libra de arroz, si se sabe que 2 libras forman un kilogramo?
- ¿Cuál es el precio de cinco libras de arroz?
- ¿Cuál es el precio de 100 kilogramos de arroz?
- ¿Será posible encontrar una forma rápida para calcular el precio de arroz a partir de la cantidad de kilogramos que se compran? Justifica tu respuesta.
- Uno de los compañeros anuncia que la respuesta a la anterior pregunta es fácil. Calcular el precio del total del arroz con respecto a la cantidad de kilogramos que se venden consiste en multiplicar la cantidad de kilogramos de arroz vendidos por el valor del precio de un kilogramo. Este resultado da el precio total de los kilogramos vendidos. ¿Qué opinas?
- Comprueba la forma de calcular del compañero y calcula el precio de 10 kilogramos de arroz.
- Realiza el cálculo de otros precios de arroz con respecto al número de kilogramos de venta de los datos de la tabla. ¿Dieron los mismos valores?

Guía 9

Estableciendo comparaciones

Estándares

Pensamiento numérico

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.

Pensamiento variacional

- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

Lo que sabemos

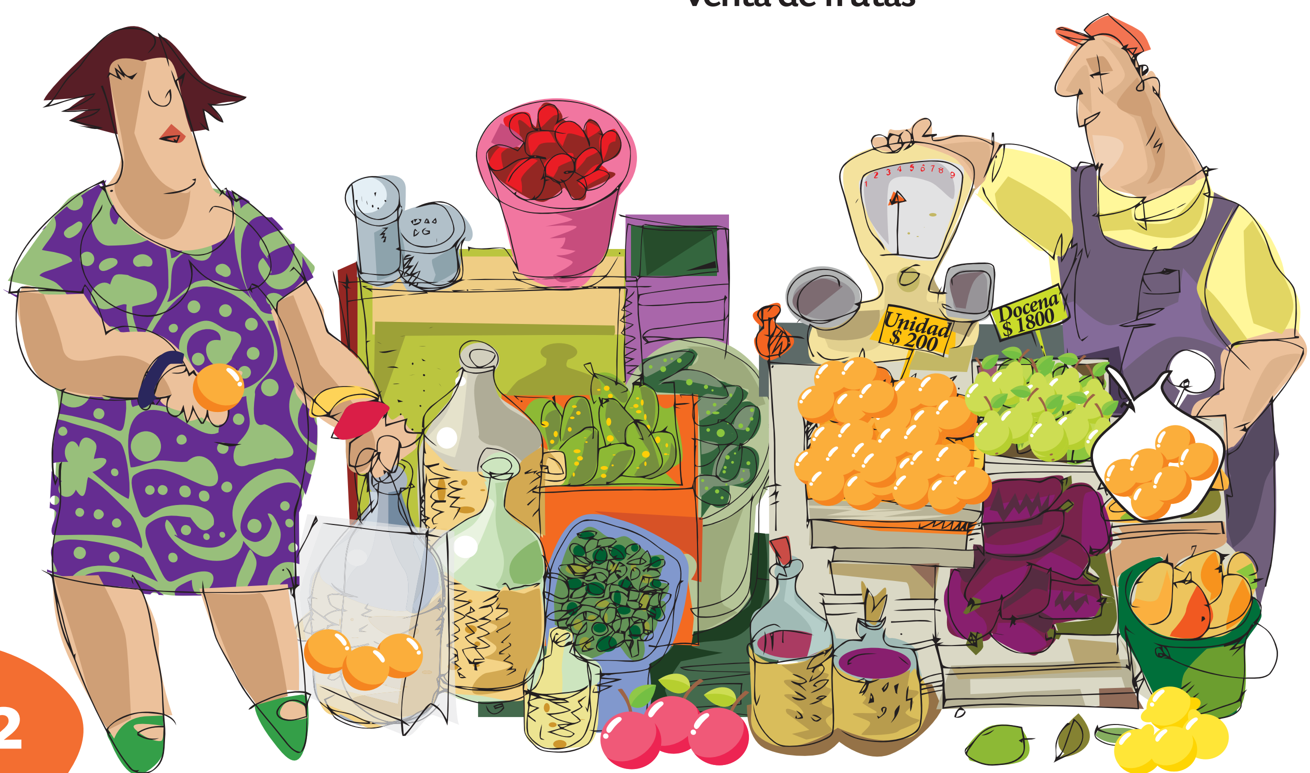
Cuando vas al mercado observas que las cosas tienen un precio y que este precio depende de la cantidad comprada. Por ejemplo: la cantidad de frutas o verduras que se pueden comprar por determinado peso o cantidad. En esta guía abordaremos algunas comparaciones que se establecen entre cantidades o magnitudes.

Trabajo en grupo

Reúnete con un compañero.

- Observen la siguiente imagen. Luego respondan las preguntas.

Venta de frutas



En la ilustración se observa el precio de una docena de peras.

- ¿Cuánto se paga por una de ellas?
- ¿Cuánto se pagaría si se compran tres docenas?
- ¿Cuánto si se compra media docena?

También se observa que la señora empaca naranjas en una bolsa.

- ¿Cuántas naranjas guarda la señora en una bolsa?
- Si alguien compra una docena de naranjas, ¿cuántas bolsas debe llevar? ¿Cuánto debe pagar?

Aprendamos algo nuevo

En la actividad anterior, se establecieron algunas relaciones:

- La que se establece entre las peras y el precio que se paga por ellas.
- La que se establece entre el número de bolsas y las naranjas que se empacan en ellas.

Dichas relaciones se traducen en expresiones numéricas como:

- Por **una docena** de peras se pagan $ 1.800.
- En **una bolsa** se empacan seis naranjas.

Cada una de los enunciados anteriores establece una unidad.

En el primer caso, **la unidad es la docena**, ya que si se conoce el precio de una docena, se sabe cuánto cuestan dos docenas, tres, cuatro, etc. En el segundo caso, **la unidad es la cantidad de bolsas** en las que se empacan seis naranjas, ya que si se conoce el número de bolsas, se sabe cuántas naranjas hay en dos, tres, cuatro, ..., bolsas.

Se pueden entender los enunciados de comparación de la siguiente manera:

- Por cada \$ 1.800 se compra una docena de peras.
- Por cada 6 naranjas se utiliza una bolsa.

En estos casos, la unidad cambia. En el primer caso**, la unidad es \$1.800**, ya que si se sabe la cantidad de docenas de peras que se compran, también se sabe cuántas se compran con \$ 3.600, \$ 5.400, \$ 7.200, etc.

En el segundo caso, **la unidad es 6 naranjas** las que determinan una bolsa; ya que si se conoce el número de naranjas, se sabe cuántas bolsas utilizar para 6, 12, 18, 24, … naranjas.

Por lo anterior, se puede concluir que determinar la unidad de una comparación depende del enunciado de la misma.

- Completa las siguientes tablas y establece la unidad:

Precio por docena de peras

Docena de peras	Precio (\$)
1	1.800
2	?
3	?
4	?

Cantidad de dedos por manos

Número de manos	Número de dedos
1	5
2	?
3	?
4	?
5	?

Días trabajados por obreros

Número de obreros	Días trabajados
1	36
2	18
3	?
4	?

Precio por consumo de agua

Consumo de agua (m^3)	Costo (\$)
1	3.650
10	36.500
20	?
30	?
40	?

Si observamos las comparaciones que se trabajaron en las tablas encontramos que se establecen dos columnas, cada columna determina una magnitud.

- Escribe una definición de lo que entiendes por magnitud. Compártela con los compañeros del curso y establezcan las características que permiten definir una magnitud para todos.

Si observamos la tabla **Precio por docena de peras**, las magnitudes que se relacionan en ella son docenas de peras y valor, y cada vez que aumenta una de ellas (docenas de peras); la otra magnitud (precio) aumenta su valor. En ese caso, cada magnitud crece.

Si observamos la tabla **Días trabajados por obreros**, las magnitudes que se relacionan en ella son número de obreros y días trabajados, y cada vez aumenta una de ellas (obreros), la otra (días trabajados) disminuye su valor. En ese caso, una magnitud crece y la otra magnitud decrece.

Ejercitemos lo aprendido

Realiza las siguientes actividades.

1. Identifica en cada situación la unidad de comparación.

   » Hay un puesto de salud por cada tres veredas.

   » Por cada $ 2.000 pesos de pan obsequian un roscón.

   » Cada libra de piña rinde para cuatro vasos de jugo.

   » Por cada diez inscritos en la maratón se apoya un adulto mayor en el hogar geriátrico San Rafael.

   » El corazón de un adulto late 72 veces cada minuto.

   » La escala gráfica del mapa es 2 cm por cada 300 km.

   » Un organismo vivo produce 200.000.000 glóbulos rojos cada día.

2. Establece comparaciones entre:

    a. El número de personas que viven en tu casa con el número de personas que son hombres.

    b. El número de estudiantes de tu salón con el número de personas que son mujeres.

    c. El número de personas que trabajan con el número total de personas que viven en tu casa.

    d. El número de estudiantes que son de tu escuela con el número de maestros que hay en tu escuela.

3. Realiza una entrevista a los compañeros acerca de las actividades que realizan los fines de semana.

Organiza la información en una tabla como la que se muestra a continuación.

Actividades realizadas el fin de semana

Actividades realizadas en el fin de semana	Número de compañeros

Luego, establece un enunciado por cada actividad que compare el total de las personas encuestadas con la cantidad de compañeros que se dedican a cada actividad registrada en la tabla.

Guía 10

Escribiendo las comparaciones

Estándares

Pensamiento numérico

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.

Pensamiento variacional

- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

La razón es el registro que se utiliza para expresar matemáticamente una comparación entre dos magnitudes. A partir de este registro, puedes expresar otras cantidades que se relacionan con la comparación original.

Lo que sabemos

Diego, un estudiante de posprimaria que escribió que en su clase hay 15 estudiantes y que 6 de ellos llegan en bicicleta, entonces se puede afirmar que por cada cinco estudiantes de la clase, dos llegan en bicicleta.

- ¿Estás de acuerdo con esa afirmación? ¿Por qué?
- Observa la siguiente representación. ¿Estás de acuerdo que representa la comparación?

- Se puede decir que los enunciados de comparación: "Por cada 15 estudiantes por curso 6 llegan en bicicleta" es lo mismo que por cada 5 estudiantes por curso 2 llegan en bicicleta". Justifica la respuesta.

Aprendamos algo nuevo

Trabajo en grupo

Preparemos un flan de yogurt

Reúnete con tres compañeros y entre todos reúnan los siguientes ingredientes para preparar un flan de yogur para cuatro personas.

- 2 vasos de yogur de fresa
- 1 vaso de leche
- 1 lata de leche condensada grande
- 5 huevos
- ½ limón
- 3 ½ cucharadas de azúcar
- 2 cucharadas de maicena
- 2 ollas
- 1 recipiente de plástico

Instrucciones para la preparación del flan

1. Coloquen una olla a fuego lento, sin dejar de revolver la cantidad de azúcar solicitada hasta que quede acaramelada. Usen dicho caramelo para untar el recipiente donde se cuajará el flan.
2. Licuen la cantidad solicitada de leche condensada, leche, yogur y los huevos.
3. Cuando observen la mezcla homogénea viértanla en el recipiente acaramelado.
4. Previamente llenen una olla con 2 litros de agua y gotas de limón.
5. Introduzcan el recipiente con la mezcla dentro de la olla, tápenla y pónganla a fuego alto hasta que se forme la argolla de vapor. Bajar el fuego al mínimo durante 30 minutos.
6. Desmolden y sirvan frío.

Respondan las siguientes preguntas.

- ¿Para cuántas personas se dan los ingredientes del flan en la receta?

- ¿Cuántos vasos de yogur se requieren si se desea preparar un flan para ocho personas? ¿Y para 12?
- Completen la tabla de la página siguiente.

Cantidad de ingredientes para preparar Flan de yogur según cantidad de personas

Flan de yogur	Vasos de yogur	Vasos de leche	Huevos	Leche condensada	Cucharadas de maicena
Para 4 personas	2				
Para 8 personas	4				
Para 12 personas					

- Con los datos de la tabla anterior, se pueden establecer comparaciones como:
  - » "Para preparar un flan se utilizan cinco huevos".
  - » "Un flan para cuatro personas".
  - » "Para preparar dos flanes se necesitarán diez huevos".
  - » "Por cada vaso de leche se utilizan dos cucharadas de maicena".
  - » "Por dos vasos de yogurt se utilizan una lata de leche condensada".

Cuando se realizan comparaciones como las anteriores, cada una se puede expresar como una razón. La razón se expresa como una fracción entre las cantidades numéricas dadas o se separan por dos puntos.

Por ejemplo:

- » Un flan para cuatro personas, determina la razón 1:4 o $\frac{1}{4}$. Esto se lee "1 es a 4".
- » Por cada vaso de leche se utilizan dos cucharadas de maicena, determina la razón 1:2 o $\frac{1}{2}$.
- » Por cada vaso de leche se utilizan dos vasos de yogurt, determina la razón 1:2 o $\frac{1}{2}$.

- Escriban las razones correspondientes a las comparaciones enunciadas anteriormente.

La razón es una comparación entre dos cantidades.
La razón 1 es a 2 es lo mismo que las razones 2 es 4, 5 es a 10, 4 es a 8, etc.

Todas se pueden expresar como fracciones equivalentes.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{4}{8}$$

A partir de una razón se obtienen razones que resultan equivalentes a la razón original.

Por ejemplo:
Miguel va a preparar una torta de plátano para 12 personas con 8 plátanos maduros. ¿Cuántos plátanos debe reunir si la torta es para 18 personas?

Al comparar las magnitudes número de personas y cantidad de plátanos, se obtiene la expresión "para cada 12 personas usa 8 plátanos", la correspondiente razón $\frac{12}{8}$.

Ahora debemos establecer una fracción equivalente o una razón equivalente cuyo numerador sea 18.

Esta expresión es $\frac{18}{12}$. Si encontramos la fracción irreductible de cada uno, se tiene:

$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ se divide cada término por 4.

$\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ se divide cada término por 6.

Observamos que al encontrar razón equivalente a la dada es más fácil encontrar el valor del dato de la magnitud solicitada.

La razón $\frac{18}{12}$ indica que para 18 personas se requiere de 12 plátanos maduros.

Ejercitemos lo aprendido

Realiza las siguientes actividades. En cada caso justifica tus respuestas.

1. Escribe la razón que represente la comparación dada.
   » Cinco limones para tres vasos de limonada.

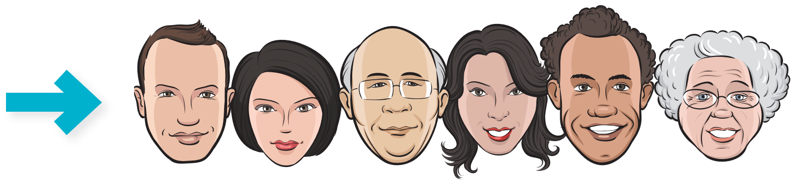
» 12 galletas a $ 2.500.

» $ 21.000 por tres galones de gasolina.

» Un libro para dos personas.

» Tres duraznos para seis personas.

» Una lancha para ocho personas.



2. Un automóvil recorre 30 cuadras en 15 minutos. ¿Cuántas cuadras recorrerá en 60 minutos?

3. Andrea debe vender 60 galletas, si cada caja tiene 12 galletas ¿Cuántas cajas debe vender?

4. Un museo requiere ubicar 80 cuadros para una exposición de arte. En cada pared pueden ubicar 16 cuadros, ¿Cuántas paredes requieren para la exposición de arte?

5. Indica cuales de los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

6. Consulta con tus padres o abuelos acerca de alguna receta tradicional de la familia o de la región. Escribe los ingredientes para prepararla según determinado número de personas.

» $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ » $\frac{2}{8} = \frac{3}{16}$ » $\frac{20}{10} = \frac{80}{40}$

» $\frac{12}{5} = \frac{24}{15}$ » $\frac{4}{3} = \frac{12}{9}$ » $\frac{7}{3} = \frac{21}{12}$

Presenta la receta a la clase, y solicíta que escriban los ingredientes, si el número de personas, para el cual se preparará la receta, se triplica.

Guía 11

Sobre proporciones

Estándares

Pensamiento numérico

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.

Pensamiento variacional

- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

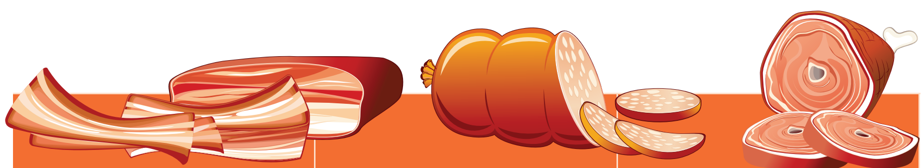
Lo que sabemos

Hablar de proporciones es concebir la idea de que dos magnitudes mantienen la misma razón de cambio entre la relación de sus datos. Establecer una proporción es igualar dos razones.
En esta guía se desarrollarán actividades para que comprendas las proporciones, sus propiedades y sus aplicaciones.

Analiza la siguiente situación.

Don Joaquín tiene una salsamentaria cerca del parque central del pueblo de Villa Alsacia. En el negocio, además de otros productos, vende carnes frías como jamón y mortadela. En la siguiente tabla, se muestra la cantidad de bloques que tiene de cada uno.

Cantidad de carnes frías



	De cerdo	De pollo	De pavo
Jamón	8	4	2
Mortadela	3	6	7

Contesta:

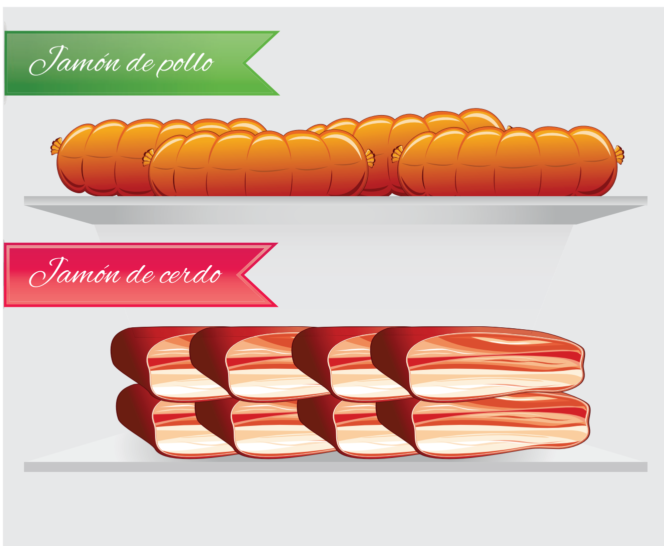
- ¿Qué razón expresa el número de bloques de jamón de cerdo y la cantidad de bloques de jamón de pollo?
- ¿Cuál es la razón entre el número de bloques de mortadela de cerdo y los bloques de mortadela de pollo?
- ¿Cuál es la razón entre el número de bloques de jamón de cerdo y los bloques de jamón de pavo?
- Por cada bloque de jamón de cerdo, ¿cuántos bloques de jamón de pollo hay?
- Por cada bloque de mortadela de cerdo, ¿cuántos bloques de mortadela de pollo hay?

Aprendamos algo nuevo

Ya sabemos que una razón da origen a muchas otras razones que resultan equivalentes entre sí.

La razón $\frac{8}{4}$ puede representar la cantidad de bloques de jamón de cerdo comparada con los bloques de jamón de pollo.

Bloques de carnes frías



La razón $\frac{8}{4}$ es equivalente a las razones $\frac{4}{2}$ y $\frac{2}{1}$.

Esas equivalencias se escriben como fracciones equivalentes así:

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

Si igualamos de a dos las fracciones equivalentes o las dos razones, obtendremos tres casos:

Caso 1: $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$, cada una da el mismo cociente: 2.

Caso 2: $\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$, cada una da el mismo cociente: 2.

Caso 3: $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$, cada una da el mismo cociente: 2.

Esas igualdades de razones indican:

» Para el primer caso: 8 bloques de jamón de cerdo le corresponden 4 bloques de pollo como 4 bloques de jamón de cerdo le corresponden 2 bloques de pollo.
» Para el segundo caso: 8 bloques de jamón de cerdo le corresponden 4 bloques de pollo como 2 bloques de jamón de cerdo le corresponden 1 bloque de pollo.
» Para el tercer caso: 4 bloques de jamón de cerdo le corresponden 2 bloques de pollo como 2 bloques de jamón de cerdo le corresponden 1 bloque de pollo.

Una **proporción** es una expresión que muestra la igualdad entre dos razones.

Es decir que
La igualdad $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ es una proporción. Como en los otros casos, también se puede escribir de la siguiente forma:

$$8 : 4 = 4 : 2$$

Se lee "8 es a 4 como 4 es a 2".

Los términos de una proporción se identifican como medios y extremos.

Medios $\longrightarrow$ $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ $\longleftarrow$ Extremos

En esta proporción 8 y 2 son los extremos; y, 4 y 4 son los medios.

- Escribe cuáles son los términos que son extremos y cuáles son los términos medios de las siguientes proporciones:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{3}, \qquad 2:3=6:9 \qquad 9:15=3:5$$

Las proporciones cumplen algunas propiedades:

1. El producto de los medios es igual al producto de los extremos (se conoce como propiedad fundamental).

$$8:4=4:2 \text{ cumple que } 8 \times 2 = 4 \times 4$$

$$16 = 16$$

   - Comprueba esta propiedad en las siguientes proporciones:

   a. $2:3=4:6$ b. $\frac{3}{27} = \frac{2}{18}$

2. Si se tiene una proporción se pueden alternar los extremos de una razón a la otra.

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} \text{ cumple que } \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

3. Si se tiene una proporción se pueden alternar los medios de una razón a la otra.

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} \text{ cumple que } \frac{8}{4} = \frac{4}{2}$$

   Nos queda igual porque los valores de los medios son iguales.

4. Si se tiene una proporción se pueden invertir las cantidades de cada razón.

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} \text{ cumple que } \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$

5. Si se tiene una proporción se puede permutar el orden en que se establecen las razones.

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} \text{ cumple que } \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

6. Si se tiene una proporción a cada una de las razones le puedo sumar o restar el mismo número y la proporción no se altera.

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$$

Le sumamos uno a cada razón y se tiene

$$\left(\frac{8}{4}\right) + 1 = \left(\frac{4}{2}\right) + 1$$

$$\frac{(8+4)}{4} = \frac{(4+2)}{2}$$

$$\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$$

- En ambos casos al realizar la división da 3, altera la razón pero conserva la proporción. ¿Explica por qué afirmamos esto?

7. Si se tienen varias razones que son equivalentes, se puede establecer otra razón equivalente como el resultado de la suma de cada una de las partes.

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{16}{8}$$

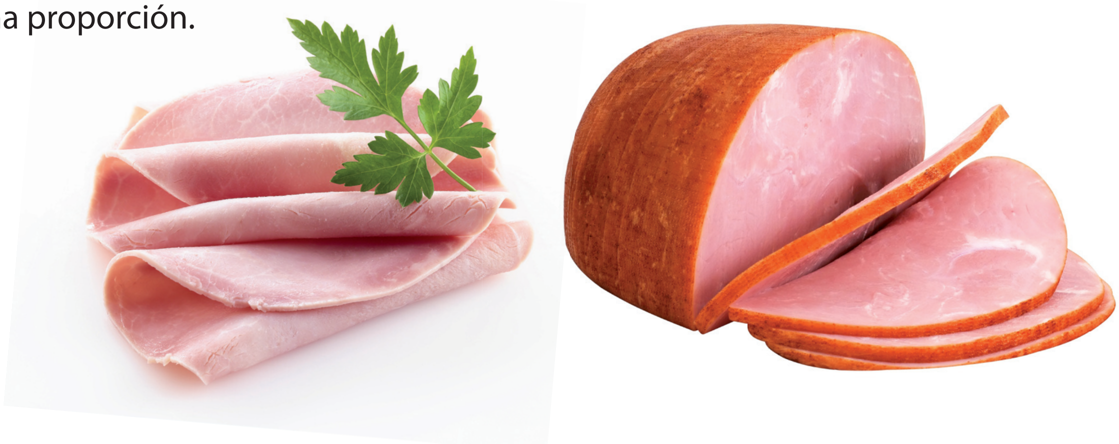
Al sumar los términos se tiene otra razón equivalente:

$$\frac{8+4+2+16}{4+2+1+8} = \frac{30}{15}$$

- Comprueba las propiedades anteriores con las siguientes proporciones:

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} \qquad \frac{7}{20} = \frac{35}{20}$$

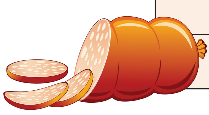
Con las propiedades de las proporciones se puede comprobar si dos razones forman una proporción.



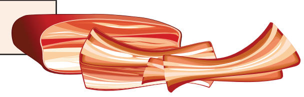
Situaciones que requieren proporcionalidad

Don Joaquín vende dos bloques de jamón de cerdo en $ 36.500. ¿Cuánto dinero recibe por la venta de 6 bloques?

Para establecer las razones se ordenan los datos por cada una de las magnitudes:



Bloques de jamón	Costo ($)
2	36.500
6	?



Una de las formas para solucionarlo es por medio del factor escalar:

Observando que 2 cambia a 6, porque se multiplica a 2 por un número que da 6. En este caso ese número es 3. Lo mismo debe suceder en el costo que se multiplica por 3. Esto es porque ambas magnitudes crecen y son proporcionales.

	Bloques de jamón	Costo ($)	
X3	2	36.500	X3
	6	?	

De esta forma se obtiene que 6 bloques de jamón cuesten:

36.500 x 3 = 109.500.

El método se llama de factor escalar porque se busca un factor que relacione los valores de una misma magnitud como son proporcionales lo que le afecta a una magnitud afecte a la otra de la misma manera.

Otra forma para solucionarlo es aplicando el teorema fundamental de las proporciones:

Es presentar la proporción con los datos del problema:

2 es a 6 como 36.500 es a la cantidad desconocida. Simbólicamente:

$$\frac{2}{6} = \frac{36.500}{?}$$

Hallando el producto de extremos y el producto de medios se halla el valor de **?**

El resultado del producto de los valores extremos (2 con ?) es el mismo resultado del producto de los valores medios (6 y 36.500).

2 x ? = 6 x 36.500

2 x ? = 219.500

Como 219.500 es el valor del producto de 2 con la cantidad desconocida, podemos plantear una división así:

219.500 ÷ 2 = 109.500

Es decir que recibe por la venta de 6 bloques de jamón la cantidad de $109.500.

Existe otro método para solucionarlo es por medio del factor funcional:

Observemos que podemos establecer la proporción con las siguientes razones:

$$\frac{2}{6} = \frac{36.500}{?}$$

De 2 cambia a 36.500 porque se multiplica 2 por la razón $\frac{\$\ 18.250}{1\ \text{Bloque}}$. Lo mismo debe suceder con 6; se cambia a la cantidad desconocida porque se multiplica 6 por la razón $\frac{\$\ 18.250}{1\ \text{Bloque}}$; y en ese caso, nos da $109.500.

Simbólicamente:

Bloques de jamón	Costo ($)
2 →	36.500
6 →	?

De esta forma se obtiene que 6 bloques de jamón cuesten:

$$36.500 \times 3 = 109.500.$$

El método se llama de factor funcional porque se busca un factor que es una razón que relaciona los valores de una magnitud con la otra. Esta razón la cumple cada uno de los datos relacionados de las magnitudes.

Ejercitemos lo aprendido

Trabajo en grupo

1. Analicen las siguientes situaciones:

   - Simón prepara una limonada mezclando tres cucharadas de azúcar con el jugo de cuatro limones. Si mezcla 12 cucharadas de azúcar con el jugo de 16 limones, ¿la mezcla tendrá el mismo sabor? ¿Por qué?

   - Con un banano, un cuarto de libra de fresa y un cuarto de libra de mora, se prepara una bebida para una persona, que revitaliza las energías del cuerpo. Se reúnen cuatro amigos y cada uno toma un vaso de esa bebida. La preparación se realizó con tres bananos, $\frac{5}{4}$ de libra de fresas y $\frac{5}{4}$ de libra de moras. ¿Tendrá la bebidas el mismo sabor que la original? ¿Por qué?

2. Planteen una proporción para cada situación y soluciónenlas por los tres métodos explicados.

   » Si para sembrar cuatro hectáreas de maíz se requieren nueve trabajadores, ¿cuántos trabajadores se necesitarán para sembrar 18 hectáreas.

   » Si por cada bote hay cuatro remos, ¿cuántos botes hay en total si se tienen 48 remos?

   » Si con $500 se compra un pan, ¿cuánto se necesita para comprar 8 panes?

   » Camilo tiene 18 tarros de pintura, para pintar 21 puertas. ¿Cuántas puertas puede pintar con 28 tarros?

   » Para preparar una ensalada se requiere ½ libra de queso por 3 tazas de harina. ¿Cuántas tazas de harina son necesarias si se utiliza un kilogramo de queso?

   » Tomás gana $ 35.000 por tres días de trabajo. ¿Cuánto gana si trabaja todos los días de la semana?

   » En el salón de clases de la escuela hay cinco niñas por cada tres niños. ¿Cuántas niñas hay si la clase tiene 24 niños?

3. Encuentren el valor de la letra desconocida, de manera que se obtengan razones equivalentes.

   $\frac{5}{9} = \frac{15}{n}$ $\quad\frac{7}{8} = \frac{m}{24}$ $\quad\frac{1}{2} = \frac{k}{60}$ $\quad\frac{32}{h} = \frac{8}{9}$

4. Escriban la propiedad que está cumpliendo en los siguientes enunciados:

   » $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ como $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

   » $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ como $\frac{14}{7} = \frac{4}{2}$

   » $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ como $\frac{(2+6)}{6} = \frac{(3+9)}{9}$

5. Comprueba si las siguientes parejas de razones establecen una proporción.

   a. $\frac{40}{100}$ y $\frac{2}{5}$

   b. $\frac{7}{9}$ y $\frac{2}{3}$

   c. $\frac{4}{7}$ y $\frac{12}{21}$

Guía 12

Tanto por ciento de una cantidad

Estándares

Pensamiento variacional

- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

Pensamiento numérico

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.

El tanto por ciento es uno de los valores más utilizados en el comercio, en los resultados de experimentos o en estadísticos. Los usos más cotidianos se relacionan con compras de productos que tienen IVA, aumento o descuentos.

En esta guía aprenderás la relación que existe entre las razones y el porcentaje.

Lo que sabemos

1. Recorta del periódico tres anuncios cuyos datos se relacionan con datos como porcentajes. Escribe qué tipo de comparación están estableciendo.

2. De las siguientes fracciones busca una fracción equivalente cuyo denominador sea 100:

   a. $\frac{3}{4} = \frac{?}{100}$

   b. $\frac{7}{25} = \frac{?}{100}$

   c. $\frac{6}{20} = \frac{?}{100}$

3. Si consideramos las anteriores fracciones como razones ¿podemos afirmar del ejercicio anterior que se establece una proporción entre ellas? Justifica tu respuesta.

Aprendamos algo nuevo

Con frecuencia se escuchan expresiones como estas: el costo de la canasta familiar aumenta en un 20 por ciento; Mario presta dinero al tres por ciento mensual; el 30 por ciento de la población no consume carne; el 95 por ciento de los jóvenes tiene un celular.

Esas expresiones hacen referencia a una razón cuya expresión es un número con respecto a 100, o el número es a 100.

Ejemplo 1:
El 20 por ciento, es la razón 20 de cada 100 o 20 es a 100.

Se representa de varias formas: $\frac{200}{100}$, 20:100 y 20%

Ejemplo 2:

El 3 por ciento es la razón $\frac{300}{100}$, que indica 3 de cada 100.

- ¿Qué significa el 30 por ciento?
- ¿Y el 95%?

Cuando una razón, es un número (n) que se compara con respecto a 100 se dice que la razón expresa un porcentaje.

Se simboliza:

$\frac{n}{100}$ n:100 n%

Por lo tanto, cuando las razones se comparan con respecto a 100, se está expresando un porcentaje. Igualmente, si se tiene un porcentaje se está estableciendo una razón con respecto a 100.

Por ejemplo:

$$\frac{25}{100} = 25\% \qquad \frac{87}{100} = 87\%$$

Como los porcentajes son fracciones que tienen como denominador una potencia de diez entonces se pueden expresar los porcentajes como números decimales.

Por ejemplo:

$$\underset{\text{Porcentaje}}{\underset{\uparrow}{38\ \%}} = \underset{\text{Fracción}}{\underset{\uparrow}{\frac{38}{100}}} = \underset{\text{Número decimal}}{\underset{\uparrow}{0{,}38}}$$

- Expresen como número decimal los siguientes porcentajes.

46% 75% 94%

Muchas situaciones que se presentan con frecuencia requieren calcular el porcentaje de un número.

Resuelve las siguientes situaciones:

- El 40% de los 20 estudiantes de la clase llegan a la escuela en bicicleta. ¿Cuántos estudiantes llegan en bicicleta?
    - » Describe el procedimiento que utilizaste.
    - » Comparte tu procedimiento con el resto del grupo. Discutan y saquen una conclusión.

Sigue las instrucciones que se presentan a continuación.

- Toma un capital de $ 500 000. Divídelo entre 100 y multiplica el resultado por dos. ¿Se puede considerar que el resultado corresponde al 2% del capital? Justifica tu respuesta.
- Al mismo capital ($ 500 000) multiplícalo por dos y luego divídelo entre 100. ¿Se puede considerar que el resultado corresponde al 2% del capital? Justifica tu respuesta.
- ¿Se pueden considerar que ambos procedimientos sirven para determinar el porcentaje de una cantidad? Justifica tu respuesta y socializa con los compañeros del curso.

Busca fracciones que tengan denominador 100 que al multiplicarlas por $ 500 000 den los siguientes resultados:

- $ 20.000
- $12 500
- $ 7.500

Uno de los métodos que utilizamos para hallar lo que le corresponde de cantidad a un porcentaje es el siguiente:

- Se expresa el porcentaje como fracción.
- Se calcula la multiplicación de esa fracción con la cantidad dada.
- El resultado es la cantidad correspondiente a ese porcentaje.

En el caso de los niños de la escuela que llegan en bicicleta, corresponde a 40% de 20 estudiantes =

$$\frac{40}{100} \text{ de } 20 = \frac{40}{100} \text{ x } \frac{20}{1} = \frac{40 \text{ x } 20}{100 \text{ x } 1} = \frac{800}{100} = 8$$

Es decir que el 40% de 20 estudiantes corresponde a 8 estudiantes. La respuesta del problema es que 8 estudiantes llegan en bicicleta.

Ejercitemos lo aprendido

Trabajo en grupo

Reúnete con dos compañeros más.

1. Escriban las siguientes razones como porcentajes.

$$\frac{58}{100}; \quad \frac{45}{100}; \quad \frac{68}{100}$$

2. Escriban los siguientes porcentajes como razones.

38% 29% 11%

3. Completen la siguiente tabla.

Representaciones de la fracción

Porcentaje	Cómo se lee	Razón (operador)	Expresión decimal
20 %		$\frac{20}{100}$	
			0.50
	Cuarenta por ciento		
2 %			
		$\frac{4}{100}$	

4. Escriban los siguientes enunciados como razones y establezcan el porcentaje correspondiente.

» 30 aguacates de 150 están dañados.

» 2 de 40 flores están marchitas.

» 15 de 200 estudiantes participaron en el concurso de ortografía.

5. En la biblioteca del colegio el 30% de los libros son de cuentos.

» Expresen ese porcentaje como fracción y como número decimal.

» Si en total hay 3500 libros, ¿cuántos son cuentos?

6. Margarita compra una blusa que tiene el 20% de descuento. Si el precio de la blusa es de $ 45.000, ¿cuánto pagó Margarita por la blusa?

Guía 13

Algo sobre variación proporcional directa

Estándares

Pensamiento numérico

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.

Pensamiento espacial.

- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.

Pensamiento variacional

- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

Lo que sabemos

En esta guía se estudiarán situaciones en las que dos magnitudes varían en forma directamente proporcional.

Trabajo en grupo

Formen grupos de tres personas.

- Consigan una bicicleta y un cronómetro o un reloj.
- Salgan al patio de la escuela. Cada integrante del grupo dará dos vueltas en la bicicleta, alrededor del patio.
- Cada ronda son dos vueltas y deben realizar cinco vueltas.

- Los compañeros que toman el tiempo deben registrar el tiempo que lleva cada ronda; es decir, cada dos vueltas.
- Las cinco rondas las realiza seguidas cada integrante.
- El registro del tiempo se realiza en una tabla como la que se presenta a continuación:

Registro de tiempo

Nombre del participante:		
Rondas	Número de vueltas	Tiempo en segundos
1	2	
2	4	
3	6	
4	8	
5	10	

Observen y comparen los datos registrados en cada una de las tablas de los integrantes.

- ¿Cómo se incrementa el tiempo en cada una de las rondas? ¿Se puede establecer una relación numérica entre el valor de la primera con respecto a la segunda?
- ¿Quién utilizó menos tiempo en realizar las cinco rondas?
- ¿Quién utilizó más tiempo en realizar las cinco rondas?
- ¿Quién fue el más rápido?
- Si la distancia recorrida en cada vuelta corresponde a la medida del doble del perímetro del patio, ¿de qué depende que algunos participantes hayan gastado más tiempo?

Aprendamos algo nuevo

En la actividad de registrar los tiempos observamos que se están relacionando dos magnitudes: distancia y tiempo.

Al comparar la cantidad de vueltas y el tiempo empleado, se deduce que, entre más vueltas tengan que dar alrededor del patio, mayor es el tiempo que se requiere. Es decir que en este caso, el tiempo **depende** de la cantidad de vueltas que se dan en la bicicleta.

Las magnitudes distancia y tiempo son **dependientes**.

Dos magnitudes son dependientes porque al cambiar una se cambia la otra; y esos cambios ocurren simultáneamente. Algunas veces sucede que si al aumentar una de ellas, aumenta la otra; si al disminuir una de ellas, la otra también disminuye; o si una aumenta la otra disminuye. En estos casos, se dice que las magnitudes están correlacionadas.

Un carro, con velocidad promedio, recorre 80 kilómetros en una hora.
Hilda anotó en una tabla la siguiente información.

Distancia recorrida contra tiempo

Tiempo (horas)	Distancia (Km)
1	80
2	160
3	240
4	320
5	400
6	480

- ¿Qué sucede con la distancia a medida que va aumentando el tiempo?
- Analicen :

Si la razón $\frac{1}{2}$ que se establece entre los datos de la magnitud tiempo y la razón $\frac{80}{160}$ que se establece entre los datos de la magnitud distancia:

- » ¿Se puede afirmar que con esas razones se puede determinar una proporción?
- » ¿Es cierta la proporción $\frac{1}{3} = \frac{80}{240}$?
- » Escriban otras cinco razones de la forma $\frac{a}{b}$ de tal forma que se establezca una razón entre datos del tiempo; y otra con los datos de distancia.
- » Establezcan con esas razones proporciones.

Existen otro tipo de razones que se pueden establecer entre un dato de una magnitud con respecto a la otra magnitud.

En el caso que estamos estudiando se pueden establecer una razón entre la distancia recorrida y el tiempo, como las siguientes:

$$\frac{80}{1}, \quad \frac{160}{2}, \quad \frac{240}{3}, \quad \frac{320}{4}, \quad \frac{400}{5}, \quad \frac{480}{6}$$

Si calculamos los cocientes, encontramos que

$$\frac{80}{1} = 80 \qquad \frac{160}{2} = 80 \qquad \frac{240}{3} = 80$$

$$\frac{320}{4} = 80 \qquad \frac{400}{5} = 80 \qquad \frac{480}{6} = 80$$

Todos los valores de los cocientes son 80. Es decir que corresponde a la razón 80 Km es a 1 hora que se escribe 80 Km/h.

Igualmente podemos afirmar que con las razones podemos establecer proporciones. Como podemos establecer proporciones entre cada uno de los datos se afirma que las **magnitudes son proporcionales**.

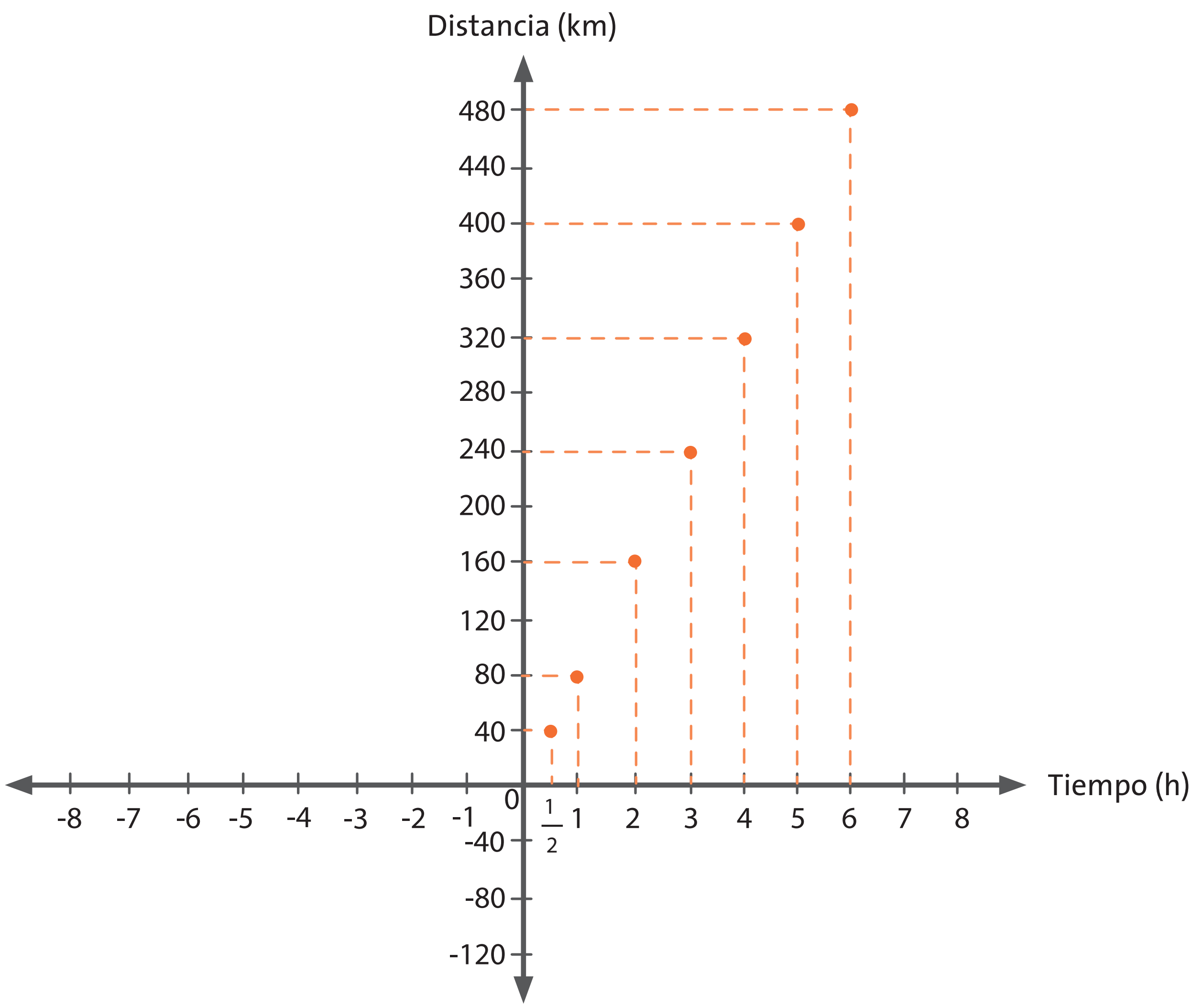
El valor de ese cociente es conocido como **constante de proporcionalidad**.

Si el cociente entre las razones de dos magnitudes dependientes es constante, se dice que las magnitudes son **directamente proporcionales.**

El valor de ese cociente se denomina **constante de proporcionalidad.**

Veamos cómo representar en un plano cartesiano los datos que anotó Hilda en la tabla.

Representación cartesiana de datos



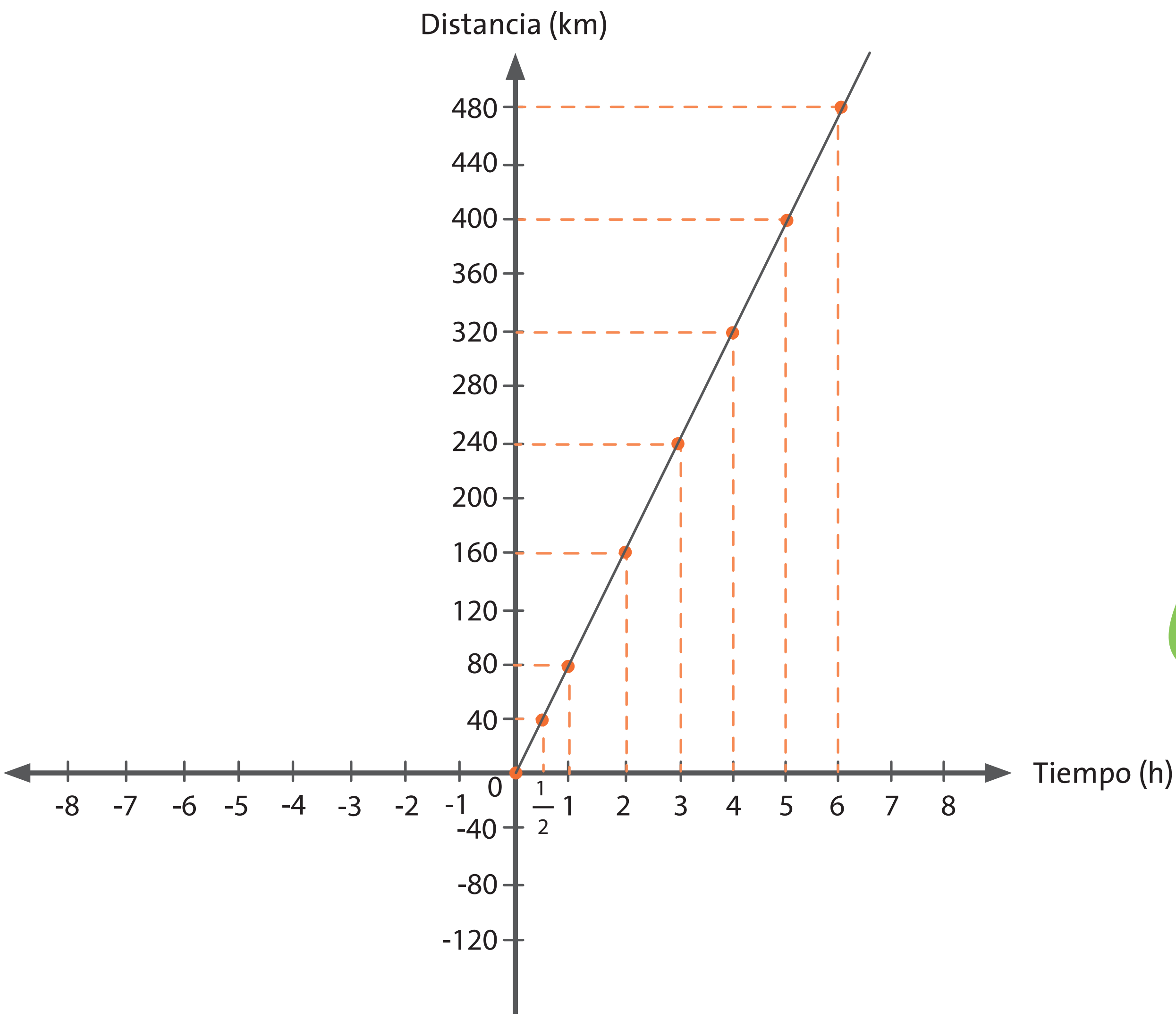
Como se observa en la figura anterior, los puntos están alineados y definen una recta que pasa por el punto (0,0).

- ¿Será correcto unir los puntos con una recta para representar la situación si sólo tengo esos puntos? Justifica tu respuesta.
- Camilo dice que si se pueden unir los puntos con una recta porque el tiempo es continuo en ningún momento se puede parar y así mismo sucede con la distancia; es continua. Además, dice que el hecho que en la tabla no se registren todos los tiempos no quiere decir que no haya una distancia recorrida en otros tiempos que no están en la tabla. Escribe qué piensas al respecto.

- Andrés, al escuchar a Camilo y se pone a su favor y agrega que no es posible que en 1 hora lleve 80 km recorrido y de inmediato pase a 2 horas y lleve 160 km; entre 1 hora y 2 horas existe una duración de una hora y este aumenta continuamente; igualmente sucede con la distancia entre 80 Km a 160 Km se recorrió 80 km más y este va aumentando continuamente. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Andrés?
- Socialicen sus argumentos, si están de acuerdo o en contra de lo que dice Camilo con los compañeros del curso.
- ¿Es posible con la información que presenta la tabla determinar la distancia recorrida trascurrida en 1 hora y media? Justifica tu respuesta.

No en todas las gráficas de situaciones de relación entre magnitudes se pueden unir los puntos para formar una recta. Siempre se debe analizar la continuidad de las magnitudes para poder trazar la recta. En este caso tanto la magnitud tiempo como la magnitud distancia son magnitudes continuas.

Por esa razón, la gráfica que representa la situación es la siguiente:



Con la gráfica podemos observar que la recta nos muestra cómo se correlacionan las magnitudes involucradas en la situación. Además, podemos inferir otros valores que no se establecieron en la tabla.

- ¿Qué distancia recorre el carro en el transcurso de media hora?
- ¿Qué distancia recorre el carro en el transcurso de tres horas y cuarto?
- ¿Qué distancia recorre el carro en el transcurso de 4 horas y 20 minutos?
- ¿Qué distancia recorre el carro en el transcurso de ocho horas?

En guías anteriores se trato el método funcional que consistía en hallar una razón que permite a través de una multiplicación de este valor con el valor de una magnitud encontrar el valor correspondiente en la otra magnitud. Esa razón es el mismo valor de la constante de proporcionalidad.

Analicemos las relaciones que existen entre las coordenadas o valores correspondientes de la tabla desde el método funcional.

Factor calculado en la relación entre tiempo y distancia

Tiempo (horas)	Distancia (Km)
1 $\xrightarrow{\times 80}$	80
2 $\xrightarrow{\times 80}$	160
3 $\xrightarrow{\times 80}$	240

Realmente 80 está representando la razón 80 km por cada hora.

- Para el caso de 1 hora, se tendría:

$$1 \text{ h} \times \frac{80 \text{ Km}}{\text{h}} = 80 \text{ km}$$

- Para el caso de 2 horas, se tendría:

$$2\text{ h x } \frac{80\text{ Km}}{\text{h}} = 160\text{ km}$$

- Para el caso de 3 horas, se tendría:

$$3\text{ h x } \frac{80\text{ Km}}{\text{h}} = 240\text{ km}$$

- Para el caso de 4 horas, se tendría:

$$4\text{ h x } \frac{80\text{ Km}}{\text{h}} = 320\text{ km}$$

- Revisemos qué es lo que se hace cada caso y qué cambia en cada uno de ellos:

En todos los casos encontramos una multiplicación cuyo factor fijo es (80 km/h). Lo que cambia por cada caso, es que ese factor 80 se multiplica por el número de horas y al resolver la multiplicación, el producto es la distancia correspondiente a esa hora. Lo que nos permite expresar simbólicamente así:

Distancia = (80) x tiempo

Sea "*d*" distancia y "*t*" tiempo, entonces tenemos que esa expresión se puede simbolizar como:

$d = 80\,t$ donde t está en horas y d en Kilómetros

Cuando expresamos la relación de las magnitudes a través de una fórmula es posible encontrar cualquier dato.

Por ejemplo, si queremos saber cuánto ha recorrido el carro en 8 horas, lo que hacemos es reemplazar y hacer los cálculos correspondientes en la fórmula.

$$d = 80\,t$$

$$d = 80(8)$$

$$d = 640$$

La distancia recorrida en 8 horas es 640 km, expresado como pareja ordenada sería (8, 640)

- Usen la fórmula para hallar los valores de las distancias correspondientes a 20 horas, 30 horas y 2 horas y media.

La constante de proporcionalidad *k*, se deduce de la variación directamente proporcional que existe entre las magnitudes *x*, *y*, cuando el cociente $\frac{x}{y} = k$; para todos los valores de cada magnitud.

Ejercitemos lo aprendido

1. Analiza y determina qué magnitudes son dependientes. Justifica tus respuestas.

   » El peso y el precio.

   » La estatura y la edad.

   » La velocidad y la distancia.

   » El número de galletas y el costo.

   » Las horas de sueño al día y la edad.

   » El área del terreno a trabajar y la cantidad de trabajadores.

2. Responde las siguientes preguntas.

   » ¿Cuándo una magnitud depende de otra?

   » ¿Qué es la constante de proporcionalidad?

   » ¿Las magnitudes número de galones de gasolina y kilómetros recorridos son directamente proporcionales? ¿Por qué?

Trabajo en grupo

1. Analicen cada situación representada en las siguientes tablas e indiquen si las magnitudes que se relacionan son directamente proporcionales. Justifiquen sus respuestas.

Costo por número de naranjas

Número de naranjas	4	8	12	16	20	24
Costo ($)	900	1800	2700	3600	4500	5400

Tiempo por número de vueltas

Número de vueltas	1	2	3	5	8	10	15
Tiempo (s)	20	40	60	80	100	120	140

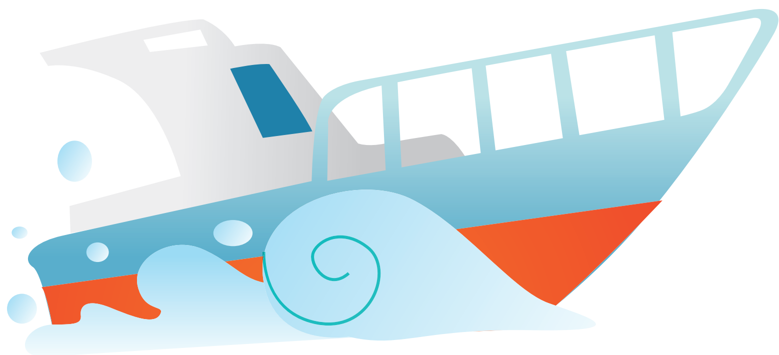
Tiempo para realizar un trabajo por número de trabajadores

Número de trabajadores	1	2	3	4	6
Número de días para realizar una obra	46	23	15	12	7

2. Realicen las gráficas correspondientes a las tablas anteriores.

3. Determinen la fórmula correspondiente a cada una de las tablas anteriores.

4. La cantidad de gasolina que consume una lancha viajando a velocidad constante, varía directamente con la distancia recorrida. La lancha gasta 10 galones en recorrer 125 kilómetros.



Distancia recorrida por galón de gasolina

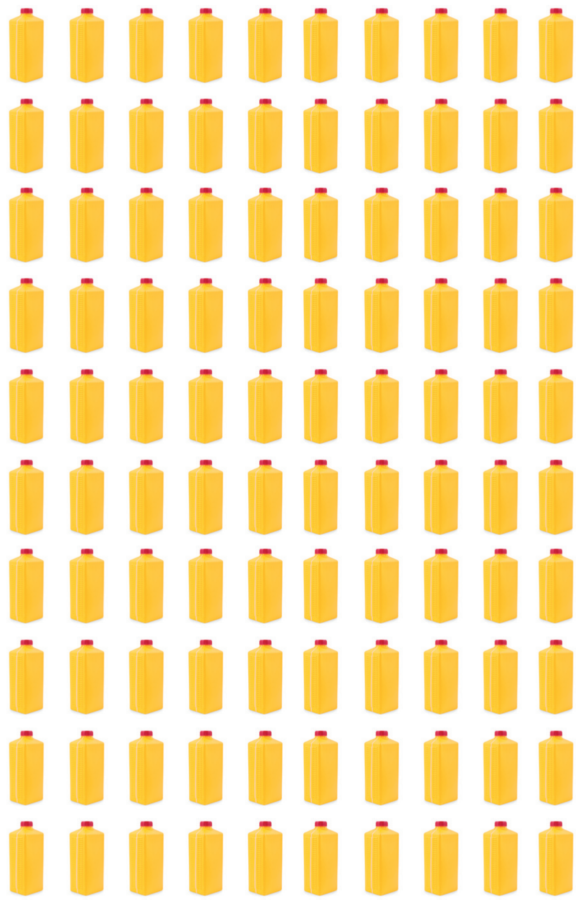
Número de galones	0	5	10	15	20
Distancia (Km)	0	62,5	125	187,5	250

- Elaboren una gráfica que represente la relación entre las magnitudes número de galones y distancia recorrida.
- Determinen la fórmula para calcular el valor de la distancia a partir del número de galones.
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que hay en la fórmula?
- Con la fórmula calculen los valores de las distancias correspondientes a:

2 galones

6 galones

100 galones



Guía 14

Algo sobre variación proporcional inversa

Estándares

Pensamiento numérico

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.

Pensamiento variacional

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

Lo que sabemos

En esta guía aprenderás a identificar cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales, sus características y algunas aplicaciones en diversos contextos.

Trabajo en grupo

Imaginen las siguientes situaciones.

1. Don Marcos encargó una lechona de 18 libras, para 30 personas, con motivo del aniversario de su empresa de confección de ropa.

Mucha gente se enteró del evento, así que se acercaron al sitio para celebrar.

Al repartir la lechona la cantidad de gente era el doble de lo esperado.

- ¿Qué puede hacer don Marcos para que todos los asistentes coman lechona? Escriban varias alternativas.
- ¿Cuál de las alternativas escritas es la más conveniente para don Marcos? ¿Por qué?

2. Mariela tiene $ 6.000. En la heladería hay helados de diferentes precios:

   $ 500; $ 600; $ 1.000; $ 1.500 y $ 2.000.

- ¿Qué cantidad de helados de cada precio, puede comprar Mariela con el total de dinero que tiene?
- Elaboren una tabla para registrar la información.

Aprendamos algo nuevo

En la siguiente tabla se muestran datos relacionados con la cantidad de personas que asisten al evento del aniversario de la fábrica de ropa, y la cantidad de gramos de comida que le correspondería a cada uno.

Gramos de comida consumidos por persona

Número de personas	30	40	45	50	60
Gramos de comida	300	225	200	180	150

- Si aumenta la cantidad de personas en el evento, ¿qué sucede con la cantidad de gramos de comida que se deben repartir? ¿aumentan o disminuye por plato?
- ¿Esas magnitudes son dependientes? ¿Por qué?
- ¿Son directamente proporcionales? ¿Por qué?
- ¿Por qué se sabe que a 30 personas les corresponden 300 gramos de lechona?
- ¿Qué relación numérica se puede establecer entre cada pareja de datos dados en la tabla?

Si observamos los valores de la magnitud número de personas vemos que van aumentando mientras que los valores de la magnitud cantidad de gramos de comida van disminuyendo. Cuando en las magnitudes involucradas una crece y la otra decrece se dice que las magnitudes son dependientes de forma inversa.

- Hallen el producto que se obtiene de tener como factores a los valores de cada pareja de datos de la tabla.

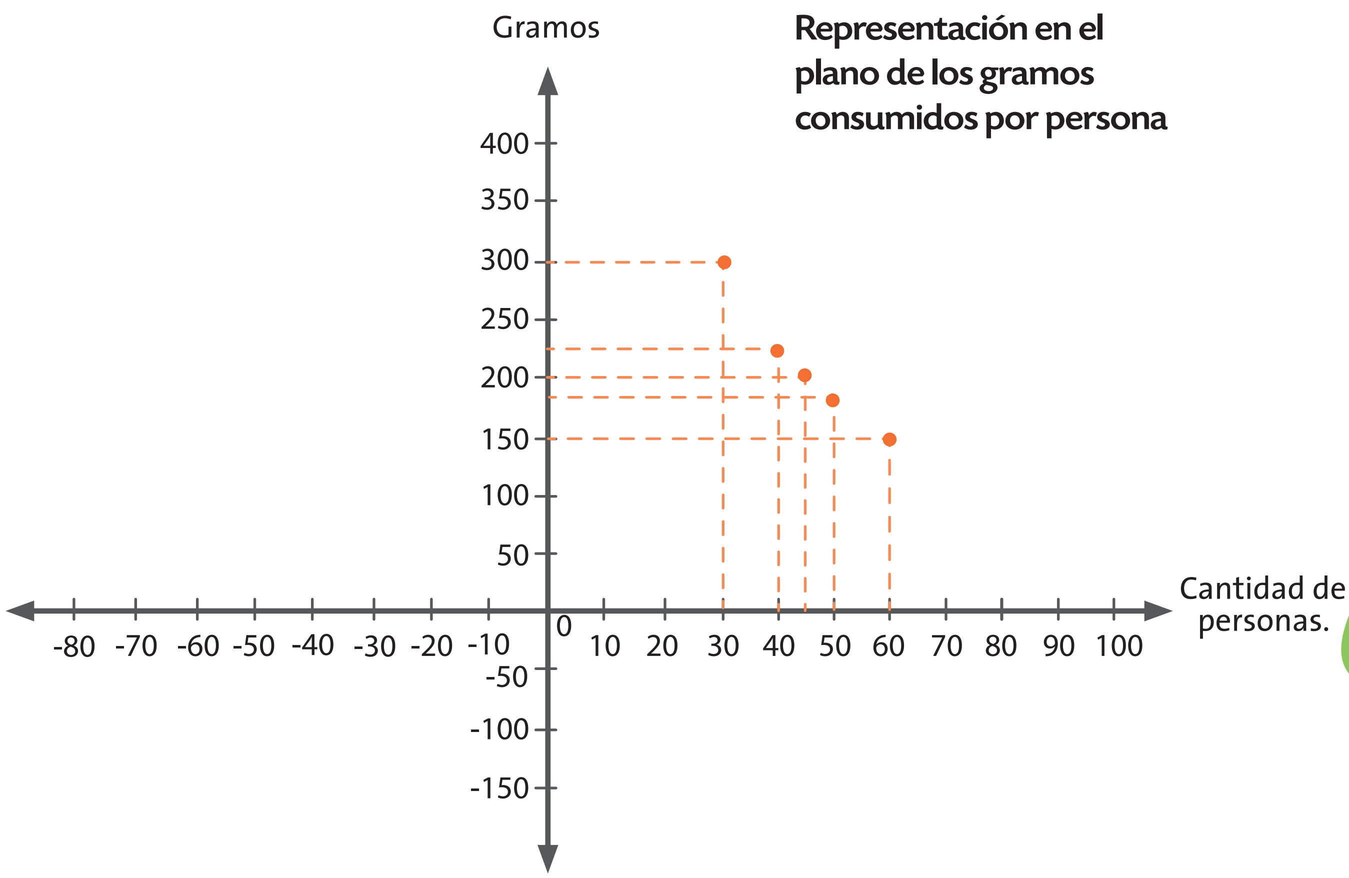
$30 \times 300 = 9.000$ $40 \times 225 =$ $45 \times 200 =$

$50 \times 180 =$ $60 \times 150 =$

En todos los casos nos da 9.000.

Cuando todos los productos que se obtienen de multiplicar los valores correspondientes a las magnitudes involucradas son iguales, se dice que las magnitudes son inversamente proporcionales y el valor del producto se conoce como constante proporcionalidad inversa.

Representación en el plano de los gramos consumidos por persona



En este caso, solo podemos representar puntos discontinuos y nos dan la percepción de una curva debido a que la magnitud número de personas es discontinua, no se puede dar el valor correspondiente a una persona y media; a pesar que la magnitud de peso es continua.

- Representemos gráficamente la relación correspondiente a tiempo con respecto a velocidad en un plano cartesiano.

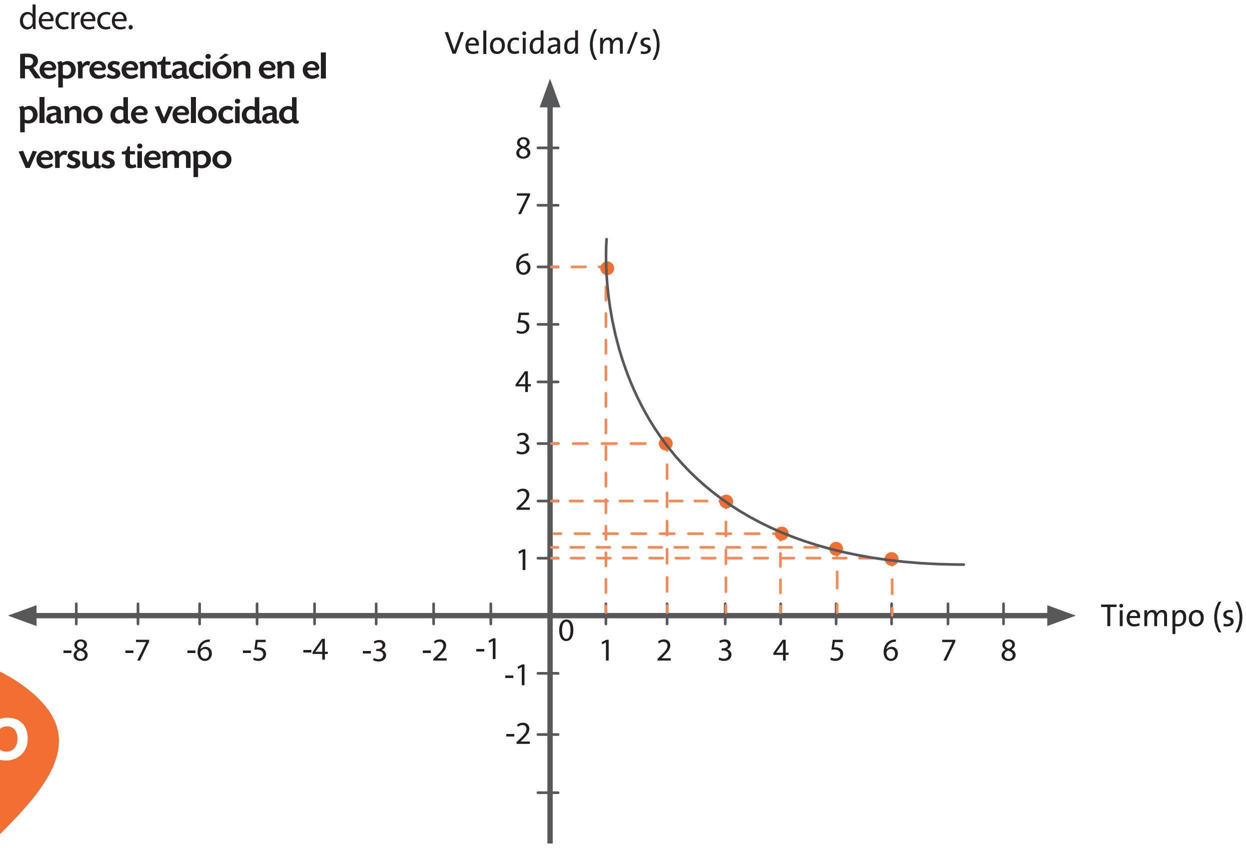
Relación entre la velocidad versus tiempo

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
1	6
2	3
3	2
4	1,5
5	1,2
6	1

- Comprueben que las magnitudes tiempo y velocidad son inversamente proporcionales.

En este caso, las magnitudes son continuas debido a que tanto el tiempo como la velocidad son continuas. Por lo tanto, los puntos los podemos unir formando una curva que decrece.

Representación en el plano de velocidad versus tiempo



Igualmente se puede expresar dicha relación con una fórmula. Analicemos las parejas de la tabla y sus regularidades con el producto de sus valores.

Para reconocer que son magnitudes inversamente proporcionales multiplicamos sus valores, veamos esta relación.

Para la pareja ordenada (1, 6) se tiene: 1 x 6 = 6

Para la pareja ordenada (2, 3) se tiene: 2 x 3 = 6

Para la pareja ordenada (3, 2) se tiene: 3 x 2 = 6

Para la pareja ordenada (4, 1,5) se tiene: 4 x 1,5 = 6

Para la pareja ordenada (5, 1,2) se tiene: 5 x 1,2 = 6

Analicemos que lo constante es el resultado del producto y que los factores corresponden a los valores de las magnitudes inversas, entonces podemos representar dicha relación de la siguiente forma:

$$\text{Tiempo x velocidad} = 6$$

Si "*t*" representa tiempo y "*v*" representa velocidad se tendría nuevamente:

$$t \times v = 6$$

Para hallar el valor de la velocidad a partir del tiempo, tenemos que hallar una expresión equivalente donde se despeje velocidad y se obtiene:

$$v = \frac{6}{t}$$

- Comprueben que la fórmula permite hallar los valores de la velocidad a partir del dato del tiempo.

2 s   4 s   6 s   7 s

Ejercitemos lo aprendido

Trabajo en grupo

Forma pareja con un compañero para resolver las siguientes situaciones.

1. En el taller de confección que se dicta en el centro de recreación cultural, se tiene una pieza de 120 m de largo, que se va a distribuir, entre los asistentes, en cortes de la misma longitud y conservando el ancho de la pieza.

   Teniendo en cuenta la información anterior completen la siguiente tabla.

Datos taller de confección

Longitud en metros de cada corte	2	3	4	5	6	8
Número de cortes	60					
Producto	120					

- ¿Cuál es el producto obtenido al multiplicar las magnitudes?
- ¿Las magnitudes son inversamente proporcionales? ¿Por qué?
- Describan si las magnitudes son continuas o discontinuas.
- Representen la situación en un plano cartesiano.

2. Javier registró en la siguiente tabla la cantidad de días que le dura el alimento con el que cuida su ganado.

Tiempo de duración del alimento de ganado

Cantidad de vacas	10	15	30
Cantidad de días que dura el alimento	15	10	5

- ¿Cuántos días durará el alimento si Javier debe cuidar seis vacas? ¿Y si son 25?
- Realicen la gráfica correspondiente.
- Hallen la gráfica correspondiente.

3. La siguiente tabla muestra la relación entre el número de obreros y el tiempo empleado en hacer una obra.

Tiempo empleado para hacer una obra

Número de obreros	20	15	12	10	6
Tiempo empleado (días)	12				
Producto					

Completen los datos de la tabla.

- ¿Cómo se relacionan las magnitudes, de forma directa o inversa?
- Describan si las magnitudes son continuas o discontinuas.
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
- ¿Cuántos días emplearán ocho obreros?

Apliquemos lo aprendido

1. Completa las expresiones.

   a. Un ciclista recorre 18 km en tres horas. En recorrer 72 km tarda ____ horas.

   b. Una docena de mandarinas cuesta $ 2.000. Siete docenas de mandarinas cuestan_________ .

2. Si se sabe que David recorre en su bicicleta 130 km por cada 5 horas. Completa la siguiente tabla si la relación de las magnitudes es directamente proporcional.

Tiempo versus distancia recorrida en bicicleta

Distancia (Km)	130			52
Tiempo (h)	5	1	3	

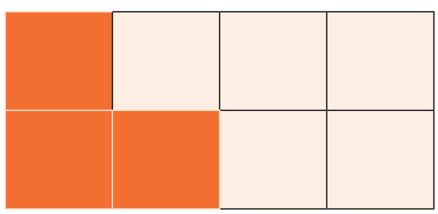
3. Resuelve cada situación.

   » Si se ubican 398 personas en 10 m^2, ¿cuántos metros cuadrados se necesitan para ubicar 5.970?

   » La secretaria escribe 1.400 palabras en 25 minutos. ¿En una hora cuántas palabras habrá escrito?

   » Se pagan $ 28.000 por cinco camisetas. Si se quiere comprar una gruesa (doce docenas=144 unidades) de camisetas, ¿cuánto cuestan?

   » Para plantar césped en 3/8 de un terreno se tardaron 45 minutos. Si se continua con el mismo ritmo, ¿cuánto tiempo tardará en plantar el césped en todo el terreno?



   » Un kilogramo de granadilla cuesta $ 1.956 Si se compran 10 kilogramos, ¿cuánto cuestan?

Trabajo en grupo

Trabaja con un compañero. Resuelvan las situaciones propuestas.

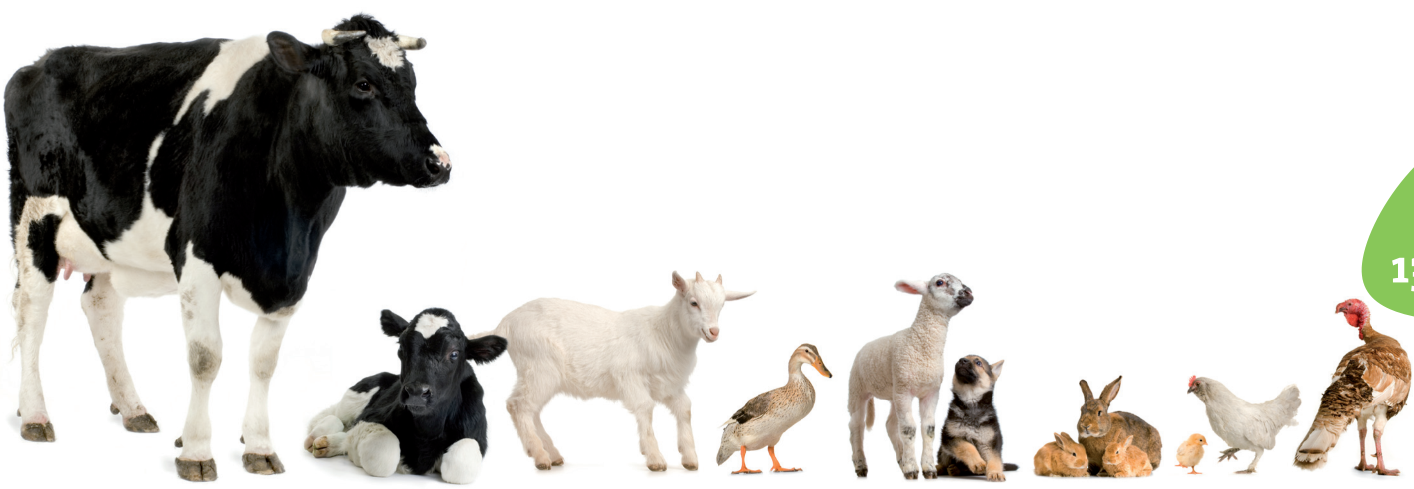
1. En la tienda de víveres una persona tenía que pagar $12.000 pero le hacen un descuento del 15%. ¿Cuánto tiene que pagar?

2. Por no pagar a tiempo una cuenta de $20.000 le recargan por mora el 4%. ¿Cuánto debe cancelar con el recargo?

3. Si en el banco prestan dinero a un interés mensual del 3%. ¿Cuánto pagará mensualmente de intereses un cliente que presta los siguientes capitales: $ 300.000, $ 18.000 y $ 50.000?

4. En una finca hay 250 animales de los cuales el 40% son vacas, el 20% son toros, el 18% son ovejas, el 10% son gallinas y el resto otros animalitos. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

5. Si un jornalero gana $ 321.000 al mes, ¿cuánto ganará en 70 días de trabajo?



Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

De los ejercicios del 1 al 5 selecciona entre las opciones dadas la respuesta correcta.

1. Jesús, trabaja recolectando la cosecha de frutas de la temporada. Si por un mes de trabajo le pagan $ 560.000, ¿cuánto le pagan por un día de trabajo?

   a. $18.000

   b. $18.100

   c. $18.600

   d. $18.666

2. En la plaza de mercado venden el queso costeño a $ 12.500 el kilogramo. ¿Cuánto cuesta comprar $\frac{7}{2}$ kilogramos de queso?

   a. $43.750

   b. $43.700

   c. $43.000

   d. $42.750

3. El valor de *n* para obtener una proporción en la expresión: "5 es a 50 como 8 es a *n*" es:

   a. 400

   b. 50

   c. 80

   d. 10

4. Cuatro de cada 32 estudiantes de una escuela rural, prefieren practicar natación. Si en el colegio hay 288 estudiantes, ¿cuántos prefieren practicar natación?

   a. 16 estudiantes

   b. 36 estudiantes

   c. 8 estudiantes

   d. 28 estudiantes

5. El precio normal de una camisa es de $ 59.000. ¿Cuánto se tiene que pagar por la camiseta, si tiene un descuento de 25%?

   a. $44.200

   b. $42.000

   c. $43.250

   d. $44.250

6. ¿Cuál de los conceptos que se trataron en este módulo fue el que más te gustó?

7. ¿Cuál de los conceptos que se desarrollaron en este módulo es el que más se te dificulto?

8. ¿De las actividades planteadas a lo largo del módulo, cual fue la que más te gusto?, ¿Por qué?

9. ¿Consideras que los temas estudiados en este módulo, son aplicables en tu vida cotidiana?, ¿en qué actividades te pueden servir?

¿Cómo me ven los demás?

Organiza un grupo de tres compañeros.

Cada integrante del grupo debe escribir los temas que se desarrollaron en el módulo.

Luego escogerá el aspecto que más comprendió en lo tratado en el módulo y justificar su respuesta.

Investiga cuáles son algunas de las aplicaciones de ese aspecto a nivel de matemáticas, otras ciencias y la vida cotidiana.

Compartan las respuestas con sus compañeros de grupo y elaboren un mapa conceptual que relacione cada uno de los aspectos seleccionados y como se conectan por sus aplicaciones.

El grupo elabora una cartelera y presenta una exposición de 10 minutos al curso para enriquecer lo estudiado en el módulo.

¿Qué aprendí?

Completa la siguiente tabla.

	Sí	No	A veces	Justificación
Identifico magnitudes.				
Establezco relaciones de comparación entre magnitudes.				
Interpreto una razón según la situación.				
Establezco proporciones entre razones para resolver problemas.				
Utilizo diferentes métodos para resolver situaciones de proporcionalidad.				
Identifico e interpreto una situación de variación proporcional directa.				
Identifico e interpreto una situación de variación proporcional inversa.				
Maneja los registros para representar variaciones como: tablas, gráficas y fórmulas.				
Aporto en las actividades que son de trabajo en grupo.				
Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
Participo activamente en clase, expresando mis opiniones de manera clara y respetuosa.				
Respeto las opiniones de mis compañeros de curso.				
Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				
Me intereso por aprender de manera significativa.				

Con tu profesor, determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento.

Módulo 4

Capacidad y volumen, dos magnitudes muy relacionadas

¿Qué vas a aprender?

Desde el inicio de los tiempos, cuando el ser humano hizo uso de su raciocinio para resolver los problemas que a diario le surgían, debió recurrir a estrategias que le permitieran medir y calcular diferentes dimensiones; no solo las longitudes se hicieron presentes en su cotidianidad. El hecho de estar inmerso en un mundo de tres dimensiones obligó al hombre a resolver problemas que le permitieran dominar el uso adecuado del espacio, grandes avances se hicieron en la antigüedad que dan cuenta de ello, colosales pirámides, recipientes destinados para el intercambio de mercancías, etc.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento numérico

- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en medidas.

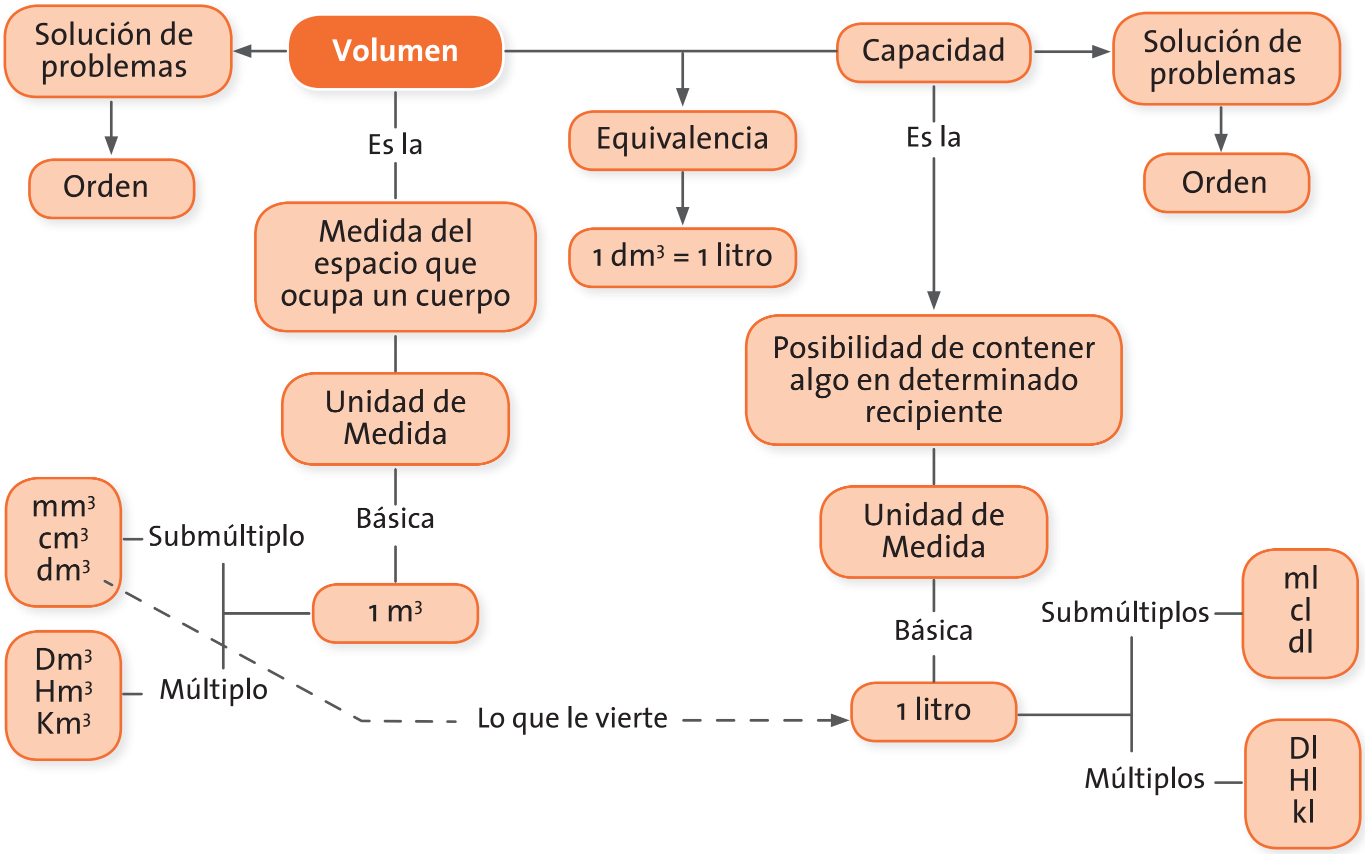
Pensamiento métrico

- Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
- Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.
- Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.

La realización de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo te permitirá alcanzar estándares básicos de competencias que privilegian el desarrollo de los pensamientos numérico y métrico, a través de los conceptos asociados al volumen y capacidad.

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 15.
Algunas unidades de medida de volumen</td><td>Volumen y unidades de medida</td><td rowspan="3">Se desarrollan en gran medida los siguientes procesos:
Comunicación: Al asimilar el lenguaje matemático como una herramienta aplicable a las diversas situaciones que se presentan en la vida diaria en relación a las magnitudes medidas.
Formulación y resolución de problemas, al diseñar y comparar las estrategias de resolución a un problema propuesto, relacionados con la capacidad de establecer relaciones en las magnitudes de volumen y capacidad con sus correspondientes unidades.
Razonamiento al establecer conjeturas sobre los procedimientos necesarios para realizar transformaciones entre unidades de volumen y capacidad, para que luego por medio de argumentos se puedan aceptar o rechazar las conjeturas y establecer reglas generales para situaciones con la misma estructura.
Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos al identificar patrones que invitan al estudiante a reflexionar sobre los procedimientos necesarios para la resolución de la situación planteada, manejando correctamente las propiedades y operaciones relacionadas con las magnitudes de capacidad y volumen.
Modelación: Al construir elementos que incluyen en su desarrollo los conceptos básicos de magnitudes de volumen y capacidad y sus correspondientes unidades.</td></tr>
<tr><td>Guía 16.
Una nueva magnitud: la capacidad</td><td>Capacidad y unidades de medida</td></tr>
<tr><td>Guía 17.
Equivalencias entre medidas de volumen y de capacidad</td><td>Equivalencias entre unidades de medida de volumen con capacidad</td></tr>
</table>

El siguiente esquema te muestra la manera en que se pueden relacionar los conceptos.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Las unidades de volumen te permiten calcular el espacio que ocupa un cuerpo de forma regular o irregular. Con estas herramientas puedes determinar si un objeto es de mayor tamaño que otro, sin la necesidad de construirlo. Mediante representaciones gráficas de un objeto y el conocimiento de sus medidas puedes realizar la planificación su construcción y predecir de forma anticipada el espacio que ocupará, incluso sus costos. Las medidas de capacidad te permiten diseñar recipientes que puedan contener diferentes elementos para su transporte teniendo en cuenta, entre otras cosas, sus propiedades físicas y químicas.

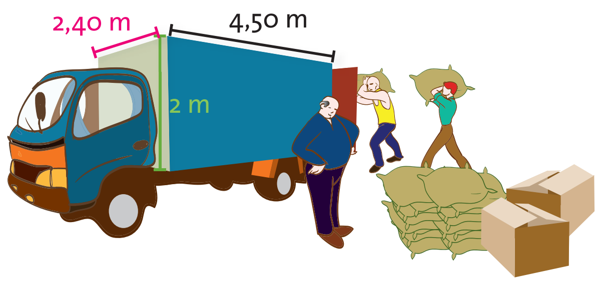
¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En el desarrollo de esta guía, recorrerás tres momentos, los cuales poseen objetivos diferentes, pero en general se encuentran enfocados al desarrollo de tus destrezas matemáticas, evaluando constantemente los conocimientos que vas adquiriendo y reflexionando sobre ellos.

De esta forma, iniciaremos reconociendo los conocimientos matemáticos que has adquirido en el transcurso de tu vida y que se hacen pertinentes para continuar con tu aprendizaje a través del tema central de esta guía.

Tomando como base tus conocimientos anteriores, en un segundo momento tendrás la oportunidad de ampliar esos conocimientos y encontrar la aplicación de estos en tus quehaceres cotidianos.

El último momento te invita a reflexionar sobre los conocimientos que adquiriste en el desarrollo de la guía, analizar el camino que seguiste para obtenerlos, por medio de preguntas que cuestionan tu proceso de aprendizaje.



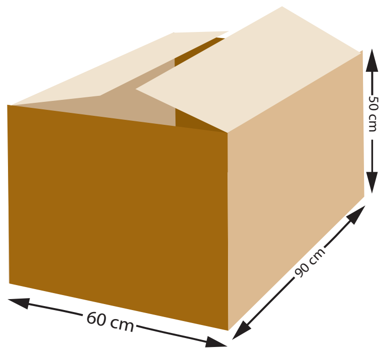
Explora tus conocimientos

Para llevar la cosecha, don Juan dispone de unas cajas cuyas dimensiones son 90 cm de largo, 60 cm de ancho y 50 cm de alto. En total necesita 30 cajas que organiza en el interior de su bodega. El furgón del camión que contrata tiene las siguientes dimensiones: 4,50 m de largo por 2,40 m de ancho y 2 m de alto.

- Dibuja todas las formas posibles de organizar las 30 cajas en la bodega.
- Dibuja las formas posibles de ubicar las cajas en el furgón. Escribe la cantidad de cajas para cada forma y selecciona la que permite acomodar un mayor número de cajas.
- ¿Cuántos viajes necesita hacer el camión para transportar las 30 cajas, si selecciona la organización que permite ordenar más cajas en el furgón?
- ¿Cuántos viajes necesita hacer el camión para transportar las 30 cajas, si selecciona la organización que permite ordenar menos cajas en el furgón?

En lugar de empacar en cajas, don Juan puede utilizar bultos. Si se sabe que en los bultos le cabe dos veces lo de una caja:

- ¿Cuántos bultos necesita para empacar toda la cosecha?
- ¿Cuántos viajes menos tiene que hacer el camión si empaca en bultos y selecciona la organización que permite un mayor número de cajas en el furgón?



Guía 15

Algunas unidades de medida del volumen

Estándares

Pensamiento espacial

- Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.

Pensamiento métrico

- Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.

Lo que sabemos

En la longitud, la medida consiste en determinar cuántas veces una unidad recubre otra. De forma similar, sucede con el volumen.

El volumen es una medida que determina la cantidad de cubos que llenan completamente el espacio interno de un objeto o cuerpo. En esta guía explorarás algunas unidades cúbicas que sirven para determinar el volumen.

Imagina que deseas transportar la cosecha de don Juan y que puedes elegir entre cobrar por el peso de lo que se lleva o cobrar por el espacio que ocupan las cajas o los bultos. ¿Cuál de las dos opciones podría ser para ti la más beneficiosa? Justifica tu respuesta.

Si se decide cobrar por el espacio que se ocupa, explica la forma más fácil de calcularlo:

- Cuando se emplean los bultos.
- Cuando se emplean las cajas.
- ¿Cuál de las dos formas de empacar, es la que le conviene al dueño del camión para que gané más dinero?
- Justifica las soluciones a las situaciones anteriores.

Aprendamos algo nuevo

Trabajo en grupo

¿Cómo determinar el volumen de una piedra, una papa o un kilo de arroz?

Para hallar la solución a estos problemas, debemos establecer qué tipo de magnitud es el volumen.

Imagina que tienes un kilo de alverja seca y un kilo de papa: ¿Cuál de los dos tiene mayor volumen?

Si introducimos cada uno de los elementos dentro de un recipiente lleno de agua hasta el borde.

- ¿Qué sucede?
- ¿Cuál de los dos desaloja más agua?
- ¿Cómo puedes explicar lo que ocurre?

Realicen el experimento.

- ¿Se puede afirmar que el elemento que más desaloje agua es el que más volumen tiene? Justifiquen su respuesta.

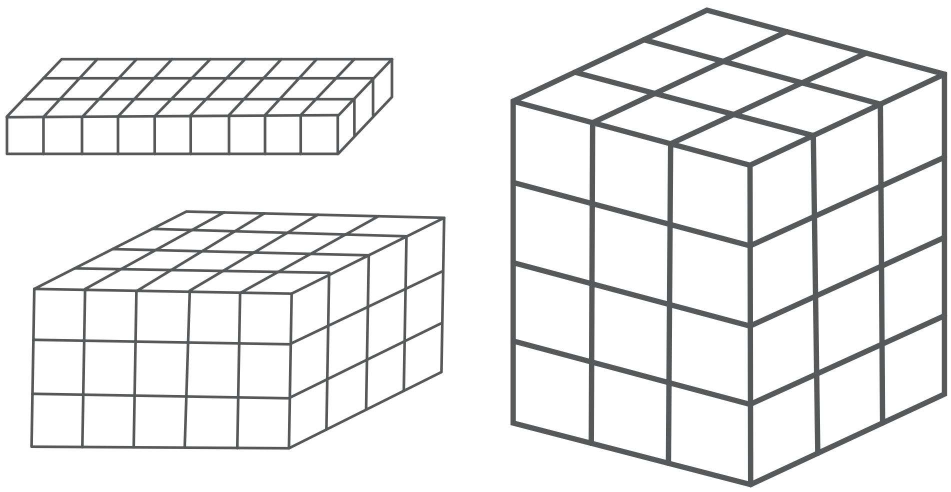
Cuenta la historia que un experimento parecido realizó el sabio Arquímedes pues el rey le había pedido averiguar si todo el oro dado para elaborar su corona se había utilizado. Arquímedes mientras tomaba un baño de tina notó que cuando su cuerpo entraba en ella se desalojaba agua y que era siempre la misma cantidad. Se dice que salió corriendo desnudo por la ciudad de Siracusa gritando ¡Eureka!

- ¿Qué descubrió el sabio Arquímedes con relación al volumen de un cuerpo?
- ¿Qué hizo Arquímedes para resolver el problema de la cantidad de oro de la corona? Complementen su respuesta con lo que significa densidad de una sustancia.
- Según lo anterior, analicen de nuevo la afirmación: "el elemento que más desaloje agua es el que más volumen tiene".

Don Manuel fabrica cubos de azúcar de 1 cm cada lado. Para distribuirlos usa dos tipos de cajas: la primera con dimensiones de 10 cm de largo, 8 cm de ancho y 6 cm de alto; y la segunda tiene 12 cm de largo, 10 cm de ancho y 4 cm de alto.

- ¿Cuántos cubos puede empacar en la primera caja?
- ¿Cuántos cubos necesita para llenar por completo la segunda caja?
- Realiza dibujos que muestren la cantidad de cubos que contienen cada una de las cajas.
- Escribe una forma para determinar la cantidad de cubos por caja, sin necesidad de dibujarlos.

- Determina la cantidad de cubos de 1 cm de lado que hay en las siguientes figuras:



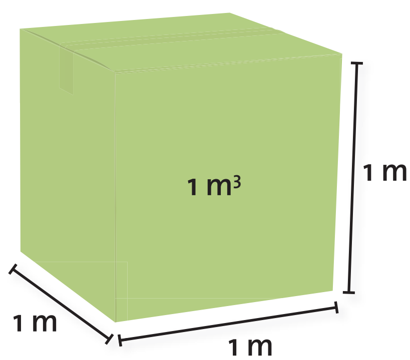
- ¿Te sirve usar la misma forma que utilizaste para determinar la cantidad de cubos?

El volumen de un cuerpo es la medida del espacio que ocupa. Para determinar su valor se utilizan unidades cúbicas.

Por ejemplo, si una figura está formada por seis cubos de 1 cm de lado; se puede decir que su volumen es de 6 cubos de 1 cm de lado y se simboliza así: 6 cm^3.

Se lee "***6 centímetros cúbicos***".

La unidad básica del volumen está representada por un cubo que tiene 1 m de lado; es decir: 1 m^3.

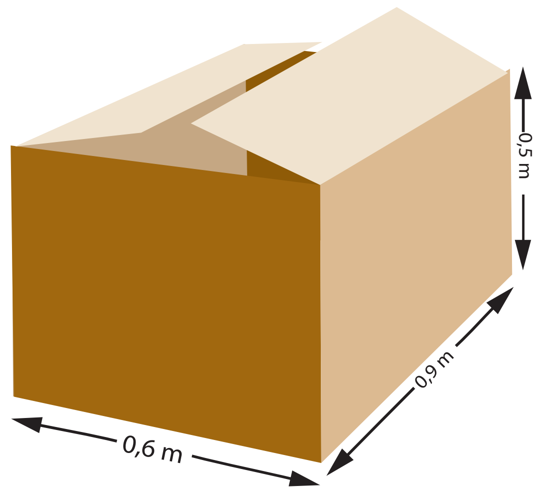


Representación de un metro cúbico.

- ¿Te acuerdas de don Juan? ¿Cuántos metros cúbicos ocupan las cajas en las que empaca su cosecha?

Para resolver este problema debemos recordar las dimensiones de las cajas: 90 cm de largo, 60 cm de ancho y 50 cm de alto.

Como las unidades de las medidas de las dimensiones de la caja están expresadas en centímetros y no en metros, las expresamos en metros así: 0,9 m de largo, 0,6 m de ancho y 0,5 m de largo.

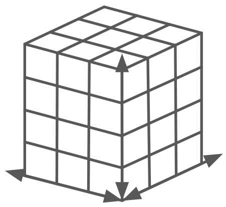


- Comprueba la equivalencia entre las medidas expresadas en centímetros y las expresadas en metros.

La forma que descubriste para calcular la cantidad de cubos que caben en la caja sin hacer dibujos puede ser parecida a la siguiente: contar la cantidad de cubos por cada uno de los lados y multiplicar sus valores.

Por ejemplo:

3 x 3 x 4 = 36



Todas las figuras trabajadas en esta guía tienen la forma de un prisma rectangular.

- Investiga qué características tienen estos cuerpos y socialízalas con tus compañeros.

El volumen de un prisma rectangular es el producto de las medidas de las tres dimensiones:

Volumen= largo x ancho x alto

V = l x a x h

El volumen de una de las cajas de don Juan es:

$V = 0{,}9\ m \times 0{,}6\ m \times 0{,}5\ m$

$V = 0{,}27\ m^3$

Otra forma de responder a la pregunta de don Juan, es realizar los cálculos en centímetros, lo que da 270.000 cm^3 y luego expresar la medida en metros cúbicos; es decir: 0,27 m^3.

- ¿Qué procedimiento emplearías para pasar de cm^3 a m^3?
- Socialízalo ante el curso y acuerden el procedimiento más adecuado para pasar de unidad cúbica a otra.

Múltiplos del metro cúbico

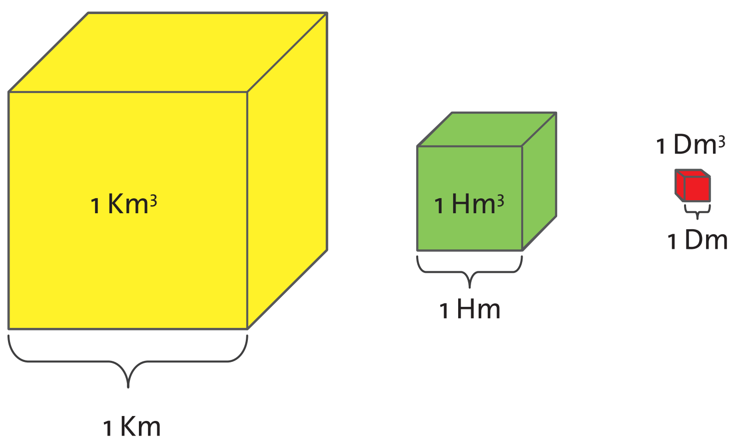
Como ya sabes, algunos de los múltiplos del metro como unidad básica de la longitud son el decámetro, el hectómetro y el kilómetro, cuyas equivalencias se presentan en la siguiente tabla:

Unidades de medida de la longitud. Múltiplos del metro

Unidades	Equivalencias
Decámetro (Dm)	10 metros equivalen a 1 decámetro
Hectómetro (Hm)	10 decámetros equivalen a 1 hectómetro 100 metros equivalen a 1 hectómetro.
Kilómetro (Km)	10 hectómetros equivalen a 1 kilómetro 100 decámetros equivalen a 1 kilómetro 1.000 metros equivalen a 1 kilómetro

Por lo tanto, los múltiplos del metro cúbico son cubos cuya longitud de lado es una unidad de los múltiplos del metro.

Expresemos los kilómetros, hectómetros y decámetros con sus respectivas equivalencias en metros y dibujemos los respectivos cubos.



Si calculamos en metros el volumen de un decámetro cúbico (Dm^3), tendremos: $V = 10\ m \times 10\ m \times 10\ m = 1000\ \mathbf{m^3}$. Es decir, **1 decámetro cúbico equivale a 1000 m^3**.

- ¿Cuál es el volumen del furgón que transportara la cosecha de don Juan, expresado en decámetros cúbicos?

Si expresamos las equivalencias de los múltiplos del metro cúbico, tendremos:

1 decámetro cúbico (1 Dm^3) 1.000 m^3	1 hectómetro cúbico (1 Hm^3) 1.000.000 m^3	1 kilómetro cúbico (1 Km^3) 1.000.000.000 m^3

Como puedes deducir, los múltiplos del metro son empleados para hacer referencia a unidades de volumen de mayor tamaño, es decir, si la cosecha de don Juan ocupará 3 Km^3 es más fácil hacer referencia a esta unidad y no a m^3 ya que sería el valor de 3.000.000.000, o sea "tres mil millones de metros cúbicos".

Como anotábamos, la unidad fundamental para el volumen es el metro cúbico, este corresponde a un cubo que tiene un metro de largo en cada arista.

- ¿Cuántos cm^3 tiene este cubo?
- ¿Para qué sería útil este dato?

De igual forma tenemos los submúltiplos del metro cúbico y ellos nos permiten hacer referencia a unidades de menor volumen. Entre ellos están el decímetro cúbico (dm^3), el cual equivale a 1.000 cm^3.

Para obtener estas equivalencias debes tener en cuenta que cada submúltiplo equivale a una parte del metro. Como un decímetro equivale a diez centímetros, un decímetro cúbico estará representado por un cubo cuya arista mide 10 cm y su volumen será:

$$V = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 1.000 \text{ cm}^3$$

- Emplea la misma estrategia para hallar los submúltiplos restantes. Verifica tus respuestas en la siguiente tabla.

Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico

Submúltiplos				Múltiplos		
mm^3	cm^3	dm^3	**m^3**	Dm^3	Hm^3	Km^3
1 mm^3	1.000 mm^3	1.000 cm^3	**1 m^3**	1.000 m^3	1.000.000 m^3 1.000 Dm^3	1.000.000.000 m^3 1.000.000 Dm^3 1.000 Hm^3

Trabajo en grupo

Realicen los cambios necesarios entre las unidades de medida del volumen para resolver la siguiente situación:

Para el empaque de ciertos productos, se emplean cajas de 2 dm^3, 20.200 cm^3 y 0,07 Dm^3.

- Expresa el volumen de cada una de las cajas en m^3.
- ¿Qué estrategia emplearon para transformar cada uno de los volúmenes anteriores en m^3?
- ¿Cuál de ellas es la de mayor volumen?
- Comparen sus procedimientos con los de otros grupos.
- Acuerden con todo el curso el procedimiento más adecuado.
- Apliquen el procedimiento establecido por el curso para expresar medidas de unidades de volumen en cm^3.

Para buscar medidas equivalentes entre medidas de volumen debemos tener en cuenta las siguientes reglas:

a. Si es una unidad superior a una menor se multiplica por mil tantas veces como lugares existan para llegar a la unidad solicitada.

Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
x → 1.000 →	x → 1.000 →	x → 1.000 →	x → 1.000 →	x → 1.000 →	x → 1.000 →	x → 1.000

b. Si es una unidad inferior a una mayor se divide por mil tantas veces como lugares existan para llegar a la unida solicitada.

Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
← ÷ 1.000	← ÷ 1.000	← ÷ 1.000	← ÷ 1.000	← ÷ 1.000	← ÷ 1.000	← ÷ 1.000

Por ejemplo:

Para buscar la medida equivalente de 3 Dm^3 en dm^3, como hay dos lugares que los separan, se debe multiplicar por 1.000 x 1.000; es decir, dos veces se repite el mil, que es lo mismo que expresar 1.000^2 en términos de potenciación.

$3\ Dm^3 \times 1.000 = 3.000\ m^3$ y $3.000\ m^3 \times 1.000 = 3.000.000\ dm^3$

También se puede escribir:

$3\ Dm^3 \times 1.000^2 = 3.000.000\ dm^3$

Para buscar la medida equivalente de 59 mm^3, expresada en m^3 se cuentan los lugares que las separan; como hay tres lugares, se debe dividir por 1.000 tres veces, que expresado en términos de potenciación es 1.000^3.

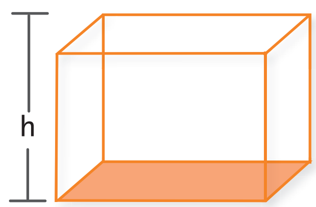
$59\ mm^3 \div 1.000 = 0,059\ cm^3$

$0,059\ cm^3 \div 1.000 = 0,000059\ dm^3$ y

$0,000059\ dm^3 \div 1.000 = 0,000000059\ m^3$

También se puede escribir:

$59\ mm^3 \div 1.000^3 = 0,000000059\ m^3$



Completa la siguiente tabla con las respectivas equivalencias y descripción del procedimiento realizado para llegar al resultado:

Equivalencias en decímetros cúbicos

	Equivalencia en dm^3	Procedimiento realizado para llegar al resultado
10 km^3		
3 mm^3		
5 Dm^3		
8 Hm^3		

Ejercitemos lo aprendido

Además de utilizar las que tiene, don Juan decide emplear otro tipo de cajas para empacar su cosecha. Las nuevas cajas que diseña don Juan son:

- Una caja de color rojo de 7 dm de largo, 8 dm de ancho y 10 dm de alto.
- Una caja de color azul de 60 cm de largo, 40 cm de ancho y 10 cm de alto.

1. Determina el volumen de cada una de las cajas en unidades de milímetros cúbicos y metros cúbicos.
2. ¿Cuál caja tiene mayor volumen?
3. Reúnete con otros cuatro compañeros y construyan con papel tres cubos: uno de 1 cm^3, otro de1 dm^3 y otro de 1 m^3 de volumen. Resuelve las siguientes preguntas:
   » ¿Cuántos cubos de 1 cm^3 caben en 1 dm^3?
   » ¿Cuántos cubos de 1 dm^3 caben en 1 m^3?
   » ¿Cuántos cubos de 1 cm^3 caben en 1 m^3?
4. Revisen la información del recibo del agua de cada una de sus casas, organicen los recibos desde el que consume más al que consume menos agua. ¿Cómo se mide el consumo de agua?
5. Discutan con sus compañeros si es posible construir dentro del salón un cubo de un Hm^3 de volumen.
6. Don Juan apila en su bodega tres cajas de color rojo y dos de color azul. ¿Qué volumen ocupan las cinco cajas?
7. Describan la estrategia que emplearon para hallar el volumen total.
8. Don Juan afirma que tiene un objeto cuyo volumen es de 125.000 mm^3 en su bolsillo. ¿Es eso posible?

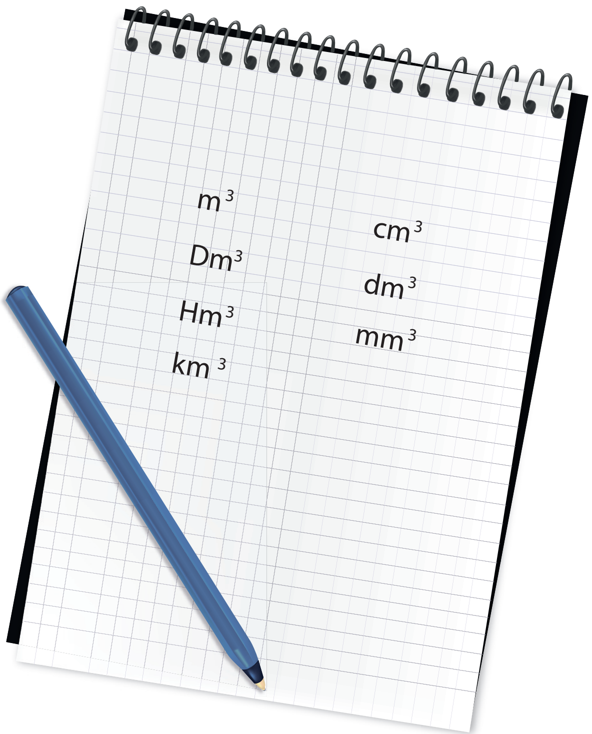
9. Calculen la suma de las siguientes medidas: 0,00035 Km^3 + 2,37 m^3 + 45.000.000 mm^3 + 0,000007 Hm^3 y expresen el resultado en cm^3.

10. Completen la tabla escribiendo la medida en las otras unidades escritas en cada columna:

Equivalencia de unidades

	mm^3	cm^3	dm^3	m^3	Dm^3	Hm^3	Km^3
5 m^3							
123.659 cm^3							
3,5 Dm^3							
0,0000000123 Hm^3							
450.000.000 mm^3							
0,00000000008 Km^3							

- Una unidad de medida muy empleada en casa y no convencional es la *pizca*. ¿A cuántos m^3 crees que equivale? ¿Crees que este tipo de unidad tendrá oportunidad de internacionalizarse? Explica tu respuesta.



Guía 16

Una nueva magnitud: La capacidad

Estándares

Pensamiento espacial

- Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.

Pensamiento numérico

- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en medidas.

Lo que sabemos

Diariamente podemos encontrar diferentes recipientes graduados con unidades de medida que nos ayudan a identificar la capacidad que tienen. No obstante, algunos de ellos se encuentran en litros, otros en mililitros, incluso algunos en cm^3, lo que nos da una idea de las diferentes unidades de medida que podemos encontrar para determinar la capacidad. Sin embargo, hablar de capacidad y de volumen no es lo mismo; y su diferencia, aunque sutil es de vital importancia para resolver problemas.

Don José, en sus años mozos, se dedicó con gran esmero al comercio de lácteos. Recuerda que en esos tiempos su vaca preferida, Josefina, sacaba 22 litros diarios en los dos ordeños. ¡Casi llenaba la cantina de 25 litros! contaba con entusiasmo a sus amigos. Don José tenía por costumbre preparar con cinco litros de leche una cuajada y estimaba que era un buen negocio, ya que vendía 25 cuajadas de lunes a viernes. Además, le alcanzaba para dejar dos litros de leche diariamente en casa. ¡Ah tiempos aquellos! Exclama don José, ya el ordeño no es como antes, ahora son máquinas y estas son capaces de ordeñar 64 vacas en una mañana.

Contesta las siguientes preguntas:

1. Cuando se trata de líquidos como la leche, la gaseosa o el agua, ¿qué unidad de medida encuentras en los recipientes o empaques de estos productos?

2. ¿Podrías medir la cantidad de líquido en un recipiente por medio de una regla?

3. ¿Cómo podrías determinar la cantidad de leche que contiene una cantina?

4. Uno de los empaques más utilizados para el trasporte de la leche es la bolsa plástica, ¿cuál es la ventaja que ofrece este tipo de empaque con respecto a otros posibles?

Don José es algo exagerado en sus relatos, y parece ser que no tuvo en cuenta ciertas proporciones. ¿Cuál o cuáles son las medidas en las que exageró don José?

Aprendamos algo nuevo

Trabajo en grupo

Con tres compañeros realiza cuidadosamente el siguiente experimento:

Paso 1: Construyan una caja sin tapa que tenga un volumen de 1 dm^3.

Paso 2: Consigan un recipiente (botella o jarra) que tenga la capacidad de un litro.

Paso 3: Con mucho cuidado, llenen la jarra o la botella con arena o harina de trigo.

Paso 4: Vacíen la arena de la botella dentro de la caja que tiene de volumen 1 dm^3.

Paso 5: Escriban una conclusión que relacione el volumen de la caja con el litro de arena o harina de trigo que se le vierte.

Cabe aclarar que el volumen y la capacidad se encuentran estrechamente relacionadas aunque se refieren a cosas diferentes.

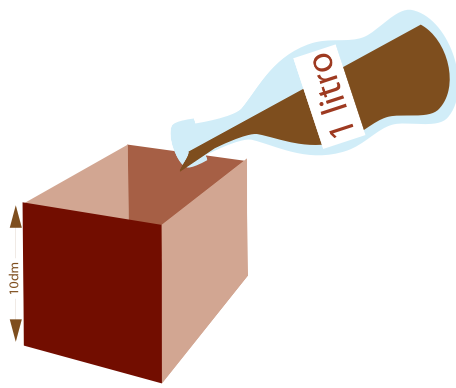
El **volumen** es el espacio ocupado por un cuerpo y se mide en unidades cúbicas, mientras que la **capacidad** es la posibilidad que tiene un objeto de contener en su interior otras cosas.

En nuestro pequeño experimento, encontramos que la arena contenida en la botella es aproximadamente igual a la que cabe en el cubo de un decímetro de lado y que el cubo tiene un volumen de 1 dm^3 pero su capacidad es un poquito menor al decímetro cúbico.

En los resultados del experimento influyó que se hubiera utilizado arena, un sólido; y no un líquido, cuyas propiedades físicas son bastante diferentes. En matemáticas estudiamos lo que se relaciona con la capacidad que los recipientes tienen para contener líquidos.

¿Cuál es el volumen aproximado que tiene un recipiente de forma prisma rectangular, si sus dimensiones son: 4, 3 y 12 cm, respectivamente?

La unidad básica para la **capacidad** es el **litro** (l) y corresponde a la capacidad de un recipiente cuyo **volumen** es igual a **1 dm^3**.



De acuerdo con la información anterior:

- ¿Cuántos litros caben en una caja cuyo volumen es de1 m^3?
- Si la cantina de don José tiene una capacidad de 25 litros, ¿cuál es su equivalencia en dm^3?
- Don José afirma que en una mañana hoy en día se pueden ordeñar 64 vacas. Si el promedio de leche producida por una vaca es de 20 litros diarios.
  - » ¿Cuántas cantinas de 25 litros de capacidad son necesarias para almacenar la leche de las 64 vacas?
  - » Si se decide empacar la leche del ordeño de un día, en cajas a las que le caben 1 litro, ¿cuál es el volumen que ocuparía el total de cajas que necesitan?
  - » Compartan sus procedimientos con los compañeros del curso y seleccionen el más adecuado y más sencillo para la situación.

Múltiplos y submúltiplos del litro (l)

De forma similar a las unidades de volumen, también tenemos unidades de medida para la capacidad. Anteriormente encontrábamos que las unidades de volumen de una unidad a otra consecutiva tenían una equivalencia: 1.000 veces la anterior.

En este caso, las unidades de capacidad mantienen una equivalencia: cada unidad es 10 veces menor que su unidad inmediata superior, como lo puedes ver en la siguiente tabla:

Múltiplos y submúltiplos del litro

Submúltiplos del litro (l)				Múltiplos del litro (l)		
1mililitro (ml)	decilitro (dl)	centilitro (cl)	litro (l)	Decalitro (Dl)	Hectolitro (Hl)	Kilolitro (Kl)
1 ml	10 ml	100 ml	1 l	10 l	100 l	1.000 l

1. Encuentra las equivalencias que existen entre unas unidades a otras.

   - 1 litro equivale a ____ centilitros.
   - 1 litro equivale a ____ mililitros.
   - 1 Kilolitro equivale a ____ decalitros.
   - 1 Kilolitro equivale a ____ litros.

2. Contesta las siguientes preguntas:

   - ¿Cuántos decalitros de leche tiene la cantina de don José?
   - Para que el relato de don José sea verdadero, ¿cuántos centilitros diarios de leche debe producir la vaca Josefina?
   - ¿Cuántos hectolitros de leche produciría a la semana la vaca Josefina?
   - ¿Cuántos mililitros de leche son necesarios para preparar una cuajada?

En ocasiones, debemos buscar equivalencias entre unidades de medida, estudia el siguiente procedimiento:

Por ejemplo:

- Para saber a cuántos centilitros equivalen 7 litros realizamos:

  7 l x 10 = 70 dl, con lo cual hemos transformado la unidad de medida de litros a decilitros.

  Luego, 70 dl x 10 = 700 cl

  Si deseamos pasar de una unidad mayor a otra menor, debemos multiplicar sucesivamente por 10 hasta llegar a la unidad deseada.

  No obstante esta operación la podemos resumir en $7\ l \times 10^2 = 700\ cl$ ya que se cambia dos unidades menores, entonces se multiplica por 10 dos veces, es decir, por 10^2.

Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml
x10 →	x 10 →	x 10 →	x10 →	x 10 →	x10 →	x 10 →

- Para saber a cuántos Kilolitros equivalen 7 litros realizamos:

$$\frac{7l}{10} = 0{,}7\,Dl \text{ , Esto resulta de: } \begin{array}{r|l} 70 & 10 \\ \hline 0 & 0{,}7 \end{array}$$

En esta división, como 10 es mayor que 7, podemos decir que 10 se encuentra 0 veces en 7, por lo cual ponemos el número 0 en el cociente seguido de una coma y también agregamos un 0 al dividendo para continuar la operación, como el numero 10 se encuentra 7 veces en 70, ponemos el 7 en el cociente, obteniendo como resultado 0,7.

$$\text{Luego, } \frac{0{,}7\,Dl}{10} = 0{,}07Hl \qquad \begin{array}{r|l} 0{,}7 & 10 \\ \hline 70 & 0{,}07 \\ 0 & \end{array}$$

En este caso, al bajar la cifra decimal, se pone una coma en el cociente y se sigue la división como si se tratara de números naturales.

$$\text{Y finalmente } \frac{0{,}07\,Dl}{10} = 0{,}007\,Kl$$

Una forma fácil de realizar divisiones con decimales cuando se divide un número por la unidad seguida de ceros, es correr la coma hacia la izquierda el número de puestos equivalentes a la cantidad de ceros que acompañan la unidad.

Si deseamos pasar de una unidad menor a otra mayor debemos dividir sucesivamente por 10 hasta llegar a la unidad deseada.

Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
÷ 10	÷ 10	÷ 10	÷ 10	÷ 10	÷ 10	÷ 10

Observa los procedimientos anteriores y encuentra una estrategia que te permita transformar las unidades de capacidad entre sí sin emplear la multiplicación o la división sucesiva por 10; sino que dependa de la ubicación de las cifras de los números que acompañan a la unidad de medida dada.

Ejercitemos lo aprendido

Trabajo en grupo

Formen grupos de cuatro personas y contesten:

1. Para elaborar un postre se necesitan 25 ml de vainilla. ¿A cuántos decalitros equivale?

2. En la tabla se encuentra las unidades equivalentes de la medida 4.850 ml. Encuentren las medidas que están erróneas y justifiquen sus respuestas.

ml	cl	dl	l	Dl	Hl	Kl
4850	485	48,5	4,85	0,485	0,00485	0,000485

3. Si en una cantina de don José hay 25 litros de leche y se retiran 15 litros con 8 decilitros y 7 mililitros, ¿cuántos litros de leche quedan en la cantina?

4. ¿Cuántas vacas como Josefina, necesita mínimo don José para tener una producción de leche que le permita llenar por completo un número determinado de cantinas de 25 litros?

5. Imaginen que don José vende 22 litros de leche y emplea para extraer de la cantina recipientes metálicos cuya capacidad es de 2 l y 3 l, respectivamente. Si los recipientes no tienen marcas que determinen los litros, ¿es posible que don José pueda extraer exactamente un litro de leche para la venta? ¿Cuál sería el procedimiento que utilizaría don José para vender los 22 litros?

6. ¿Cuántos vasos llenos de leche se pueden sacar de la cantina, si se sabe que un vaso tiene una capacidad de 25 centilitros?

7. Indiquen cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

   a. Para encontrar unidades de capacidad equivalentes, de una unidad mayor a una menor se debe multiplicar por 10 tantos lugares como indica la unidad menor.

   b. Para pasar de 1 dl a Dl se debe dividir por 100.

   c. Para convertir de 1 ml a l se debe dividir por 1.000

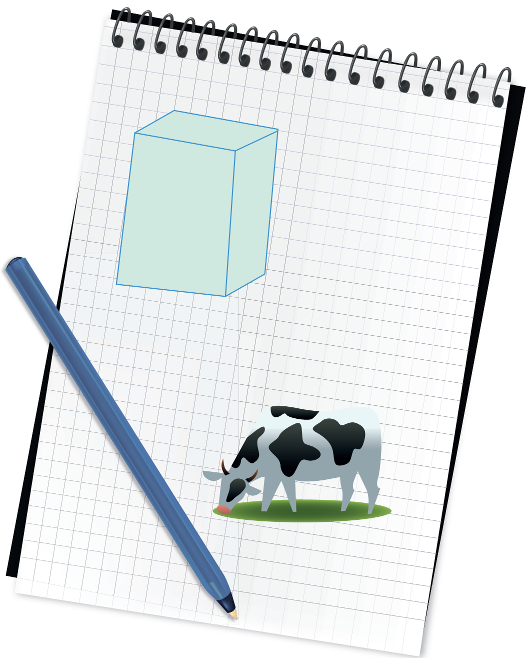
d. Si un prisma rectangular tiene 26 cm de largo, 30 cm de ancho y 10 cm de alto al prisma le caben 7.800 l.

e. La capacidad de un recipiente se define como el espacio que ocupa el cuerpo.

8. ¿Cuántos Hl tiene de capacidad una piscina, si se sabe que es llenada con 1.000.000 l de agua?

9. Don José cuenta que en cierta ocasión, las condiciones climáticas afectaron la producción de 22 l de leche de Josefina, ya que esta dejo de producir 10 l diarios de leche. ¿Cuánto días tendría que ordeñar a Josefina para llenar dos cantinas?

10. Se tienen tres recipientes con las siguientes características: uno de ellos con capacidad de 2.000 ml, otro con capacidad de 0,03 Hl, y el tercero con capacidad de 250 cl. Ordénalos por su capacidad de mayor a menor.



Guía 17

Equivalencias entre medidas de volumen y de capacidad

Estándar

Pensamiento métrico

- Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
- Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación

Pensamiento numérico

- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en diferentes contextos y dominios numéricos.

Diversas son las aplicaciones en las que podemos encontrar los conceptos de volumen y capacidad involucrados. Por ejemplo, la medicina hace uso de este recurso en forma frecuente; si revisas detenidamente, observarás que las fórmulas médicas expresan sus dosis con unidades de medida que corresponden a estos conceptos. Sin embargo, en el pasado era muy común que las recetas fueran acompañadas por la instrucción de cucharadita y cucharada. ¿Por qué crees que debió cambiar la forma de expresar las dosis en las recetas?

Lo que sabemos

En ciertas ocasiones el veterinario ordenó suministrar algunos medicamentos a Josefina. Entre ellos estaba una sustancia para aplicar en dosis de 700 ml. Para medir esta cantidad, don José disponía de una jeringa de 10 cm^3.

- ¿Cuántos mililitros hay en un centímetro cubico? ¿Cuántas jeringas se deben llenar para determinar los 700 ml? Diseña una estrategia de solución para el problema de suministrar el medicamento a Josefina.
- Compara tu procedimiento con los de tus compañeros de curso.
- Si el medicamento se debía suministrar a Josefina durante 15 días, y cada frasco del medicamento contenía 35 cl de la sustancia, ¿cuántos frascos debía comprar don José para cubrir todo el tratamiento?
- El vecino de don José le dice que es más rápido dar la dosis utilizando una cuchara sopera ya que cada cucharada tiene 100 ml. ¿Es correcta la información del vecino?

Aprendamos algo nuevo

Como puedes ver, para resolver el problema anterior es necesario buscar una correspondencia entre las unidades de capacidad y las unidades de volumen.

Ya sabemos que:

1 dm^3 equivale a un litro.

Una forma es determinar la equivalencia entre los litros y los decímetros cúbicos. Luego, a partir de estas medidas, se obtienen las demás equivalencias.

Por ejemplo: si un dm^3 equivale a 1 l y un 1 Dl equivalen a 10 litros, entonces10 decímetros cúbicos son 1 Dl.

$dm^3 \longrightarrow$ 1 litro

Como:

1 Dl $\longrightarrow$ 10 litros luego 10 dm^3 =1 Dl

De igual forma, como un dm^3 equivale a 1 l, 1 Dl equivale a 10 litros y un Hl son 10 Dl, entonces 1Hl es equivalente a 100 litros; por lo tanto, 1 Hl son 100 dm^3.

Observa la siguiente tabla:

Equivalencia de litros en metros cúbicos

Unidades de litros	Equivalencia en m^3
1 Kl	1.000 dm^3 = 1m^3
1 Hl	100 dm^3
1 Dl	10 dm^3
1 Litro (l)	1 dm^3
1 dl	100 cm^3
1 cl	10 cm^3
1 ml	1 cm^3

- Reúnete con tres compañeros más y expliquen las equivalencias que aparecen en la tabla.

- Según las equivalencias establecidas, ¿cuántos cm^3 son 700 ml de la sustancia que debe suministrar don José a Josefina? ¿Cuántas jeringas debe llenar para dar la dosis? Si compra jeringas de 50 cm^3, ¿cuántas debe llenar? ¿En cuántas veces se reduce la cantidad de jeringas que debe llenar de 50 cm^3 comparadas con las de 10 cm^3?

- Para no olvidar cómo calcular la dosis que debe suministrar, don José escribe en su cantina: "25 l equivale a tantos ? cm^3".¿Cuál es el valor numérico del interrogante que debió escribir don José?

En el problema anterior, un compañero realiza el siguiente procedimiento: Para determinar el resultado basta con saber que 25 l equivale a 25 dm^3, luego, como debemos transformar una medida de volumen y esta es una unidad mayor a una menor, debemos multiplicar por mil.

Esto es: $25 \times 1000\ cm^3 = 25.000\ cm^3$

¿Qué piensas del procedimiento? ¿Es correcto o incorrecto?

Ejercitemos lo aprendido

1. En cierta ocasión, el veterinario le da tres sustancias a Josefina. De la sustancia A debe consumir 250 ml, de la B, 30 cm^3 y de la C, 0,038 dm^3.

    - ¿Cuántos mililitros en total está consumiendo Josefina?

    - ¿Cuántos centímetros cúbicos?

2. Un tanque empleado para el almacenamiento de leche tiene una capacidad de 400 litros.

    - ¿Cuál es su volumen en m^3?

    - Si una vaca en promedio es capaz de producir 2 Dl de leche en sus dos ordeños, ¿cuántas veces debe ordeñarse una vaca para llenar el tanque?

- Para tener un control sobre la calidad de la leche se extrae del tanque una muestra de 500 cm^3. ¿Qué cantidad de leche queda en el tanque?

- Cierto día de la semana se emplearon 500 cm^3 para la muestra, 2 Hl para la preparación de quesos y 6 Dl para la preparación de cuajadas. Si el tanque se encontraba lleno de leche, ¿cuántos litros de leche quedaron disponibles?

3. Completa la siguiente tabla, estableciendo la equivalencia correspondiente entre unidades de volumen y capacidad.

Producto	Tipo de envase	Valor de la capacidad	Unidad de capacidad	Valor de volumen	Unidad de volumen
Gaseosa	Lata	1 l			
Jugo	Caja			500 cm^3	
Aceite	Botella			750 cm^3	
Pintura	Lata	2,5l			

4. En el hato donde trabajó don José se realizó un seguimiento durante tres meses a cuatro vacas de diferente raza, para conocer su comportamiento en la producción de leche. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Producción de leche

Razas de las vacas	Enero	Febrero	Marzo	Total en litros
Holstein	630 l	6.000 dl	54 Hl	
Jersey	4.500 dl	4,5 Hl	480.000 cm^3	
Gyr	690 dm^3	600.000 cm^3	585 l	
Pardo	0,57 Kl	480.000 ml	48.000 cl	

- Completa la tabla. No olvides expresar el resultado en litros.

- ¿Cuál es la raza con mayor producción de leche?

- ¿Qué razas produjeron en diferente mes igual cantidad de leche?

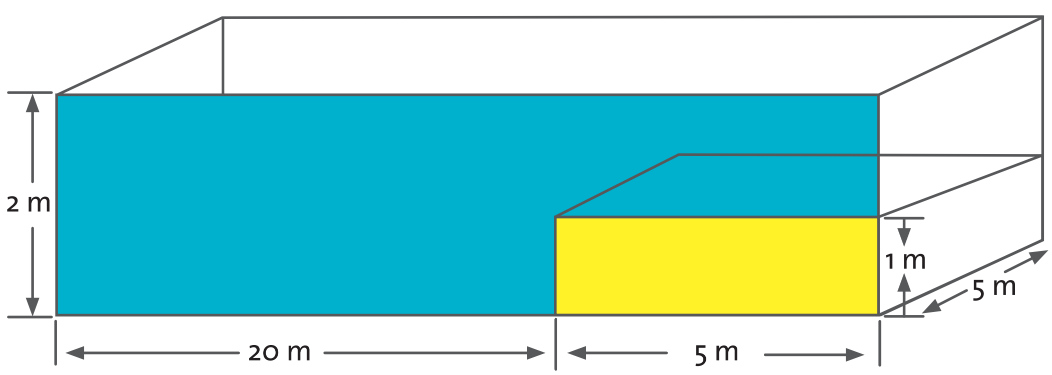
- ¿Qué raza y en qué mes produjo menos leche?

- Si a cada vaca, se le debe suministrar un medicamento en dos dosis diarias de 400 ml, ¿cuántos cm^3 se suministran diariamente?
- Si la producción total se mantiene, y se desean comprar cantinas de capacidad de 25 l, 50 l, 100 l y 200 l, ¿cuántas se deben comprar intentando tener el menor número de cantinas de cada capacidad?
- Si se desea construir un tanque para el almacenamiento del total de la leche, ¿qué capacidad en m^3 debe tener y cuáles pueden ser sus dimensiones si es de forma de prisma rectangular?
- Si la cuarta parte de la producción de leche se vende para producir cuajadas, ¿cuántas cantinas y de qué capacidad se necesitan para transportar la leche de la venta?

Apliquemos lo aprendido

1. Se desea construir una piscina cuyas dimensiones serían 25 m de largo, 10 m de ancho y 2 m de profundidad.

- Construye el plano de la piscina.
- ¿Qué volumen, en metros cúbicos, tiene la piscina?
- ¿Cuál es su capacidad en litros y en decímetros cúbicos?
- Con la finalidad de hacer un poco más segura la piscina y que pueda ser utilizada por niños, se construyó en el fondo una repisa de forma de prisma rectangular como el que se muestra en la figura. ¿Cuál es la nueva capacidad en litros que tiene la piscina?



2. Para la venta de postres caseros se quieren elaborar empaques de forma de prisma rectangular de varios diseños que tengan el mismo volumen.

   a. Si uno de los diseños mide 200 mm de ancho, 5 cm de largo y 0,07 m de alto, ¿cuál es el volumen del empaque?

   b. Si otro diseño tiene 3,5 cm de alto, 100 mm de largo ¿cuál es la dimensión de su ancho?

   c. Si un empaque tiene 0,05 m de alto, ¿cuáles podrían ser las dimensiones de su largo y de su ancho?

   d. Escribe las medidas de por lo menos tres posibles empaques para los postres, que tengan el doble de volumen del primer empaque.

3. Si un recipiente tiene una capacidad de 8.000 ml y en él se almacena la leche destinada para producir una cuajada, ¿qué capacidad queda disponible en el recipiente?

4. Don José decide distribuir los 22 litros de leche que produce Josefina en seis recipientes de 500 ml, 8 recipientes de 300 cl, y un recipiente de 0,08 Hl. Si la leche restante la deposita en la cantina de 25 litros, ¿qué capacidad queda disponible en la cantina? ¿Cuál de los recipientes anteriores tiene menor capacidad?

5. Completa la siguiente tabla de equivalencias.

Equivalencia de unidades de medida

Unidad en l	Equivalencia en ml	Equivalencia en cl	Equivalencia en dl
1 l			
	200 ml		
		500 cl	
			30 dl

6. Para la preparación de un postre se requiere medio litro de leche, dos tazas de agua salada, 20 cucharadas soperas de jugo de limón y una copa de vino seco. Esta mezcla se debe agitar y servir en copitas de 60 ml.

- ¿Cuántas copitas se necesitan para servir toda la mezcla?

- Si decides servir el postre en recipientes de 0,5 dl, ¿cuántos recipientes son necesarios?

- Si toda la mezcla se deposita en un recipiente de 2 litros, ¿qué capacidad queda disponible en el recipiente si se coloca toda la mezcla?

- ¿Cuál es el ingrediente de menor volumen en la mezcla? ¿Es el mismo ingrediente cuando se establece por capacidad? Justifica tu respuesta.

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

Selecciona la opción correcta en cada pregunta.

Información para contestar preguntas 1 y 2

Un hato distribuye su producción de leche a varias poblaciones cercanas como se muestra en la tabla:

Producción de leche

Población	Cantidad de leche
A	150.000 cl
B	1,35 Kl
C	195 Dm^3
D	11.500 dm^3

1. ¿Cuál es la población que se abastece de mayor cantidad de leche?

   a. La población C

   b. La población D

   c. La población B

   d. La población A

2. La mejor estrategia para comparar el consumo de leche de cada población es:

    a. Observar en la tabla cuál población tiene el número mayor en la cantidad de leche.

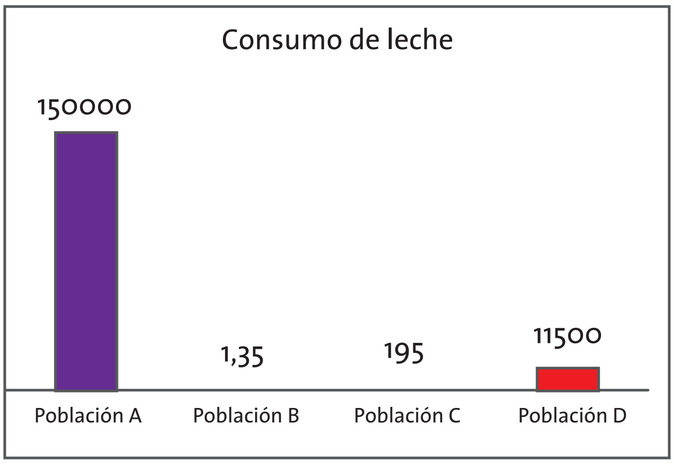
    b. Observar en la tabla cuál población tiene la mayor unidad de medida.

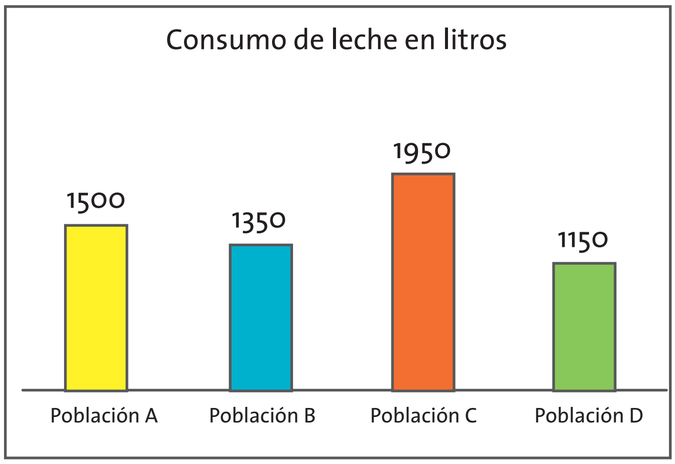
    c. Convertir a m^3 cada uno de los datos para luego compararlos.

    d. Convertir cada uno de los datos en litros para luego compararlos.

Información para contestar preguntas 3 y 4

Las siguientes graficas se diseñaron para representar el consumo de leche en las poblaciones A, B, C y D.





3. De acuerdo a las gráficas es correcto afirmar que :

    a. Solo la gráfica 1 es correcta, pues muestra los verdaderos valores de consumo presentados en la tabla.

    b. Ninguna de las gráficas es acertada ya que la gráfica 1 no muestra las barras de las poblaciones B y C.

    c. La gráfica 2 es correcta pues los valores se encuentran expresados en litros.

    d. La gráfica 2 representa mejor la información ya que al tener expresados los valores en una misma unidad de medida los podemos comparar.

4. De la información representada en las gráficas podemos afirmar:

   a. La población A es la mayor consumidora de leche.

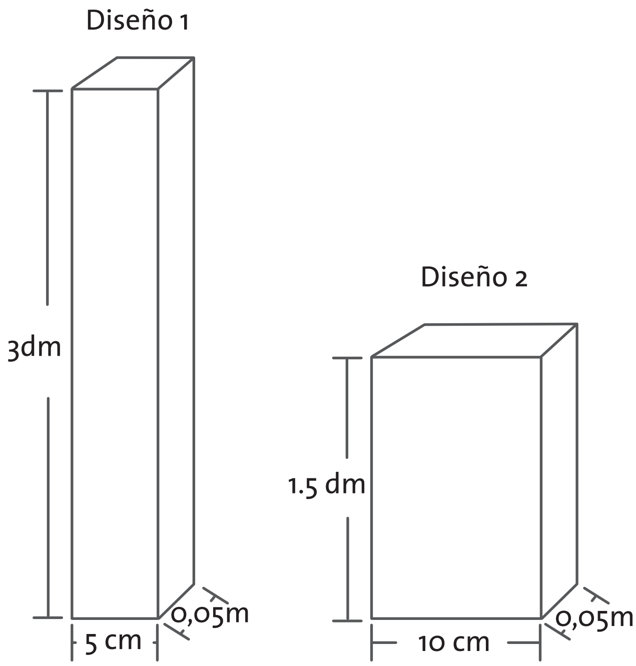
   b. Las poblaciones A y B consumen más leche que las poblaciones C y D.

   c. Las poblaciones C y D consumen más leche que las poblaciones A y B.

   d. Si la población D consume 800 dl más, su consumo será igual al de la población C.

Información para contestar pregunta 5

Para el transporte y comercializacion de la leche se diseñaron estos dos tipos de cajas:



5. De acuerdo a los diseños es correcto afirmar que:

   a. El diseño 1 tiene mayor volumen que el diseño 2.

   b. El diseño 2 es más conveniente para comercializar pues el consumidor puede manipular mejor la caja ya que su base es cuadrada.

   c. Los dos diseños tienen el mismo volumen.

   d. El diseño 1 es más facil de trasportar pues ocupa menos espacio que el diseño 2.

- De todas las actividades anteriores, ¿cuál fue la que más se te facilitó? ¿Por qué?
- ¿Cuál fue la actividad que más te gustó? ¿Por qué?
- ¿La actividad que más se te facilitó corresponde a la que más te gustó? Argumenta tu respuesta.
- Entre las actividades grupales y las individuales, ¿cuáles te gustan más? Explica tu respuesta.
- ¿Qué actividad se te dificultó más?
- ¿En qué destreza crees que debes trabajar más para poder realizar esta actividad más fácilmente? Argumenta tu respuesta.

¿Cómo me ven los demás?

1. Forma un grupo de tres personas, cada uno de los integrantes debe seleccionar un problema de los presentados en el módulo que le haya llamado la atención y consignarlo en la tabla que se presenta a continuación.

Problema	Datos importantes del problema	Procedimiento de solución

- Cada integrante debe exponer lo consignado en la tabla a los compañeros de curso.

2. Redacta con tu grupo tres problemas similares a los seleccionados cambiando datos, lugares y personajes. Compártelos con los otros grupos del curso.

3. Solucionen los problemas que les entregaron y compartan los procedimientos de solución al grupo que les dio los problemas.

4. Reciban la solución de los problemas que compartiste y observa si utilizaron los mismos procedimientos de solución de alguno de los integrantes del grupo.

De acuerdo con el trabajo realizado en grupo:

- ¿Cuál fue el problema más difícil de solucionar y por qué?
- ¿En el desarrollo de los problemas obtuvieron respuestas diferentes?, ¿Cuáles? ¿Por qué?
- ¿Qué tipos de estrategias presentaron los otros grupos para resolver los problemas planteados?
- ¿Crees que el trabajo en grupo facilita tu aprendizaje?
- ¿Qué crees que te aportó el haber realizado esta actividad en grupo?

¿Qué aprendí?

Responde según la manera en la que te desenvolviste en el desarrollo del módulo. Justifica tus respuestas.

	Sí	A veces	No	Justificación
Reconozco las características, relación y utilidad de magnitudes como el volumen y la capacidad, para el desarrollo de situaciones cotidianas.				
Utilizo diferentes estrategias para medir la capacidad y el volumen en diversas situaciones que se presentan en la vida diaria.				
Realizo esquemas como dibujos, o diagramas que me permiten solucionar un problema.				
Identifico equivalencias entre unidades de medida de volumen y capacidad y las aplico a la resolución del problema propuesto.				
Estimo si la respuesta que encuentro es coherente con el problema.				
Cuando no puedo solucionar el problema intento nuevamente hasta lograrlo.				
Verifico la información que se me da la guía.				
Participo en los debates que se puedan formar alrededor de la temática.				
Realizo mis tareas responsablemente tanto en los trabajos individuales como grupales.				

Con tu maestro, determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento.

Módulo 5

La magia del movimiento

¿Qué vas a aprender?

Existen transformaciones que se aplican en la mayoría de acciones que se realizan con objetos como moverlos o rotarlos en una dirección determinada de manera que cambie su posición. Estas transformaciones de posición pueden representarse matemáticamente en el plano o en el espacio. Existen otras que alteran el tamaño de las figuras pero que mantienen algunas característica. En este módulo te presentamos algunos ejemplos.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento espacial

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

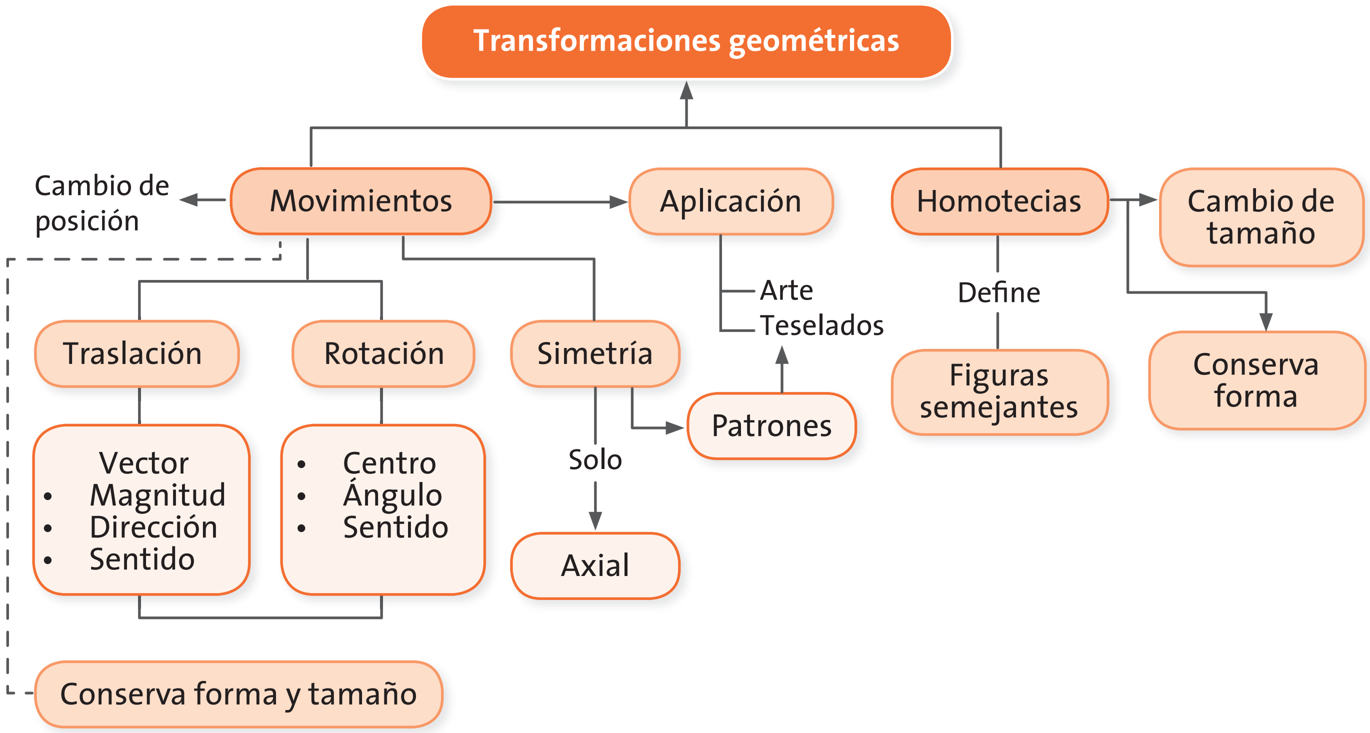
Pensamiento métrico

- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.

La realización de las actividades propuestas en las guías que conforman este módulo te permitirá alcanzar estándares básicos de competencias que privilegian el desarrollo de los pensamientos espacial y métrico, a través de los conceptos asociados a la noción de movimiento en el plano y su representación. En la tabla se muestran los conceptos que aprenderás.

Guías	Conceptos	Procesos
Guía 18. Desplazamientos y rotaciones	**Posición Traslaciones y rotaciones en el plano**	Se favorecen especialmente los siguientes procesos: • El **razonamiento:** Constantemente se invita al estudiante a predecir las consecuencias de aplicar algunas transformaciones sobre objetos geométricos y a indagar sobre la validez de los procedimientos propuestos. • La **modelación:** Mediante el estudio de transformaciones sobre figuras geométricas, las cuales pueden representar objetos reales. • La **comunicación:** El estudiante se familiariza con algunas notaciones propias de la geometría.
Guía 19. Algunas aplicaciones de las transformaciones	**Simetría**	
Guía 20. Homotecias y semejanzas	**Tamaño** **Homotecia de figuras**	

El siguiente esquema te muestra la manera en que se pueden relacionar los conceptos.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Una transformación geométrica permite que una figura se modifique en otra que tiene la misma forma pero diferente posición y en algunos casos, también diferente tamaño.

Ayudan a comprender diferentes situaciones de la cotidianidad como por ejemplo los movimientos que realiza la Tierra, el funcionamiento de los engranajes de las máquinas, el reflejo de nuestra imagen en el espejo y el comportamiento de los modelos que se utilizan en la elaboración de obras artesanales.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

En el desarrollo del módulo se proponen diferentes momentos en los que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evidenciar y analizar los progresos que tuviste en cuanto al aprendizaje de los conceptos relacionados con los diferentes movimientos o transformaciones en el plano.

Dentro cada una de las guías encontrarás la sección *ejercito lo aprendido*, en la cual podrás probarte y ganar destreza en el desarrollo de los procedimientos.

Además encontrarás dos secciones al final del módulo: *Aplico lo aprendido* y *Evaluación*, en las que se proponen diferentes actividades, problemas y situaciones que te invitarán a poner en práctica tus conocimientos, así como a realizar trabajos, que te ayudarán a evaluar tu desempeño individual y en grupo, en cuanto a la aplicación de algunas transformaciones geométricas.

Explora tus conocimientos

Observa la fotografía y responde.

Trabajo de un tractor

- ¿Qué elementos geométricos identificas en ella?
- ¿Cómo representarías el movimiento que realiza el tractor?
- Fíjate en los surcos que deja el tractor sobre el terreno. ¿Con qué elemento geométrico se pueden asociar?
- ¿Qué movimiento debería realizar el tractor para que en el suelo queden hendiduras similares a una circunferencia?
- Si el fotógrafo permanece siempre en el mismo punto y el tractor modifica su dirección, ¿qué cambiaría en la foto?

Guía 18

Desplazamientos y rotaciones

Estándares:

Pensamiento espacial

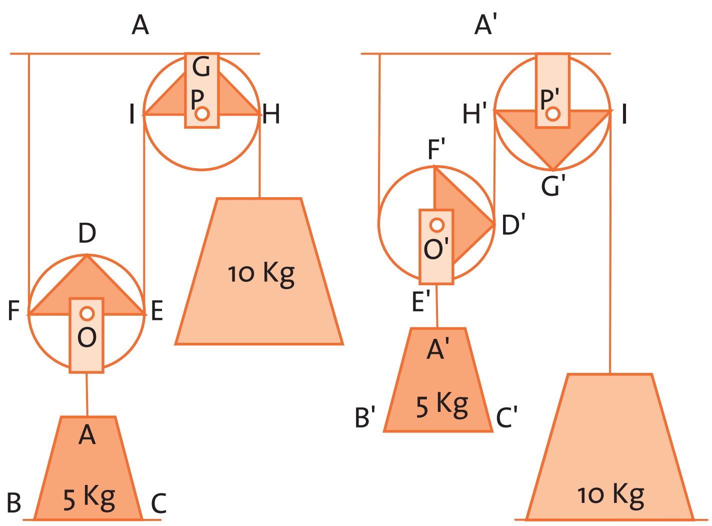
- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

Pensamiento métrico

- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.

Lo que sabemos

En la vida diaria podemos ver cuerpos que se mueven de un lugar a otro, cuya trayectoria del movimiento puede ser en línea recta o curva. Muchos de estos movimientos son las traslaciones, las rotaciones o una combinación de ambos.



Objetos que rotan, objetos que se desplazan y objetos que rotan y se desplazan.

Trabajo en grupo

En grupos de tres estudiantes realicen la siguiente actividad.

En la figura se ilustra un juego de poleas cuerda y pesos. En el instante **A** el peso de 10 Kg se halla a cierta altura y el de 5 Kg está en contacto con el suelo. Al liberarse los pesos en el instante **A'**, el peso de 10 Kg baja hasta hacer contacto con el suelo y el de 5 Kg se eleva.

- ¿Qué elementos geométricos identifican?
- Con respecto a la forma, posición y tamaño de las figuras, ¿qué cambios se produjeron entre el momento A y A'?

- Comparen las distancias de los diferentes segmentos que se pueden identificar. ¿Cuáles son iguales o distintas?¿Cuáles son mayores o menores?
- Comparen las observaciones con las realizadas por otro grupo.

Aprendamos algo nuevo

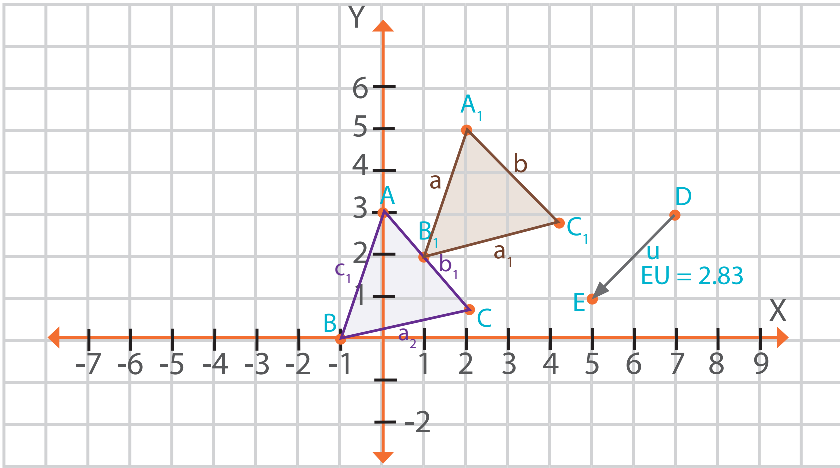
Trabajo en grupo

Figuras que se trasladan

Desarrollen la siguiente actividad.

- Recorten un triángulo en cartulina.
- Dibujen un plano cartesiano.
- Dibujen una recta inclinada en el plano cartesiano.
- Hagan coincidir un lado del triángulo con dicha recta.
- Marquen sobre el plano tres puntos que coincidan con los vértices del triángulo y nómbrenlos como *A*, *B* y *C*. (Primera posición del triángulo).
- Deslicen el triángulo sobre la recta, siempre coincidiendo el lado seleccionado.
- Marquen sobre el papel tres puntos que coincidan con los vértices del triángulo y nómbrenlos como *A'*, *B'* y *C'*. (Segunda posición del triángulo).
- Retiren el triángulo de cartulina y dibujen los triángulos *ABC* y *A'B'C'*.
- Midan los lados de los triángulos *ABC* y *A'B'C'*.
- Midan las distancias $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.
- Midan con un transportador los ángulos que forman las líneas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ con el eje *x*. Prolonguen las líneas, si es necesario.

La magnitud del segmento $\overline{AB}$ se nota $m\,\overline{AB}$ y es la distancia entre los puntos *A* y *B*.



Desplazamiento de un triángulo en línea recta.

Las transformaciones que no cambian de forma ni tamaño a las figuras, sino que solo desplazan todos los puntos a través trayectorias que son segmentos de recta, con magnitudes iguales y paralelas entre sí se denominan traslaciones.

Respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cambió el tamaño del triángulo?
- ¿Cambió la posición del triángulo con respecto al plano cartesiano?
- ¿Cambió la forma del triángulo?
- ¿Cómo es $m\,\overline{AA'}$ con respecto $m\,\overline{BB'}$ a y $m\,\overline{CC'}$?
- ¿Los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son paralelos?
- ¿Los pares de ángulos que se presentan a continuación, tienen la misma medida?

  ∝ *ABC* y ∝ *A′B′C′*

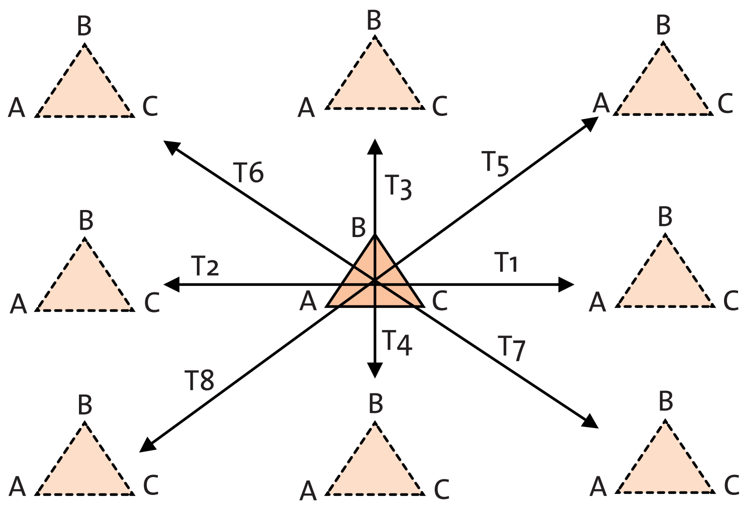
  ∝ *BCA* y ∝ *B′C′A′*

  ∝ *CAB* y ∝ *C′A′B′*

Las traslaciones se representan con vectores. Estos se caracterizan porque tienen magnitud, dirección y sentido.

- La **magnitud,** está dada por la distancia de un punto de la posición inicial de la figura al correspondiente de la posición final.
- La **dirección** es el ángulo de inclinación del segmento dado.
- El **sentido**, indica si el movimiento es hacia la derecha, izquierda, arriba o abajo, etc.

Diferentes direcciones y sentidos de las traslaciones



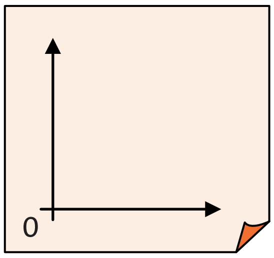
Direcciones y sentidos de las traslaciones

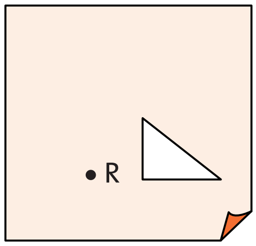
Dirección	Horizontal (0°)		Vertical (90°)		Diagonal (diferente a 0° o 90°)			
Sentido	Derecha	Izquierda	Arriba	Abajo	Arriba Derecha	Arriba Izquierda	Abajo Derecha	Abajo Izquierda
Ejemplo	→	←	↑	↓	↗	↖	↘	↙
Traslación (Ver figura)	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8

Figuras que rotan

Sigue las siguientes indicaciones:

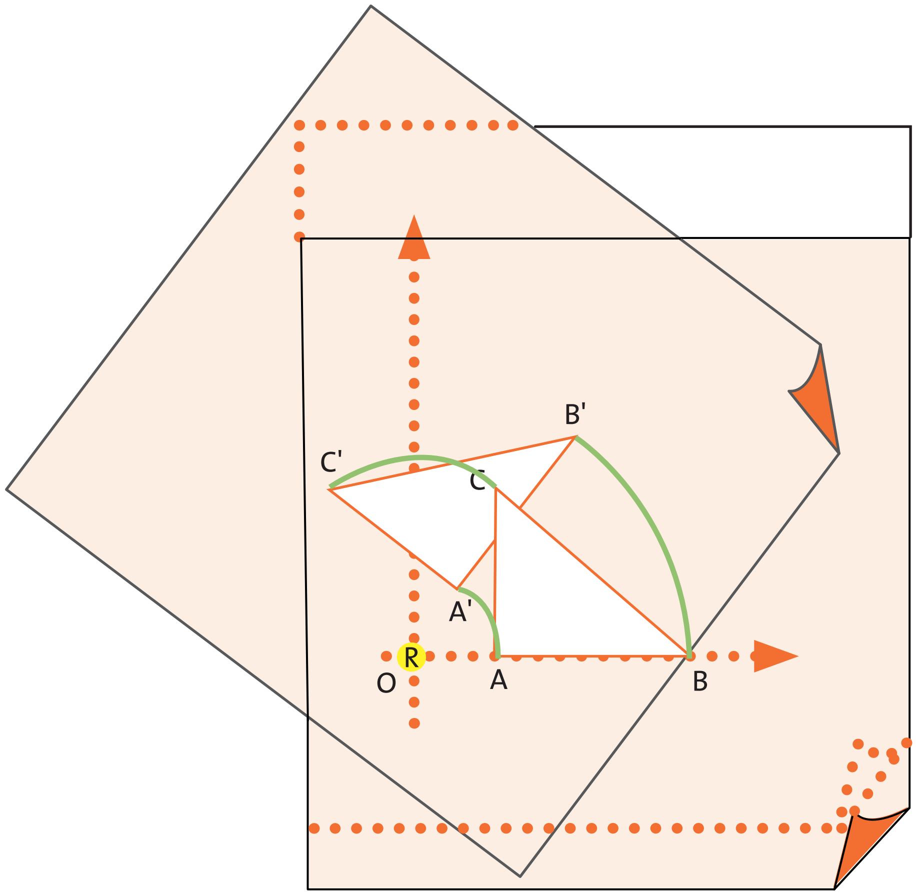
- Traza un plano cartesiano en una hoja de papel, marca el origen con la letra *O* y fíjala sobre el pupitre con cinta.
- Dibuja un triangulo en otra hoja de papel, marca los vértices con las letras *A*, *B* y *C* y un punto "*R*" fuera del triángulo.





- Coloca la hoja del triángulo sobre la hoja donde se dibujó el plano cartesiano.
- Haz coincidir el punto "*R*" con el origen *O* del plano cartesiano y mantén esos puntos juntos, con ayuda de la punta de un compás o un chinche.
- Calca el triángulo sobre en el plano cartesiano y calca también las letras *A*, *B* y *C*.
- Sin soltar el compás, rota la hoja que tiene el triángulo.
- Calca el triángulo sobre la hoja que tiene el plano cartesiano y calca también las letras *A*, *B* y *C*.
- Levanta la hoja del triángulo y en el triángulo que calcaste agrega apóstrofe a las letras para que queden *A'*, *B'* y *C'*.
- Traza y mide los siguientes segmentos:
  - » $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$
  - » $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$
  - » $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$
  - » $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$ y $\overline{CA'}$
  - » $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ y $\overline{OC'}$
- Mide los ángulos $\angle AOA'$, $\angle BOB'$ y $\angle COC'$ con un transportador.

Rotación de un triangulo con respecto a un punto fijo O



Responde las siguientes preguntas:

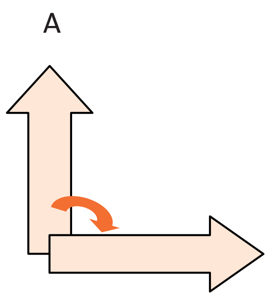
- ¿Cambiaron las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos?
- ¿Cambió la distancia del origen a los vértices de cada uno de los triángulos?
- ¿La distancia entre la posición inicial de los vértices y la final es igual para todos los vértices?
- ¿Qué puedes decir acerca de la medida de los ángulos?
- ¿Cambió el tamaño o la forma de los triángulos?
- ¿Cuál es el cambio que realmente experimenta el triángulo?

Las transformaciones que no cambian de forma ni tamaño las figuras, sino que solo desplazan todos los puntos a través de trayectorias de arco de circunferencia, con el mismo ángulo y centro de rotación se denominan rotaciones.

El sentido de la rotación se da por comparación con el movimiento de las manecillas de un reloj: a favor o en contra de ellas.

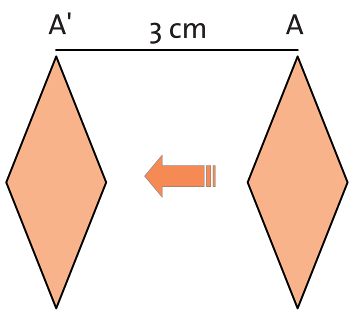
- ¿En cuál sentido rotó el triángulo?

Rotaciones

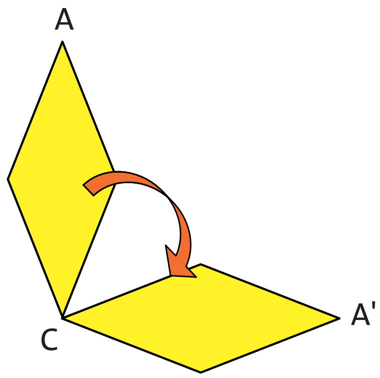


Ejercitemos lo aprendido

1. Completa las expresiones:



El rombo se trasladó… centímetros hacia la… con una dirección de… grados.



- Traza los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{A'C}$.

- Mide el ángulo ∝*ACA'*. Ayúdate de un transportador.

  » El rombo rotó… grados … con centro en … y con sentido … de las manecillas del reloj.

2. Realiza los movimientos que se indican.

   a. Dibuja un cuadrado y trasládalo 2 cm a la derecha.

   b. Dibuja un cuadrado y rótalo 90° en el sentido de las manecillas del reloj. Usa como centro de rotación uno de los vértices.

   c. Dibuja un triángulo y trasládalo 3 cm hacia arriba.

   d. Dibuja un rectángulo y rótalo 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj. Usa el centro de rotación que prefieras.

3. Busca objetos de tu cotidianidad que cumplan cada condición. Describe cómo son y para qué se usan.

   a. Objetos que se trasladan.

   b. Objetos que rotan.

Guía 19

Algunas aplicaciones de las transformaciones

Estándares

Pensamiento espacial

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

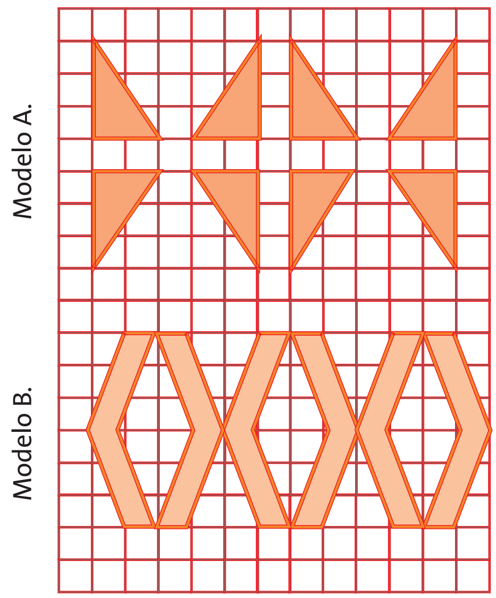
Pensamiento métrico

- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.

Desde la antigüedad, las figuras geométricas han estado estrechamente vinculadas al arte. Tal es el caso de las representaciones rupestres, las pinturas, los textiles, la cerámica, entre otras. Además del colorido, la forma y la repetición de modelos, dotan de armonía a cada uno de los objetos que son tan apreciados por su belleza.

En esta guía te invitamos a reconocer la simetría axial que permiten el desarrollo de la armonía y de la equivalencia entre las partes de una figura.

Chinchorro elaborado por la cultura Wayúu.



Modelos con figuras geométricas habituales en la elaboración de artesanías.

Lo que sabemos

Realiza las siguientes actividades de acuerdo con los modelos de un tejido artesanal que se muestra a continuación.

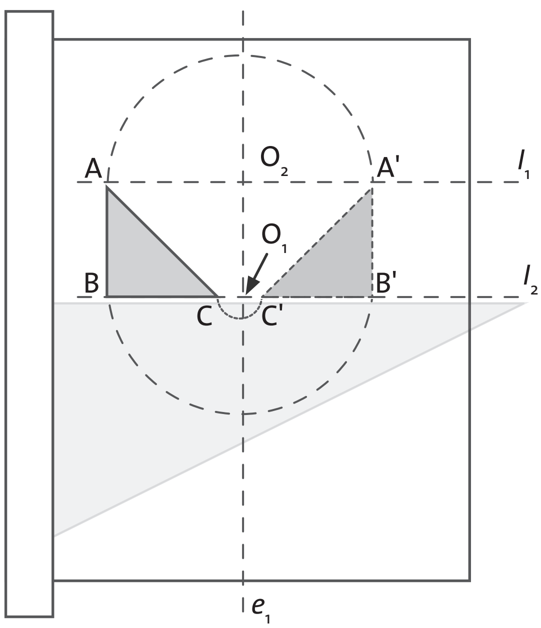
Responde las preguntas y dibuja donde corresponda.

- ¿Cuál es la figura geométrica que se repite en cada modelo? Dibújala.
- Elige uno de los modelos y cópialo en papel cuadriculado. ¿Qué estrategia utilizaste para que te quedara igual al original?
- ¿Te sirvió de algo la cuadrícula sobre la que están copiadas las figuras?
- Traza sobre una hoja cuadriculada, los ejes de un plano cartesiano.
- Ahora, toma el mismo modelo y copia una de las figuras que lo forman de tal forma que el dibujo no toque los ejes.
- Pinta el interior de la figura anterior con vinilo de algún color, luego pliega el papel, realiza el doblez sobre el eje *X* de tal forma que la figura se transfiera al otro lado del eje *X*.
- Extiende la hoja y luego pliega la hoja por el eje *Y* de tal forma que las figuras se transfieran al otro lado del eje *Y*.
- Compara las cuatro figuras obtenidas. ¿En qué se parecen o se diferencian con el modelo dado?

Aprendamos algo nuevo

Trabajo en grupo

Construcción de la imagen simétrica de un triángulo, con instrumentos

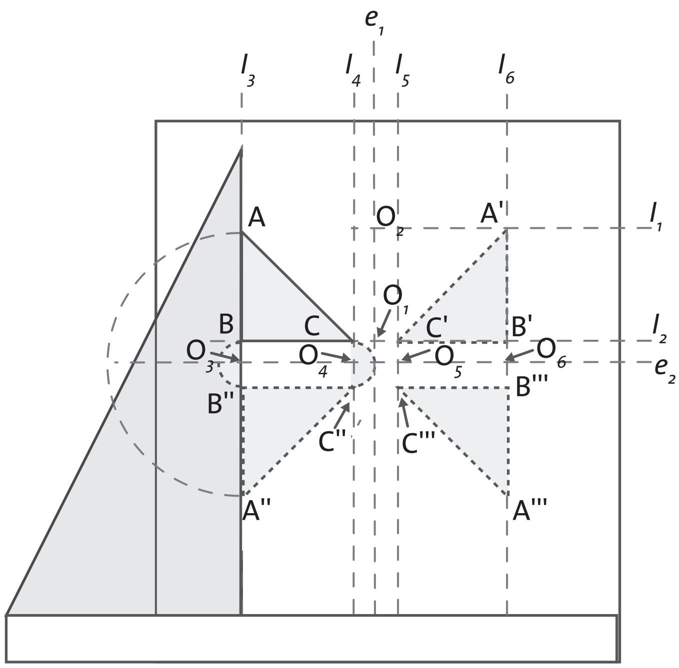


Realicen las siguientes indicaciones para que quede la representación:

- Tracen en una hoja blanca una línea *e1* que divida verticalmente la hoja en dos partes congruentes.
- Al lado izquierdo de la línea *e1*, tracen un triángulo *ABC* cuyos catetos sean paralelos a los bordes del papel.
- Tracen la recta l_1 perpendicular a e_1 que pasa por el punto *A*.
- Tracen la recta l_2 perpendicular a e_1 que pasa por los puntos *B* y *C*.
- Con centro en O_1,tracen un arco que pase por punto *C* e intercepte a l_2 en otro punto.
- Con centro en O_1,tracen un arco que pase por punto *B* e intercepte a $l_2$en otro punto. Con centro en O_2 traza un arco que pase por punto *A* e intercepte a l_1 en otro punto.
- La intersecciones de los arcos con las rectas l_1 y l_2 han definido tres puntos, nómbrenlos como *A', B'* y *C'*.
- Tracen el triángulo *A'B'C'*.
- Midan las siguientes distancias:
  - » $m\overline{AO_2}$ y $m\overline{A'O_2}$
  - » $m\overline{BO_1}$ y $m\overline{B'O_1}$
  - » $m\overline{CO_1}$ y $m\overline{C'O_1}$
- ¿Cuál es la función que tiene la recta e_1 en la representación?
- Coloquen sobre la recta e_1 un espejo plano y comparen si la imagen del espejo es la misma que la del triángulo *A'B'C'*. ¿Son iguales o distintas? Justifica tu respuesta.

Construcción de imágenes simétricas con instrumentos

La recta e_1 es el eje de simetría de la representación



En forma similar a como construiste la imagen simétrica del triángulo *ABC*, usando como eje de simetría vertical a la recta e_1, construye la imagen simétrica de esos dos triángulos, usando como eje de simetría horizontal a la recta e_2.

- Midan siguientes distancias:
  - » $m\overline{AO_3}$ $m\overline{A'O_6}$ $m\overline{A''O_3}$ y $m\overline{A'''O_6}$
  - » $m\overline{BO_3}$ $m\overline{B'O_6}$ $m\overline{B''O_3}$ y $m\overline{B'''O_6}$
  - » $m\overline{CO_4}$ $m\overline{C'O_5}$ $m\overline{C''O_4}$ y $m\overline{C'''O_5}$
- Cómo son las medidas de esas distancias, cuáles son iguales?
- Definan los siguientes términos:
  - » Simetría
  - » Eje de simetría

- Comparen sus definiciones con las de otros grupos de estudiantes.
- Preparen una exposición para el curso y socialicen las definiciones para escoger la mejor.

Las anteriores dos representaciones se basan en una transformación geométrica llamada reflexión o una clase de simetría denominada simetría axial.

La **reflexión** o **simetría axial** es un movimiento que permite cambiar una figura a otra posición diferente; por tanto, se conserva la forma y el tamaño de la figura inicial en la figura de la posición final. Esta transformación se realiza teniendo en cuenta un eje central que se denomina eje de simetría.

Simetría en la naturaleza

Copo de Nieve

Flor Margarita

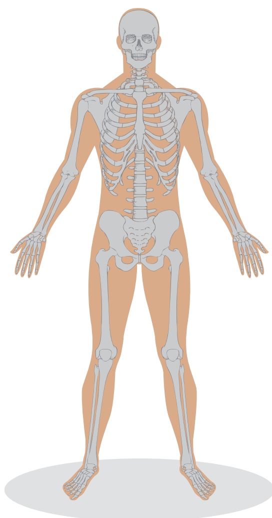


Figura Humana

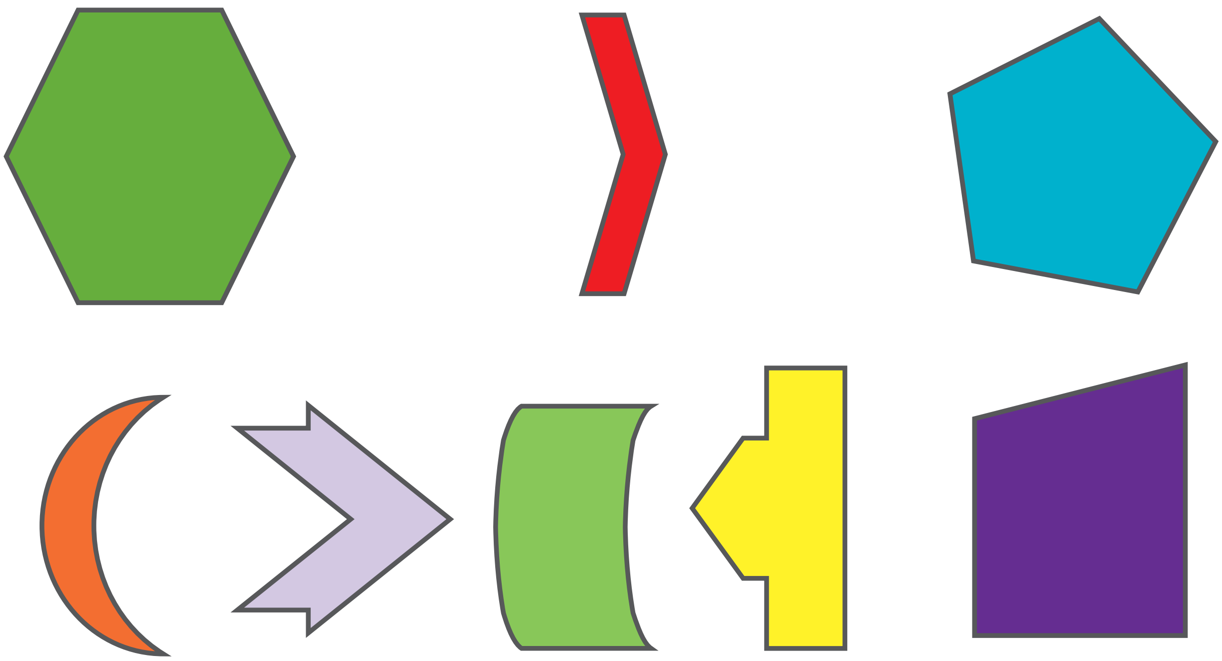
El cuerpo humano tiene un eje de simetría, ya que equidistantes de él, se encuentran órganos o partes similares. Por ejemplo un ojo a cada lado del eje de simetría. Esta no es una simetría perfecta porque pueden existir pequeñas diferencias en los tamaños y distancias, por ejemplo una mano puede ser un poco más grande que la otra. En la naturaleza hay seres con más de un eje de simetría. Por ejemplo un copo de nieve o una margarita.

En la imagen se muestran tres figuras, cada una con un eje de simetría, la figura correspondiente a copo de nieve tiene seis ejes de simetría. ¿Podrías identificarlos y trazarlos?

Ejercitemos lo aprendido

Calca las figuras y traza todos los ejes de simetría posibles en cada una.

Figuras con ejes de simetría



- ¿Todas las figuras tienen la misma cantidad de ejes de simetría?
- Dibuja una figura diferente, que tenga tres ejes de simetría.

Guía 20

Homotecias y semejanzas

Estándares

Pensamiento espacial

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

Pensamiento métrico

- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.

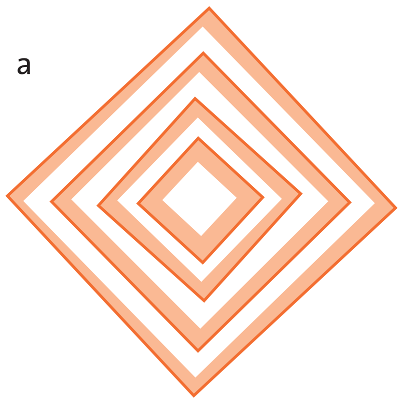
Lo que sabemos

Cómo lo habías visto antes, hay diferentes manifestaciones del arte, que aprovechan las figuras geométricas, la variedad de color y tamaño, para poder representar modelos que atraen la atención de aquellos que tienen la oportunidad de verlas y analizarlas. En esta guía estudiaremos la homotecia y la semejanza que aportaron como técnica a la pintura, escultura, fotografía, el cine, etc.

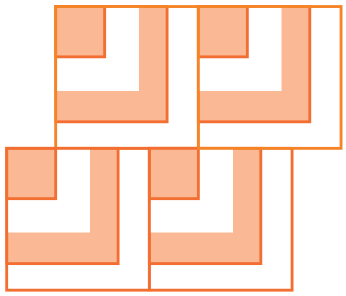
Trabajo en grupo

Reúnete con un compañero o compañero y analicen los siguientes modelos.

a



b



Modelos con figuras similares de diferente tamaño

- ¿Qué clase de figuras hay en común entre los dos modelos?
- Si se analiza cada modelo, existe una figura geométrica que se repite. Esas figuras ¿en qué se diferencian y en qué se parecen?
- Realiza los modelos en un octavo de cartulina, escribe paso a paso qué hiciste para copiarlo y ampliarlo. Socializa ante el curso tus pasos y comparen en cuáles coincidieron.
- Contesten entre todos:
  - » ¿Usaron instrumentos? ¿Cómo los usaron? ¿Establecieron medidas? ¿Cuáles?
  - » ¿Cuál es el que más se parece con relación a los modelos presentados?
  - » Justifiquen las respuestas.
- Comenten acerca de las dificultades que tuvieron en la elaboración de los modelos propuestos.

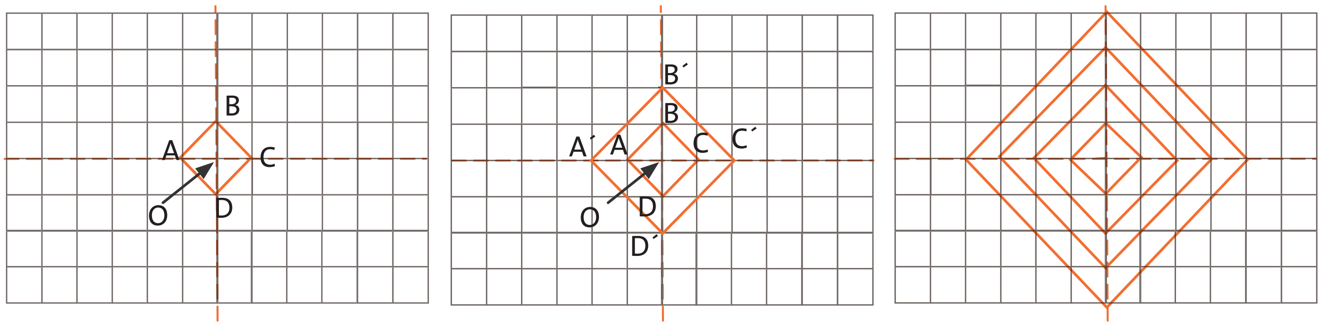
Aprendamos algo nuevo

Una manera fácil de poder recrear el modelo de cuadrados concéntricos que se caracterizan porque tienen el mismo centro y van aumentando el tamaño de manera armónica es la aplicación de la transformación geométrica homotecias.

- En una hoja cuadriculada traza dos ejes perpendiculares.

- Marca cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* sobre los ejes de manera que tengan la misma distancia del punto de intersección de los dos ejes (este punto es el centro del modelo) y traza un cuadrado con dichos vértices como se muestra en la figura.

Transformaciones en el tamaño de figuras geométricas



- Se quiere obtener una figura semejante al cuadrado *ABCD*. Para tal efecto, se selecciona como distancia 2 unidades para determinar los puntos *A′*, *B′*, *C′* y *D′* con intersección en cada uno de los ejes a partir del centro determinado para el modelo.

- Se repite tres veces el procedimiento descrito en el anterior paso y queda el modelo propuesto.

Analicemos el modelo:

- El primer cuadrado es la imagen original se construye el primer cuadrado semejante al anterior. Este tiene como características que las longitudes de los lados son dos veces mayores, comparadas con las longitudes de los lados del primer cuadrado. Así mismo, los vértices *A'*, *B'*, *C'* y *D'*, serán homólogos a los del cuadro original *A*, *B*, *C* y *D*, respectivamente. Análogamente los lados comprendidos ente vértices homólogos serán homólogos entre sí.

- Comprueba tomando las medidas de los lados de cada cuadrado. Además, los ángulos internos de cada cuadrado son de la misma medida. ¿Por qué se conserva la medida de los ángulos de los cuadrados?

Cuando tenemos figuras que las medidas de sus lados mantienen la misma relación y la medida de los ángulos es la misma, se dice que los cuadrados son semejantes. En este caso la ampliación corresponde a 2 unidades, este valor es conocido como "k" y significa constante de proporcionalidad.

El proceso de construcción de figuras semejantes es conocido como homotecias. Para hacer una homotecia se debe determinar un centro y un valor "k" denominado factor escalar para construir la figura.

- En el modelo construido anteriormente, cuál es el centro y cuál es el valor de K con respecto al último cuadrado construido.

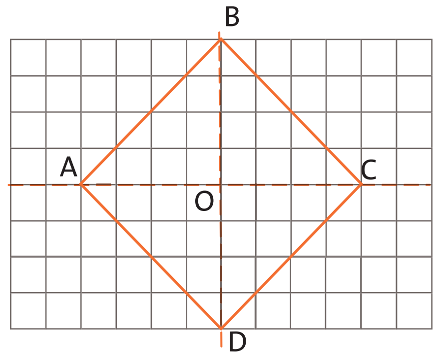
- ¿Qué proceso deberías realizar para construir el mismo modelo si la figura inicial es el cuadrado cuyo lado es de mayor longitud?

- Escribe paso a paso el proceso que realizarías y compruébalo con la siguiente descripción.

Reducción de tamaño en figuras geométricas

- En una hoja cuadriculada traza dos ejes perpendiculares; el punto de intersección de los ejes es el centro del modelo.

- Marca cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* sobre los ejes, todas con la misma distancia de 4 unidades y traza un cuadrado como se indica en la figura.



- Toma la distancia de 3 unidades para determinar los vértices del nuevo cuadrado. ¿Cuál será la relación multiplicativa que hay entre la longitud del lado del nuevo cuadrado con respecto al cuadrado inicial? ¿Es el mismo valor del factor escalar o la constante de proporcionalidad? Escribe un valor aproximado de "k" y justifica su valor.

- Socializa la forma de calcular "k" con los compañeros del curso. Establezcan un acuerdo de cómo calcularlo.

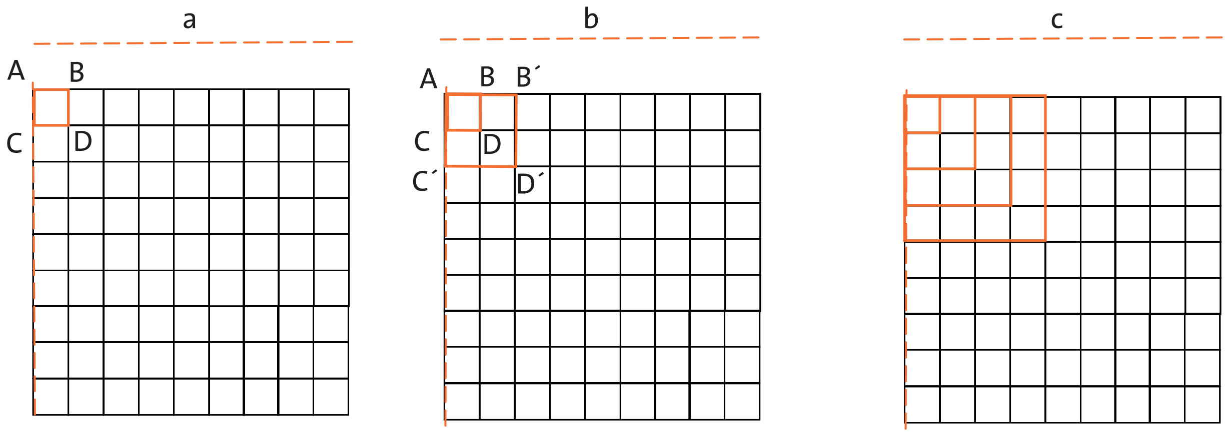
Para calcular "k" se puede utilizar una estrategia que se relaciona en dividir los segmentos en partes iguales. La primera distancia del centro a los vértices se divide en cuatro partes y la segunda distancia del centro a los nuevos vértices se divide en tres partes. Si comparamos las partes se tendría: 3 de las 4 partes. Entonces "k = 3/4"

- Establece los otros factores escalares para los otros cuadrados comparados con el cuadrado inicial.

Realiza la siguiente actividad:

- En una hoja cuadriculada, marca cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* y traza un cuadrado como se indica en la figura.

Homotecias con centro en un vértice



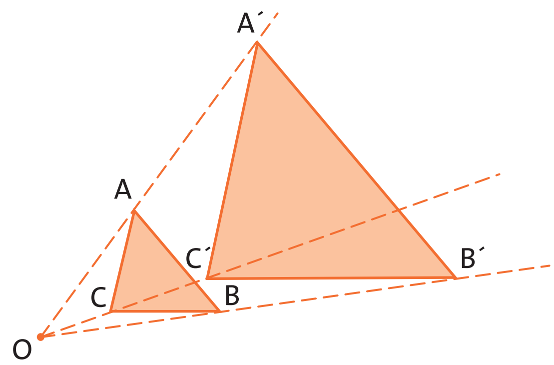
- Toma el vértice *A* como centro de homotecia y traza un par de ejes perpendiculares a partir de este punto.

- Selecciona el valor de *K*= 2 y traza el nuevo cuadrado. Sigue así hasta llegar a *K* = 6.

Trabajo en grupo

Homotecias con centro en un punto exterior a la figura

Hay ocasiones en que el centro de homotecia, está por fuera de la figura como en el siguiente ejemplo.



- Tracen un triángulo *ABC* en una hoja blanca y seleccionen un punto *O* externo al triángulo como centro de homotecia.

- Ahora, tracen tres rectas $\overleftrightarrow{AO}$, $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OC}$, respectivamente.

- Midan los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

$m\overline{OA} =$ ______, $m\overline{OB} =$ ______ y $m\overline{OC} =$ ______

- Seleccionen un factor escalar de $k= 3$, (valor mayor que uno). Ahora multiplica el valor de K por cada uno de los valores de las distancias $m\overline{OA}$, $m\overline{OB}$ y $m\overline{OC}$, para hallar el valor de las distancias correspondientes a los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, y $\overline{OC'}$

$m\overline{OA'} = K \times m\,\overline{OA} =$ ______

$m\overline{OB'} = K \times m\,\overline{OB} =$ ______

$m\overline{OC'} = K \times m\,\overline{OC} =$ ______

- Tomen la medida obtenida $m\overline{OA'}$. Desde el punto O mida esta distancia sobre la semirecta $\overleftrightarrow{OA}$ determinando el punto *A',* distancia que determina la distancia *OA'*. Sigan el mismo proceso para obtener los puntos *B'* y *C'*. Esos puntos determinan el triángulo *A'B'C'*.

- Comparen las longitudes de los lados de cada uno de los triángulos. ¿La relación multiplicativa entre la longitud de los lados del triángulo *A'B'C'* con los correspondientes a los lados del triángulo *ABC* es tres veces mayor?

- Comparen la medida de los ángulos correspondientes entre el triángulo *ABC* con el triángulo *A'B'C'*.

- ¿Se puede afirman que los triángulos son correspondientes? Justifica tu respuesta.

- Repitan el procedimiento anterior para generar un triángulo semejante al inicial pero usando un valor de ***K*** menor de 1; por ejemplo: $K = \frac{1}{2}$

- ¿Se puede afirmar que los tres triángulos son semejantes entre sí? Justifica la respuesta.

En una homotecia, si el factor escalar *k* es mayor que 1 (*k*> 1) el resultado es una ampliación de la figura original y si *k* es menor que 1 (*k*< 1) el resultado es una reducción.

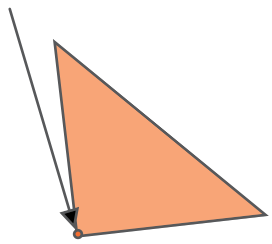
Ejercitemos lo aprendido

- Copia las figuras y el centro de homotecia que se indica en cada una.

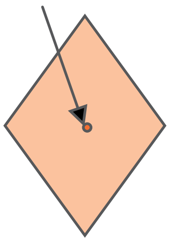
  a. Realiza la homotecia de cada una de las figuras que tengan como factor escalar *K*, los siguientes: 2, 3, 4.

Figuras geométricas y centros de homotecia

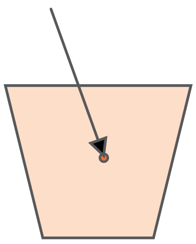
Centro de homotecia



Centro de homotecia



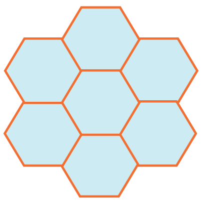
Centro de homotecia



Apliquemos lo aprendido

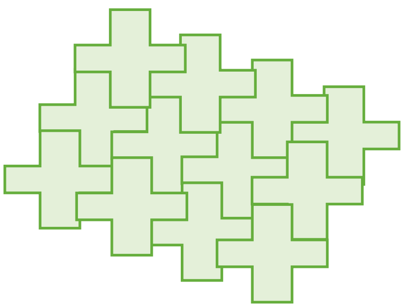
Las teselaciones

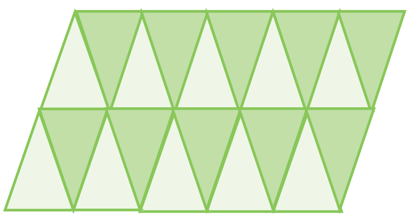
Desde la antigüedad, diferentes culturas como la Persa y los sumerios utilizaron las teselaciones para recubrir suelos y paredes, e igualmente se utiliza para decorar telas o tapices, entre otros.



Cuando se encuentra una figura que permite cubrir toda una superficie plana sin dejar huecos ni montarse una encima de otra, se dice que se está realizando una **teselación** o embaldosado.

1. Responde las preguntas con respecto a los siguientes teselados:

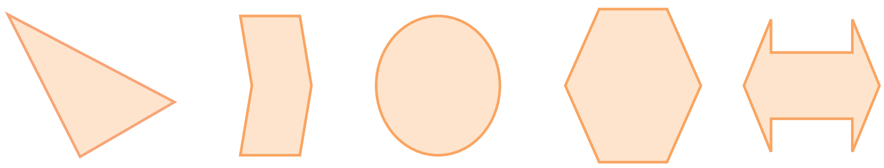




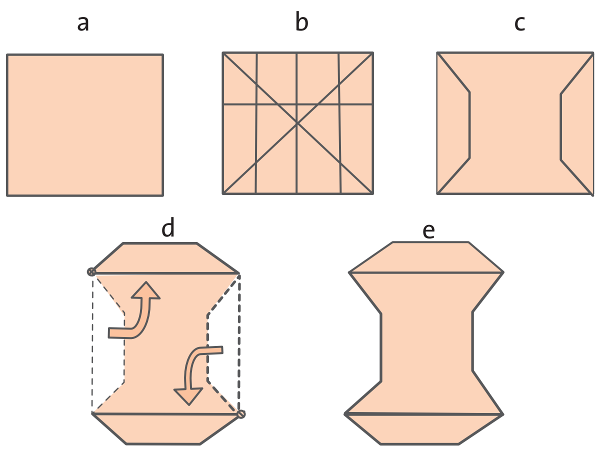
- ¿Has visto en los objetos que te rodean algún teselado similar a los presentados? En caso afirmativo, descríbelo.
- Dibuja la figura base de cada teselado.
- ¿Qué transformación geométrica se aplica a cada figura para obtener el teselado?
- Realiza cada uno de los teselados en un octavo de cartulina y comprueba tus respuestas.

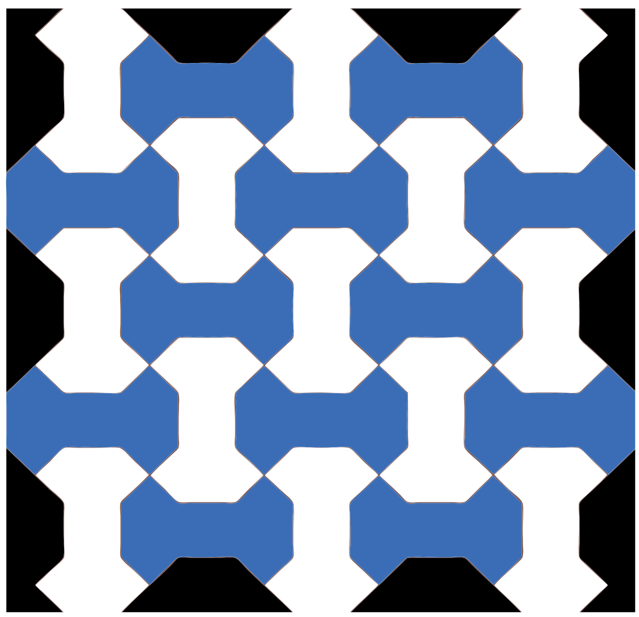
Figuras geométricas

1. Calca las siguientes figuras, recórtelas en cartulina y trate de teselar en una hoja blanca. ¿Cuáles figuras permiten teselar?



2. Realiza el siguiente molde a partir de unos cortes en un cuadrado que utiliza la trasformación rotación. Sigue los pasos de los literales a) al d).



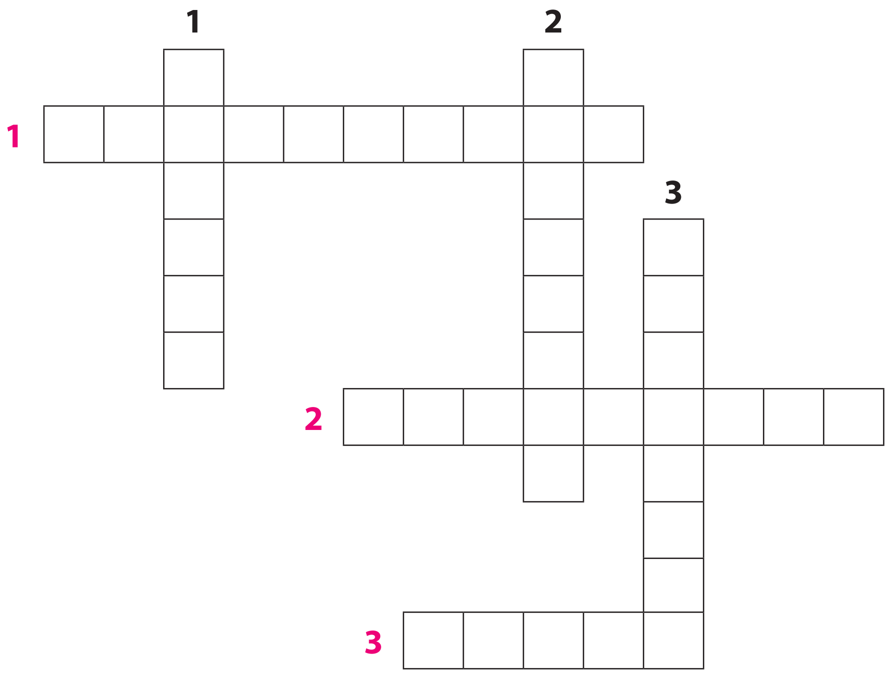


Molde del hueso de Nazarí.

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

1. Copia y resuelve el crucigrama.



Horizontales:

1. Permite que una figura se desplace.
2. Es un movimiento que permite generar figuras semejantes.
3. Lo que se mantiene en las transformaciones tratadas en el módulo.

Verticales:

1. En lo que no coinciden las figuras semejantes.
2. Transformación que exige un giro y un centro.
3. Transformación que permite obtener dos partes iguales.

Verticales: 1. Tamaño \ 2. Rotación \ 3. Simetría
Horizontales: 1. Traslación \ 2. Homotecia \ 3. Forma

¿Cómo me ven los demás?

a. Formen grupos de tres personas.

b. Cada integrante del grupo elegirá una figura geométrica, dibújenla en cartulina, recórtenla. Realicen los cortes necesarios para generar un molde a partir de la aplicación de transformaciones. Siempre se debe utilizar en el molde todo el material de cartulina que se utilizó en la figura.

   Teselen un pliego de papel bond, utilizando el molde construido anteriormente. Recuerden que los movimientos para cubrir son los mismos que para elaborar el molde.

c. Expongan sus trabajos ante sus compañeros y permítales que opinen sobre lo que observan.

d. Evalúa el trabajo de tus compañeros de grupo. Por ejemplo ten en cuenta si: ¿trabajaron activamente? ¿Se entendieron para trabajar? ¿Tuvieron en cuenta los pasos dados?

¿Que aprendí?

Responde según la manera en la que te desenvolviste en el desarrollo del módulo, justifica tu respuesta.

	Sí	A veces	No	Justifico
Reconozco y describo las características de una transformación.				
Identifico la distancia de la traslación y el ángulo de giro y de centro de giro de una transformación.				
Utilizo los instrumentos necesarios para elaborar construcciones geométricas.				
Sigo instrucciones a nivel verbal y gráfico.				
Utilizo con responsabilidad los materiales dispuestos para la clase.				
Realizo mis tareas responsablemente tanto en los trabajos individuales como grupales.				
Respeto las opiniones de los demás y me preocupo por exponer las mías.				

Con tu maestro, determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento.

Módulo 6

Calculando datos representativos

¿Qué vas a aprender?

Este módulo te permite abordar las medidas de tendencia central. Dichas medidas son importantes porque permiten identificar el comportamiento más común o el patrón más usado por un individuo o grupo de personas en diferentes situaciones.

Estándares básicos de competencias

Pensamiento aleatorio

- Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos.

- Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.

Contenidos

<table>
<tr><th>Guías</th><th>Conceptos</th><th>Procesos</th></tr>
<tr><td>Guía 21.

La producción promedio de Mauricio en su finca.</td><td>Media</td><td rowspan="3">Se favorecen los procesos de:

• Ejercitación de procedimientos para calcular las medidas de tendencia central.

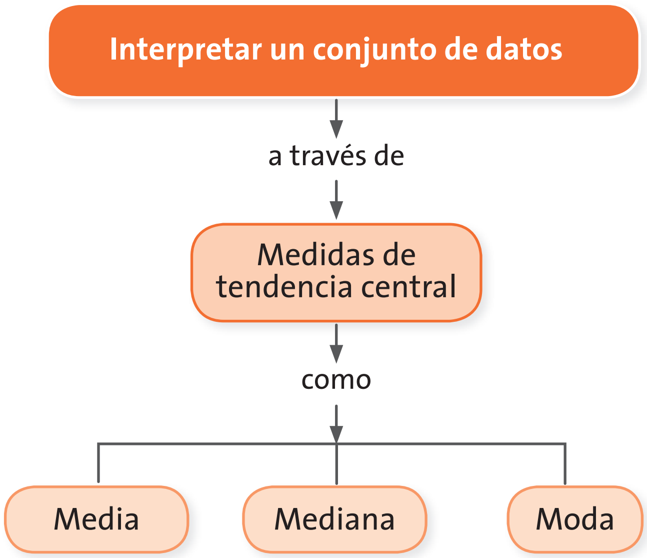
• El razonamiento para analizar en interpretar la información correspondiente a un conjunto de datos.

• La comunicación para reconocer y usar términos matemáticos adecuados, acordes con el análisis que se realiza al conjunto de datos.</td></tr>
<tr><td>Guía 22.

Otra medida de tendencia central: la mediana</td><td>Mediana</td></tr>
<tr><td>Guía 23.

La moda como medida de tendencia central</td><td>Moda</td></tr>
</table>

El siguiente esquema te muestra la manera cómo se pueden relacionar los conceptos trabajados en el módulo.



¿Para qué te sirve lo que vas a aprender?

Las medidas de tendencia central son usadas con frecuencia en muchas de las situaciones de la cotidianidad.

Por ejemplo, para determinar el promedio de tiempo que demoro en llegar de mi casa al colegio.

Posiblemente ya conoces estas medidas, aunque no sepas sus nombres estadísticos. Por ejemplo, los comentaristas deportivos hablan con frecuencia del término medio de goles en una jornada de partidos de fútbol, el "término medio" se refiere a la media o promedio. Cuando los economistas hablan que la mitad de la población está ganando sobre o bajo un nivel del salario en particular, se están refiriendo a la mediana y finalmente, cuando los expertos en demografía manifiestan que la mayoría de la población tiene entre 20 y 35 años de edad, se refieren al valor de mayor frecuencia o moda.

¿Cómo y qué se te va a evaluar?

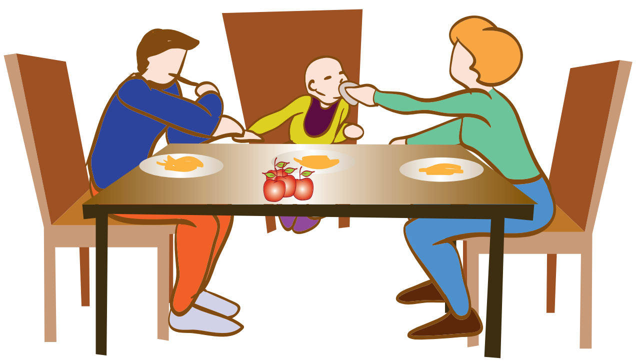
En el desarrollo del módulo se proponen diferentes momentos en los que tú, tus compañeros y tu maestro podrán evidenciar y analizar los progresos que tuviste en cuanto al aprendizaje de los conceptos relacionados con la interpretación de las medidas de tendencia central: media, moda y mediana en el análisis de datos.

La evaluación será constante, dentro cada una de las guías encontrarás actividades evaluativas que te permitirán reflexionar acerca de cómo vas y qué debes reforzar.

Además encontrarás dos secciones:

Aplico lo aprendido y *Evaluación* en las que se proponen diferentes actividades, problemas y situaciones que te invitarán a poner en práctica tus conocimientos, así como a realizar trabajos individuales o grupales que retarán tus habilidades para expresar tus ideas y pensamientos.

Explora tus conocimientos



Carlos es esposo de Manuela y padre de Alberto; es domingo y ha decidido pedir un domicilio para el almuerzo, cada almuerzo cuesta $5.000, el jugo $2.000 y el postre $1.000. Ha pagado por los tres almuerzos, sus respectivos jugos y postres, junto con el domicilio un total de $27.000.

- ¿Cuánto pagó por el servicio de domicilio?
- ¿De cuánto fue el gasto total por persona?
- ¿Cuánto pagaría por el total de los almuerzos del primer trimestre del año, si siempre piden el mismo domicilio los domingos?

Guía 21

La producción promedio de Mauricio en su finca

Estándares

Pensamiento aleatorio

- Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.
- Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.

Cuando se estudia un conjunto de datos se desea encontrar un valor representativo del comportamiento de todos ellos. Uno de esos valores de tendencia central es conocido como promedio o media aritmética y se abordará en la presente guía.

Lo que sabemos

¿Sabes qué es una cosecha?

En Colombia muchas familias campesinas se dedican a esta actividad; dependiendo del piso térmico al que pertenezcan se presenta gran variedad de cultivos: frutas, hortalizas, cereales, verduras, tubérculos, granos entre otros. Mauricio es un campesino, ha recogido esta última semana su cosecha de papa y ha anotado la cantidad de bultos recogidos cada día, como se muestra a continuación:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Cantidad	30	40	40	50	60	20

- Construye una gráfica de barras con la información dada en la tabla.
- ¿Cuál día de la semana recogió mayor cantidad de bultos?
- ¿Cuál día de la semana recogió menor cantidad de bultos?
- ¿Cuántos bultos recogió los tres primeros días de la semana?

- ¿Cuántos los tres últimos?
- Presenta tus conclusiones según la información anterior, compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Aprendamos algo nuevo

Mauricio quiere identificar cuál es el valor promedio que representa la cantidad de bultos de papa recogidos en un día.

Para ayudarle a Mauricio a deducir un promedio debemos sumar la cantidad de bultos de papa que recogió cada día y dividir el resultado de esta suma entre el número total de días que recogió los bultos de papa, como se muestra a continuación:

$$\text{Valor promedio} = \frac{\text{Total de los bultos recogidos}}{\text{Número de días}}$$

Para nuestro ejemplo sería:

$$\text{Valor promedio} = \frac{30 + 40 + 40 + 50 + 60 + 20}{6}$$

Es decir,

$$\text{Valor promedio} = \frac{240}{60} = 40$$

Mauricio recoge en *promedio* 40 bultos de papa cada día de la semana.

El valor 40, es el valor que representa a los datos relacionados con la cantidad de bultos recogidos en la semana. Este dato nos permite deducir que Mauricio recoge en un día cualquiera de la semana una cantidad cercana a 40 bultos. Por lo tanto, un resultado de 60 bultos se consideraría muy por encima del promedio; mientras que uno de 20 bultos estaría por debajo del mismo.

Lo que acabamos de hacer es ayudarle a Mauricio a calcular la **media** o **valor promedio** de bultos que recoge.

La media aritmética o **promedio** es un valor que representa la tendencia central de un conjunto de datos. El promedio es una división que se establece entre el valor del resultado de la adición de los valores de los datos y el número total de datos. Una forma de simbolizar la forma de calcular la media es:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n}{n}$$

Donde:

$X_1, X_2, ..., X_n$ representan los valores de los datos recogidos y n a la cantidad total de datos.

Mauricio pretende comprar una determinada cantidad de bultos de abono para sus próximas siembras y realiza la siguiente estimación de cuántos bultos gastaría por mes en cada uno de los siguientes cultivos:

Cultivo	Frijol	Maíz	Yuca	Arveja	Papa	Zanahoria	Café	Tomate
Cantidad de abono	4	7	6	4	10	5	7	5

Ayudemos a Mauricio a calcular la media de la cantidad de abono que necesitaría por mes, si realiza todas las siembras al mismo tiempo.

Establecemos la división de la siguiente forma: el resultado de la adición de la cantidad de bultos de cada uno de los cultivos entre el número de cultivos.

$$\overline{X} = \frac{4 + 7 + 6 + 4 + 10 + 5 + 7 + 5}{6}$$

$$\overline{X} = \frac{48}{8} = 6$$

Discute con tus compañeros: ¿Qué interpretación se le hace al valor 6 obtenido de la media?

Ejercitemos lo aprendido

1. Las siguientes tablas muestran las ganancias diarias de la última semana obtenidas por Mauricio en tres de sus productos.

Ganancias por venta del tomate							
Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Ganancia ($)	33.000	30.000	26.000	25.000	29.000	28.000	32.000

Ganancias por venta del maíz							
Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Ganancia ($)	30.000	33.000	25.000	28.000	25.000	20.000	28.000

Ganancias por venta de la zanahoria							
Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Ganancia ($)	39.000	32.000	35.000	30.000	38.000	35.000	36.000

- ¿Cuáles fueron los días de mayor ganancia por cada uno de los productos?
- Halla el valor que represente el valor de mayor ganancia de cada uno de los productos.
- Calcula la media o promedio para cada producto.
- ¿Cuál es la diferencia entre el promedio de cada producto y el valor de mayor ganancia de cada uno de los productos?
- Con el promedio de cada producto, ¿se puede averiguar cuál fue el día de la semana en Mauricio obtuvo mayores ganancias en cada uno de los productos? ¿Cómo lo hallaste?

Trabajo en grupo

Trabaja con dos compañeros y respondan las siguientes preguntas:

2. Pregunten la edad, estatura y peso de todos los compañeros del curso y averigüen cuál es el promedio del curso de cada dato.

3. Las siguientes son las estadísticas de la cantidad de personas que asistieron a los últimos siete eventos realizados en el Centro de Convenciones: 800, 700, 650, ____, 900, 950, 700.

   ¿Cuántas personas asistieron al cuarto evento, si se sabe que la media de asistentes es de 800 personas?

4. La siguiente tabla muestra la cantidad de carros que ingresaron al parqueadero de un centro comercial en las diez horas que está habilitado. Calculen la media de los carros que ingresaron por hora.

Hora	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00
Carros	35	28	57	41	23	16	45	38	50	17

- ¿La media obtenida es una representación acorde al conjunto de datos? Justifiquen su respuesta.

Guía 22

Otra medida de tendencia central: la mediana

Estándares

Pensamiento aleatorio

- Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.
- Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.

Existen situaciones cotidianas en las cuales debemos buscar un valor que represente unos datos. Existe otro valor de tendencia central conocido como mediana. En esta guía lo abordaremos.

Lo que sabemos

Mauricio ha recogido esta última semana su cosecha de café y ha anotado la cantidad de bultos recogidos en cada día, como se muestra a continuación:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Cantidad de bultos	110	100	90	100	120	110	30

Al tratar de ayudar a Mauricio a encontrar el promedio diario de la cantidad de bultos de café recogidos, encontramos:

$$\text{Media} = \frac{110 + 100 + 90 + 100 + 120 + 110 + 30}{7} = \frac{660}{7} = 94$$

La media obtenida ha sido de 94 bultos de café.

- ¿Crees que esta media obtenida representa los datos? ¿Por qué?

Aprendamos algo nuevo

Existe una desventaja al usar la media aritmética o promedio cuando uno de los valores es muy grande o muy pequeño respecto al resto de los otros datos; más aún si la muestra es de pocos datos. En este caso, como la media es un dato que depende de una fórmula matemática, no representaría bien al conjunto de los datos.

Por esa razón, entra en duda el valor 94 de bultos de café que recoge Mauricio en esa semana como representante del conjunto de datos; ya que existe el valor 30, que es muy pequeño comparado con los otros datos.

Para ayudar a Mauricio a calcular un nuevo valor más representativo, vamos a ordenar los datos de menor a mayor, o de mayor a menor valor como se muestra en la siguiente tabla:

Orden	1º	2º	3º	4	5º	6º	7º
Cantidad de bultos	30	90	100	100	110	110	120

Ahora buscamos el valor que se encuentra, en la cuarta posición que corresponde a la mitad del número de datos ordenados: el número 100.

Cantidad	30	90	100	**100**	110	110	120

Esta forma de determinar el valor central del conjunto de datos a través del ordenamiento de los datos es conocida como **mediana**.

En este caso, la interpretación que le daremos es: el valor mediano diario de la cantidad de bultos de café recogidos por Mauricio es 100.

La **mediana** de un conjunto impar de datos es el valor al que le corresponde la posición central al ordenar los valores de los datos.

Ahora le ayudaremos a Mauricio a calcular la mediana y la media de los ayudantes que recogieron la cosecha de todos sus cultivos en los anteriores catorce días, información que se presenta en la próxima tabla.

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Número de ayudantes	19	30	22	10	34	15	31	10	35	12	35	20	24	25

Para calcular la mediana, vamos a ordenar los datos en orden ascendente (de menor a mayor valor).

Orden	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	13º	14º
Numero de ayudantes	10	10	12	15	19	20	22	24	25	30	31	34	35	35

Al tratar de hallar la mediana, nos encontramos que tiene dos posiciones centrales que corresponde a las posiciones 7º y 8º, debido a que el número de datos es par. Los valores de estas posiciones corresponden a 22 y 24 ayudantes; lo que hace posible promediarlas ya que son valores muy cercanos obteniéndose:

$$\text{Mediana} = \text{Promedio de los datos centrales}$$

Para nuestro ejemplo:

$$\text{Mediana} = \frac{22 + 24}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

El valor 23 lo interpretamos como el valor mediano diario de la cantidad de ayudantes que participaron en la recolección de las cosechas de los últimos catorce días.

La **mediana** de un conjunto par de datos es el promedio de los valores medios del conjunto de datos, es decir la suma de los dos datos centrales, dividido entre dos.

Ahora hallaremos la media:

$$\text{Media} = \frac{10 + 10 + 12 + 15 + 19 + 20 + 22 + 24 + 25 + 30 + 31 + 34 + 35 + 35}{14}$$

$$\text{Media} = \frac{322}{14} = 23$$

El valor promedio de la cantidad de ayudantes que participaron en la recolección de las cosechas de los últimos catorce días es de 23.

- En este caso la mediana y la media son iguales, ¿qué puedes interpretar de esta situación?

Ayuda a Mauricio a encontrar cuál de las medidas de tendencia central estudiadas es más representativa para la información de las ganancias diarias de la última semana en la venta de café.

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Ganancia ($)	60.000	15.000	40.000	20.000	50.000	165.000	0

Hallemos primero la media:

$$\text{Media} = \frac{60.000 + 15.000 + 40.000 + 20.000 + 50.000 + 165.000 + 0}{7}$$

$$\text{Media} = \frac{350.000}{7} = 50.000$$

Es decir, la media de las ganancias de café de la semana es de $ 50.000.

Ahora obtendremos la mediana, ordenando los datos de mayor a menor valor:

Orden	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
Ganancias ($)	165.000	60.000	50.000	40.000	20.000	15.000	0

La posición cuarta es la posición central y corresponde a $40.000 y lo interpretamos como el valor mediano diario de las ganancias de café es de $40.000.

Podemos concluir que la mediana es un dato al que no lo afectan datos grandes o pequeños pero presenta desventajas ya que depende del ordenamiento y se alteran algunos datos. En algunos casos este valor se mantiene; y, se dificulta su uso para otros cálculos estadísticos.

Ejercitemos lo aprendido

1. Revisa la información de las tablas correspondientes a las ganancias de venta de los productos: tomate, maíz y zanahoria, dados en la anterior guía.

   - Calcula la mediana para las ganancias por venta de cada uno de los productos.

   - Compara el dato de la media y la mediana y analiza si son datos representativos del conjunto de los datos de las ganancias.

Trabajo en grupo

Trabaja con un compañero. Luego, compartan sus respuestas con el resto del grupo.

2. Calculen la mediana de los datos de peso, edad y estatura, recogidos en el curso.

3. La siguiente tabla muestra la cantidad de goles marcados por el delantero estrella del equipo local de fútbol después de diez temporadas como profesional.

   - Calculen la media y la mediana. ¿Qué se puede concluir?

Temporadas	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Goles	24	25	24	20	22	24	21	25	28	27

4. La siguiente tabla muestra las calificaciones obtenidas por siete parejas en un concurso de danzas. ¿Cuál medida de tendencia central usarían para representar el conjunto de datos? Híllenla y justifiquen.

Número de pareja	1	2	3	4	5	6	7
Calificación	90	70	160	20	180	60	120

Guía 23

La moda como medida de tendencia central

Estándares

Pensamiento aleatorio

- Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.
- Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.

Es usual encontrarnos con expresiones que hablan de las cosas que están de moda, ya sea en el vestuario, o en la decoración de espacios o lugares, también cuando se señalan sitios que son muy frecuentados, … en fin, en esta guía también hablaremos de moda, del significado que tiene esta medida de tendencia central.

Lo que sabemos

Mauricio recogió su cosecha de arveja y anotó la cantidad de bultos recogidos cada día, como se muestra a continuación:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Cantidad de bultos	60	45	34	50	60	180	40

Al encontrar Mauricio el promedio diario de la cantidad de bultos de arveja recogidos, encontramos:

$$\text{Media} = \frac{60 + 45 + 34 + 50 + 60 + 180 + 40}{7} = \frac{469}{7} = 67$$

La media obtenida ha sido de 67 bultos de café por día. Pero se duda su representatividad porque existe un valor de 180 que es mayor con respecto a los otros.

Al encontrar la mediana de la cantidad de bultos de arveja recogidos, encontramos:

Orden	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
Cantidad	34	40	45	**50**	60	60	180

La mediana corresponde al valor de la cuarta posición, que es 50 bultos de café

- ¿Crees que la diferencia entre los valores del promedio y la mediana obtenidos es significativo? ¿Por qué?

Aprendamos algo nuevo

Revisando los datos, se ve claramente que hay un dato que se repite dos veces; el 60, que corresponde a los días lunes y viernes.

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Cantidad de bultos	60	45	34	50	60	180	40

El valor 60 corresponde al dato de mayor frecuencia y por tanto es un valor de tendencia central conocido como **moda** o **valor modal**.

La **moda** o **valor modal** corresponde al valor de mayor frecuencia absoluta.

En la situación de los números de ayudantes contratados para recoger las cosechas correspondientes a 14 días, se observa que el dato de mayor frecuencia es 35, ya que este se da en los días 9 y 11.

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Ayudantes	19	30	22	10	34	15	31	10	**35**	12	**35**	20	24	25

En este conjunto de datos encontramos que la moda de 35 ayudantes por día está muy distante de las otras medidas de tendencia central estudiadas, ya que representa uno de los valores mayores del conjunto; concluimos entonces que la media y la mediana de 23 ayudantes por día representa mejor al conjunto de datos estudiado.

Ahora le ayudaremos a Mauricio a calcular la moda del número de camiones que transportaron la cosecha de todos sus cultivos en los anteriores diez días, información que se presenta en la próxima tabla.

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de camiones	**5**	6	3	**5**	4	**7**	2	**7**	8	1

Al buscar el valor más frecuente, vemos que en este caso corresponden a 5 y 7, camiones que se contrataron para dos días cada uno.

Hemos encontrado que existen dos valores frecuentes 5 y 7, entonces diremos que el conjunto de datos es **bimodal**.

La **moda o valor modal**, es la medida que se relaciona con la frecuencia absoluta con que se presentan los datos con mayor incidencia, con lo que se considera la posibilidad de que exista más de una moda para un conjunto de datos.

Se dice que cuando un conjunto de datos tiene una sola moda la muestra es **unimodal**, cuando tiene dos modas **bimodal**, cuando la muestra contiene más de dos modas es **multimodal;** y por último, cuando no se puede determinar es **amodal**.

Ejercitemos lo aprendido

1. Revisa la información correspondiente a las ganancias por venta de los productos tomate, maíz y zanahoria y determina:

   - La moda de cada uno de los productos, si es posible.

   - Compara las medidas de tendencia central: promedio, mediana y moda.

Trabajo en grupo

Trabaja con un compañero. Luego, compartan sus respuestas con el resto del grupo.

2. Calculen la moda de los datos recogidos en el curso correspondientes a la edad, la estatura y el peso.

3. En la siguiente tabla, se registraron los premios entregados por un almacén a sus clientes fieles durante su semana de aniversario. Hallen la moda y comparen su valor con las otras medidas de tendencia central.

Días	1	2	3	4	5	6	7
Premios	61	61	45	80	52	61	69

4. El siguiente grupo de datos corresponde a los puntajes de 13 personas:

2, 2, 10, 12, 12, 12, 12, 16, 16, 16, 16, 18, 20.

Es correcto afirmar que la moda, en este caso, sería el promedio de los valores 12 y 16. ¿Por qué?

Apliquemos lo aprendido

1. Después de preguntar a los estudiantes de undécimo grado de una región sobre el pregrado que querían realizar, los datos recolectados se clasificaron por áreas en la siguiente tabla:

Área	Cantidad de estudiantes
Ingeniería	45
Ciencias Puras	50
Ciencias Sociales	55
Artes	40
Educación	45
Ciencias Humanas	60
Otras	35

- Halla las medidas de tendencia central: promedio, mediana y la moda.
- ¿Cuál es el mejor valor representante del conjunto de datos?

2. En una prueba de lectura, los alumnos de tercero de primaria obtuvieron los siguientes resultados:

   18, 17, 7, 12, 15, 6, 7, 10, 9, 4, 2, 7, 20, 9, 10, 13, 11, 2, 16, 8, 3, 9, 4, 2, 19, 14, 15, 9, 8, 11, 13, 10, 4, 10, 3.

   - Calcula el promedio, la moda y la mediana.

3. La siguiente secuencia ordenada muestra las presas que devoró un grupo de leones en su estado natural en el África, durante los últimos seis meses:

   2, 2, 2, 5, 5, 5, 8, 8, 8.

   - Se puede considerar que como todos los valores presentan una frecuencia de tres no existe moda. ¿Por qué?

Evaluemos

¿Cómo me ve mi maestro?

A continuación, se nombrarán algunas ventajas y desventajas de las medidas de tendencia central estudiadas. Une con una línea la descripción de la medida de tendencia central con su correspondiente nombre.

• Es de fácil cálculo e interpretación sencilla. Es la más utilizada y es útil en muchos desarrollos matemáticos. La principal desventaja se presenta cuando alguno o los dos valores extremos de la muestra son desproporcionados respecto al resto de los datos, sobre todo cuando estos son poco numerosos. En este caso se aleja de la realidad, es decir, deja de ser representativa de los datos.	Media
• Es estable a los valores extremos. Es recomendable para el tratamiento de valores cualitativos. Se puede obtener por inspección. Puede que no se presente o exista más de una.	Mediana
• Es única. Es estable a los valores extremos. Es recomendable para el tratamiento de valores cualitativos o cuantitativos Si hay un gran número de datos, el tener que ordenarlos para hallarla exige esfuerzo y tiempo.	Moda

¿Cómo me ven los demás?

Trabaja con dos compañeros.

1. Dos empresas fabricantes de motos anuncian que la vida "promedio" de sus productos es de catorce años. Sin embargo, al obtener una muestra aleatoria de la duración de los productos, una persona encuentra que la vida en años del producto del fabricante Ozil es:

   10, 10, 10, 12, 12, 12, 12, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 16, 16, 16, 16, 18, 18, 18.

   Una muestra de las motocicletas Agnelli, segundo fabricante indica:

   6, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 14, 14, 14, 14, 14, 16, 16, 40, 40, 40.

   - Determinen los valores de tendencia central: media aritmética, mediana y moda de cada fabricante.
   - ¿Cuál máquina representaría una mejor inversión?
   - ¿Con cuál máquina se sentirían más seguros al afirmar que su vida "promedio" es de catorce años?

2. Se tienen los siguientes grupos de datos:

Grupo A	5	12	18	19	1	19	13	9	6	4	3	19	2
Grupo B	2	3	5	8	12	24	35	22	11	9	6	4	2

   - ¿Cuál es la medida de tendencia central que puede utilizarse mejor para describir el grupo A? ¿Y al grupo B? ¿Por qué?

3. Calculen la media del siguiente grupo de observaciones:

   6, 8, 10, 10, 12, 14.

   - Añadan una constante, digamos 4, a cada calificación. Vuelvan a calcular la media. ¿Cuál es el efecto producido sobre la media al añadir una constate a todas las observaciones?
   - Resten la misma constante a cada calificación. Vuelvan a calcular la media al substraer una constante a todas las observaciones.

- De forma alterna, añadan y resten la misma constante, digamos 4, al conjunto de observaciones (o sea, 6 + 4, 8 - 4, 10 + 4, etc.). Vuelvan a calcular la media.
- Generalicen: ¿Cuál es el efecto producido sobre la media al añadir y restar la misma constante igual número de veces al conjunto de observaciones?

Que aprendí

Responde según la manera en la que te desenvolviste en el desarrollo del módulo y justifica tu respuesta.

	Sí	No	A veces	Justifica
• Resuelvo situaciones que requieren el cálculo de la media.				
• Resuelvo situaciones que requieren el cálculo de la mediana.				
• Resuelvo situaciones que requieran la determinación de la moda.				
• Reconozco las principales ventajas y desventajas de las principales medidas de tendencia central.				
• Reconozco cuando es más representativo utilizar una determinada medida de tendencia central.				
• Trabajo activamente en grupo y respeto la opinión de mis compañeros.				
• Me preocupo por preparar mis trabajos y exposiciones.				
• Acepto mis errores o dificultades y trato de superarlos.				
• Aporto en las actividades grupales.				
• Soy tolerante con las diferencias de opinión cuando trabajo en grupo.				

Con tu maestro, determina estrategias para mejorar cada día tu trabajo. Establece un plan de seguimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ministerio de Educación Nacional.(2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá. MEN

Gispert, C & Vidal José A. *Enciclopedia didáctica de la matemática.* Barcelona: Océano.

Uribe C., Julio A. & Berrio M., Jose I. (1998). *Elementos de matemáticas: séptimo grado*. Medellín: Bedout.

REFERENCIAS WEB

EducaMadrid (2001). *Transformaciones geométricas.* En: Curso de dibujo técnico. 2 de bachillerato. Consultado el 22 de octubre de 2010 de: Plataforma Tecnológica de la comunidad de Madrid http en://www.educa2.madrid.org/educamadrid/. www.educa.madrid.org/web/ies.atenea.alcala/cv/patxi-a/apuntes/dibujot/tecnico04.pdf

Godino, J. D & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros* (versión Electrónica). Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, p. 789. Granada España.

Hoffmann C. (2005). *Funciones.*Consultado el 27 septiembre de 2010 de: Universidad Nacional de la Plata: http: //www.fcv.unlp.edu.ar. http://www.fcv.unlp.edu.ar/info-general/ingreso2005/mat_unidad_3.pdf

Pérez, M y Jañes, L. (S.F) *Transformaciones en* IR^3 En: Geometría. Consultado el 20 de septiembre de 2010 de: Universidad de Valladolid en: http://www.uva.es/.

http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Geometria/marco_geometria.htm

U.D. de Matemáticas (2010). *Homotecias del espacio afín euclídeo.* En: Transformaciones geométricas. Consultado el 23 de octubre de 2010 de: Universidad Politécnica de Madrid en: http://www.upm.es/institucional. http://www.topografia.upm.es/asignaturas/matematicas/primero/Apuntes/Transformaciones/index8.htm

REFERENCIAS DE IMÁGENES

Módulo 3

Pág. 90

Tienda de víveres.jpg. Recuperada el 18 de agosto de 2010 de: http://picasaweb.google.com/lh/photo/AhZrEyXX_wmeHajYBQjoVA

Módulo 5

Pág. 184

Chinchorro elaborado por la cultura Wayúu.jpg. Recuperada el 18 de agosto de 2010 de: http://www.colombia.travel/es/images/stories/turistainternacional/Quehacer/historiaytradicion/artesanias/wayuu2.jpg

Pág. 200

Molde del hueso de Nazarí.jpg. Recuperada el 13 de enero de 2012 de: http://chabastaller-monografico.blogspot.com/2010_04_01_archive.html